ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1894

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME III.

1° Semestre

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1894

limite A non si spezzi in tre coniche che si tocchino in $O \equiv O'$ ed in un secondo punto (1), perchè allora il piano doppio (e quindi F) rappresenta una rigata ellittica le cui generatrici vengono rappresentate a coppie dalle coniche formanti fascio con quelle tre; alle curve Γ del piