ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1894

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME III.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1894

« Si sospese il riscaldamento perchè il composto aveva assunto un colore giallo chiaro con una punta di nero per platino ridotto. Si trattò la massa con acqua; rimase tutto indisciolto, segno che il cloroplatinato s'era modificato completamente. Si eliminò il Platino ridotto con acqua regia di media concentrazione; rimase come residuo una polvere giallo-chiara, che presentava tutti i caratteri fisici del composto prima descritto.

« L'analisi confermò che il composto ottenuto è identico a quello preparato per via umida.

« Infatti gr. 0.1,521 di composto disseccato a 100° lasciarono alla calcinazione gr. 0,0631 di Platino.

gr. 0,135 richiesero cc. 11,2 di soluzione $\frac{N}{10}$ di $Ag\,NO^3$

« Ossia in 100 parti:

	trovato	calcolato per $(C^3H^4N^2)^2\,PtCl^4$
Pt.	41,48	41,13
Cl.	29,45	30,07.

« Ho tentato di preparare lo stesso composto per ebollizione prolungata d'una soluzione acquosa di cloroplatinato, ma il tentativo non mi è riuscito.

« Scaldando una soluzione acquosa al 5 % di cloroplatinato di Gliossalina e prolungando l'ebollizione per 8 ore, si ha appena accenno al deposito di una sostanza insolubile. Dopo 12 ore di ebollizione il liquido s'intorbida e si deposita una sostanza bruna che è una mescolanza di platino e di cloruro platinoso. Tentai allora la trasformazione in tubo chiuso, ma quando la temperatura della stufa arrivò a 140°, il tubo scoppiò violentemente, quantunque fosse saldato con gran cura.

« Le esperienze sudescritte mi permettono di concludere riferendomi alla mia nota sopracitata che, l'eliminazione di quattro molecole di acido cloridrico per riscaldamento dei cloroplatinati è caratteristico di quelle basi, come i pirrazoli, che contegono nel nucleo i due atomi di Azoto collegati fra di loro come i composti idrazinici ».

Meccanica. — *Ancora sulla forma del corpo attraente nella misura della densità media della Terra e sul corpo di massima attrazione a due punti.* Nota del dott. A. Sella, presentata dal Socio Blaserna.

« 1. In una Nota precedente [1] ho trattato della forma più opportuna da darsi al corpo attraente nella misura della densità media della terra per i metodi, in cui importa la conoscenza dell'attrazione del corpo attraente su di *un*

[1] Rend. dell'Acc. d. Lincei. Vol. II, 1° sem., 1893, p. 90.

punto materiale. Vengo ora a trattare dei metodi in cui importa la conoscenza dell'attrazione del corpo attraente su *due* punti materiali.

« Il metodo Jolly-Poynting (1) di misura della densità media della terra consiste nel determinare la differenza di peso di un corpo in due posizioni differenti, cioè da prima immediatamente al disopra di una grande massa attraente di piombo e poi a tale distanza da questa da renderne trascurabile l'effetto attrattivo.

« Il Keller proponeva nel 1881 (2) un'importante modificazione di questo metodo, che consisterebbe nel pesare il corpo ambedue le volte nella prossimità immediata della massa attraente, cioè prima al di sopra e poi al di sotto di questa; con che si raddoppia l'effetto e si tolgono molte e gravi difficoltà sperimentali. L'effetto si può anzi con questo metodo quadruplicare (3), adoperando due masse attraenti poste rispettivamente fra due piattelli verticalmente situati l'uno sopra l'altro a destra e sinistra, e scambiando poi i due pesi attratti dalla posizione piattelli destro superiore e sinistro inferiore colla posizione sinistro superiore e destro inferiore.

« Come si vede, occorre in questi metodi la conoscenza dell'attrazione della massa attraente su due punti diversi cioè all'estremità superiore ed all'inferiore; le quali due attrazioni non sono numericamente eguali che nel caso dell'esistenza nella massa attraente di un piano di simmetria orizzontale.

« Nasce allora la questione quale forma — o in caso di tipo di forma dato quali dimensioni relative — convenga dare alla massa disponibile per ottenere il massimo effetto, cioè per rendere massima la somma delle due attrazioni (4).

« 2. Nel primo caso si è condotti a cercare la forma del corpo di massima attrazione a due punti, che oltre ad essere di rotazione intorno alla

(1) Jolly, Wied. Annalen V, 1878, p. 112 e XIV, 1881, p. 331; Poynting, Proc. Roy. Society, 28, 1878, p. 2 e Phyl. Transactions, 182, 1891, p. 565.

(2) Keller, Mem. dell'Acc. d. Lincei. Vol. IX, 1881, p. 114. Vedi anche Rend. id. Vol. II 1886, p. 145 e l'opuscolo: *Vergleichende Uebersicht der verschiedenen Messungsmethoden der mittleren Dichtigkeit der Erde*, Nürnberg u. Rom, 1891.

(3) König e Richarz, Verhandl. d. phys. Ges. Berlin 1884, p. 62. Vedi anche Nature, Vol. XXXI, 1885, p. 484, l'articolo in risposta alle osservazioni di Mayer, id. p. 408.

(4) La misura sperimentale consiste nel determinare la differenza di peso di un corpo portato successivamente in due punti situati verticalmente l'uno sopra l'altro. Questa determinazione — poichè la gravità diminuisce coll'altezza — deve essere fatta in due casi distinti, cioè 1° lasciando lo spazio fra i due punti vuoto, e 2° interponendo la massa di piombo, che serve di massa di attrazione. È evidente che la seconda misura darà sempre un risultato *minore* della prima. La precisione della determinazione della densità della terra aumenta in ragione della differenza delle due misurazioni parziali, ed appunto per questa ragione si deve cercare di dare alla massa una forma di massima attrazione. Ben inteso che in pratica il vantaggio che si ha coll'adottare una forma piuttosto che un'altra è piccolo, come già ebbi occasione di avvertire nella mia Nota precedente.

congiungente i due punti avrà un piano di simmetria normale a questa retta. Considerazioni sintetiche immediate mostrano — in analogia col caso del corpo di massima attrazione ad un punto — che la superficie limitante esso corpo deve essere tale che sia costante la somma delle attrazioni sui due punti, lungo l'asse di rotazione, della massa uno situata in un punto di essa superficie. Ma mentre il valore dell'attrazione della massa uno sulla superficie, che si può assumere come il parametro μ della curva sezione, è nel caso del corpo di massima attrazione ad un punto immediatamente fornito dalla massa disponibile, ora non è più così essendo indeterminata la distanza dei due punti, avendosi cioè due variabili, questa distanza ed il parametro della curva sezione.

« Sia l'asse delle x l'asse di rotazione congiungente i due punti situati alla distanza $2a$ e l'asse delle y la normale nel punto di mezzo dei due punti. Se A è allora la somma delle attrazioni sui due punti e V il volume del corpo, avremo colle stesse ipotesi fatte nella Nota sopracitata:

$$A = 2\pi \int_{-a}^{+a} \left(2 - \frac{a+x}{\sqrt{(a+x)^2+y^2}} - \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}}\right) dx \tag{1}$$

$$V = \pi \int_{-a}^{+a} y^2\, dx.$$

« Volendo ora rendere massimo A con la condizione che V resti costante, dovremo avere:

$$0 = \delta\,(A - \mu V) = \delta \int_{-a}^{+a} F\, dx, \tag{2}$$

da cui coi metodi ordinari del calcolo delle variazioni seguono le due relazioni:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0\,, \quad F(a) + F(-a) + \int_{-a}^{+a} \frac{\partial F}{\partial a}\, dx = 0,$$

le quali diventano:

$$\frac{a+x}{[(a+x)^2+y^2]^{3/2}} + \frac{a-x}{[(a-x)^2+y^2]^{3/2}} = \mu, \tag{3}$$

$$\int_{-a}^{+a} \left\{\frac{y^2}{[(a+x)^2+y^2]^{3/2}} + \frac{y^2}{[(a-x)^2+y^2)^{3/2}}\right\} dx = 2. \tag{4}$$

« La (3), in cui μ è una costante da determinarsi, è l'equazione indefinita della curva meridiana del corpo, che si poteva anche scrivere a priori, giacchè esprime appunto la proprietà sopradetta di attrazione costante μ della massa uno in un punto qualunque della superficie. La (4) invece è un'equazione ai limiti; e si può trasformare in un'altra, che permette un' interpre-

tazione molto semplice ed importante. Infatti tenendo presente la (3) noi potremo scrivere la (4):

$$2a = \mu \int_{-a}^{+a} y^2\,dx - \int_{-a}^{+a} x \left(\frac{y^2}{[(a+x)^2+y^2]^{3/2}} - \frac{y^2}{[(a-x)^2+y^2]^{3/2}} \right) dx =$$

$$= \mu \int_{-a}^{+a} y^2\,dx - \int_{-a}^{+a} x \left(\frac{y^2 - (a+x)\,y\frac{dy}{dx}}{[(a+x)^2+y^2]^{3/2}} + \frac{-y^2-(a-x)\,y\frac{dy}{dx}}{[(a-x)^2\,y^2]^{3/2}} \right) dx -$$

$$- \mu \int_{-a}^{+a} xy\,\frac{dy}{dx}\,dx$$

ed integrando per parti, prendendo come fattore finito x:

$$2a = \mu \int_{-}^{+a} y^2\,dx - \left[\frac{a+x}{\sqrt{(a+x)^2+y^2}}\,x + \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}}\,x \right]_{-a}^{+a} +$$

$$+ \int_{-a}^{+a} \left(\frac{a+x}{\sqrt{(a+x)^2+y^2}} + \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}} \right) dx$$

$$- \mu \left[x\frac{y^2}{2} \right]_{-a}^{+a} + \frac{1}{2}\mu \int_{-a}^{+a} y^2\,dx,$$

e riflettendo al significato geometrico di $\frac{a+x}{\sqrt{(a+x)^2+y^2}}$ ed $\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}}$

$$4a - \frac{3}{2}\mu \int_{-a}^{+a} y^2\,dx + \int_{-a}^{+a} \left(\frac{a+x}{\sqrt{(a+x)^2+y^2}} + \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}} \right) dx$$

$$\int_{-a}^{+a} \left(2 - \frac{a+x}{\sqrt{(a+x)^2+y^2}} - \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}} \right) dx = \frac{3}{2}\mu \int_{-a}^{+a} y^2\,dx,$$

da cui si ha finalmente:

$$A = 3\mu V. \qquad (4')$$

E ricordando il significato di μ noi potremo dire:

« La somma delle due attrazioni lungo l'asse è nel corpo di massima attrazione a due punti la stessa, come se una massa eguale al triplo di quella del corpo fosse distribuita in un modo qualunque sulla superficie.

« Le due relazioni (3) e (4'), che caratterizzano il corpo di massima attrazione a due punti, sono così suscettibili di un' interpretazione molto semplice.

« 3. Scriviamo ora l'equazione della curva meridiana sotto la forma:

$$\frac{\cos\vartheta_1}{\varrho_1^2} + \frac{\cos\vartheta_2}{\varrho_2^2} = \mu,$$

in cui il significato dei nuovi simboli introdotti è evidente, e consideriamo due coni infinitesimi di apertura ω_1 ed ω_2 che proiettano dai due poli lo stesso elemento di superficie. Le due attrazioni lungo l'asse di questi due coni, ed i due volumi saranno dati da:

$A_1 = \omega_1 \varrho_1 \cos \vartheta_1$, $A_2 = \omega_2 \varrho_2 \cos \vartheta_2$ e $V_1 = \omega_1 \varrho_1^3/3$, $V_2 = \omega_2 \varrho_2^3/3$

e la relazione di sopra esprime che:

$$3\mu = \frac{\omega_1 \varrho_1 \cos \vartheta_1}{\omega_1 \varrho_1^3/3} + \frac{\omega_2 \varrho_2 \cos \vartheta_2}{\omega_2 \varrho_2^3/3} = \frac{A_1}{V_1} + \frac{A_2}{V_2}$$

cioè: La somma dei rapporti fra l'attrazione lungo l'asse ed il volume di due coni aventi per base una stessa porzione infinitesima della superficie e per vertici i due punti attratti, è costante ed eguale a 3 volte la somma delle due attrazioni esercitate da una massa uno situata in un punto qualunque della superficie.

« Giova ora notare che nel corpo di massima attrazione ad un punto l'analoga proprietà vale per coni finiti qualsiasi [1], mentre questo non è per quello a due punti e quindi la relazione (4') non si può dedurre dal teorema ora enunciato, come lo si poteva nel corpo di massima attrazione ad un punto.

« 4. Veniamo ora alla risoluzione, per così dire, numerica del problema del corpo di massima attrazione a due punti. Di questa questione si è occupato l'ing. Gaudenzio Sella; io accennerò qui in tutta brevità alle linee generali del procedimento da lui tenuto, esprimendo il desiderio che questo venga prossimamente pubblicato per esteso.

« Ponendo x ed y in luogo di x/a ed y/a le relazioni (1) sino a (4) si trasformano in:

$$A = 2\pi a \int_{-1}^{+1} \left(2 - \frac{1+x}{\sqrt{(1+x)^2 + y^2}} - \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} \right) dx \qquad \text{(I)}$$

$$V = \pi a^3 \int_{-1}^{+1} y^2 \, dx \qquad \text{(II)}$$

$$\frac{1+x}{[(1+x)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{1-x}{[(1-x)^2 + y^2]^{3/2}} = 2\nu \qquad \text{(III)}$$

$$\int_{-1}^{+1} \left(\frac{y^2}{[(1+x)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{y^2}{[(1-x)^2 + y^2]^{3/2}} \right) dx = 2 \qquad \text{(IV)}$$

di cui la (III) e la (IV) determinano il *numero* incognito ν, trovato il quale la (III) è l'equazione della curva meridiana, la (II) determina la distanza $2a$ dei due punti e la prima fornisce la somma delle due attrazioni. Ora se per determinare ν si volesse ricavare il valore di y^2 dalla (III) per sostituirne

[1] Vedi la mia Nota sopracitata.

il valore nella (IV), si cadrebbe in un'equazione del dodicesimo grado in y^2; nè si riesce altrimenti ad integrare la (IV) tenuto conto della (III).

« Introducendo ora una nuova variabile t definita da:

$$\frac{1+x}{[(1+x)^2+y^2]^{3/2}} = \nu + t\,, \quad \frac{1-x}{[(1-x)^2+y^2]^{3/2}} = \nu - t,$$

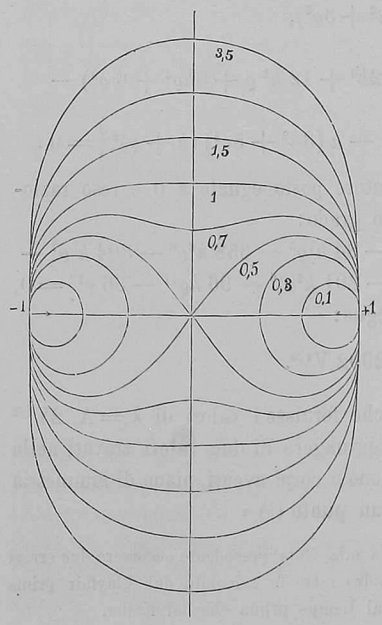
con che le (III) e (IV) diventano rispettivamente:

$$\left(\frac{1+x}{\nu+t}\right)^{2/3} - \left(\frac{1-x}{\nu-t}\right)^{2/3} = 4x\,, \qquad \int_{x=0}^{x=1} y^2\,dt = 0$$

si può mostrare che ν è compreso tra $1/(3\sqrt{3})$ ed $1/4$ e che in questo intervallo vi ha *un solo* valore di ν che soddisfi alle condizioni del problema, cioè che questo ammette un'unica soluzione. Ciò posto assumendo per ν il valore $1/(1+\sqrt{3})^{3/2} = 0{,}2214456$ e costruendo una tabella che dà i valori di $y\,, y^2\,, t\,, (1+x)/\sqrt{(1+x)^2+y^2}\,,\ (1-x)/\sqrt{(1-x)^2+y^2}$ corrispondenti a successivi valori di x e col soccorso di procedimenti grafici si determina il valore di A, V e quindi di $\lambda = A/2V^{1/3}$. Il valore scelto di ν è troppo grande con un errore presumibilmente minore di 0,0008. Si ha così come risultato finale:

$$\nu = 0{,}2214456 - \delta, \qquad \lambda = \frac{A}{2V^{1/3}} = 2{,}66576 - \varepsilon\,,$$

$$\delta < 0{,}0008 \qquad \varepsilon < 0{,}001763$$



dal quale si vede quanto poco il valore dell'ultimo rapporto differisca da quello che vale per il corpo di m. a. ad un punto, cioè da 2,66604.

« 5. Nell'unita figura sono disegnate alcune curve meridiane di superficie ad attrazione costante sui due punti $+1$ e -1 corrispondenti a diversi valori del parametro ν; accanto a ciascuna curva è scritto il valore corrispondente di $1/2\nu$. In questo sistema si considera come costante la distanza dei due punti e variabile il volume, ossia la massa disponibile. Da principio si hanno due superficie separate, la cui forma si allontana sempre più da quella del corpo di m. a. ad un punto, che vanno mano a mano riunendosi in una sola per $\nu = 1$; la tangente alla curva meridiana all'origine

fa allora coll'asse delle x un angolo determinato da $\operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{2}$. Poi col diminuire di ν l'ordinata corrispondente ad $x = 0$ va successivamente innalzandosi sino all'∞. La curva disegnata più fortemente (la penultima) corrisponde secondo i dati calcolati dall'ing. G. Sella al corpo di m. a. a due punti. Si noti che tutte queste curve hanno raggio di curvatura infinito nei due poli. Così giova osservare che per i valori di ν compresi tra 0 ed 1, che forniscono due rami, il volume non è dato senz'altro da $V = \pi \int_{-1}^{+1} y^2\, dx$, perchè nel tratto intermedio, in cui y non è reale, y^2 è negativo e fornisce degli elementi all'integrale; e quindi il valore di V così calcolato sarebbe del tutto diverso da quello che chiediamo alla formola.

« 6. Se passiamo ora a corpi di dato tipo di forma, si vede subito che per quelli, i quali presentano un piano di simmetria normale alla congiungente i due punti, si hanno gli stessi valori come per la m. a. ad un punto; ma non così per gli altri.

« Si abbia p. e. una calotta sferica e si voglia determinare quel rapporto di h e ϱ, cioè altezza e raggio della base, che rende massima la somma delle attrazioni sul centro della base e sul vertice, mantenendo costante il volume. Si avranno allora, applicando i soliti metodi, le seguenti equazioni:

$$A = \frac{2\pi h}{3}\left(3 - \frac{2h}{\sqrt{h^2+\varrho^2}} + \frac{h^2+2h\varrho+3\varrho^2}{3(h+\varrho)^2}\right),$$

$$V = \frac{\pi}{2.3}\, h\,(h^2+3\varrho^2),$$

$$\frac{h\varrho}{(h+\varrho)^3(h^2+\varrho^2)^{3/2}}\Big\{(h^2+\varrho^2)^{3/2}(2h^3+12\,h^2\varrho+8h\varrho^2+6\,\varrho^3) - \\ - h\,(3h^2+5\varrho^2)\,(h+\varrho)^2\Big\} = 0\,,$$

« Il fattore fra parentesi al numeratore posto eguale a 0 e reso razionale, fornisce l'equazione del dodicesimo grado:

$$5\,h^{12} + 6\,h^{11}\varrho - 23\,h^{10}\varrho^2 - 138\,h^8\varrho^4 - 84\,h^7\varrho^5 - 358\,h^6\varrho^6 - 304\,h^5\varrho^7 - \\ - 503\,h^4\varrho^8 - 354\,h^3\varrho^9 - 291\,h^2\varrho^{10} - 96\,h\varrho^{11} - 36\,\varrho^{12} = 0,$$

soddisfatta da $h = 2{,}76085\,\varrho$ da cui segue:

$$\frac{A}{2} = 2{,}62992\,V^{1/3}.$$

Se si volesse ora costruire una tabella, che fornisse i valori di $\lambda = A/2V^{1/3}$ per i casi sinora studiati, si dovrebbe aggiungere ai due valori trovati nella presente Nota tutti quelli che corrispondono a corpi aventi piano di simmetria e che sono conosciuti per la m. a. ad un punto [1] »

[1] Nella corrispondente tabella data nella mia Nota precedente occorsero due errori circa alla priorità del calcolatore. Così il cilindro retto fu calcolato dal Playfair prima che dal Lampe, ed il prisma quadrato retto dal Lampe prima che dal Keller.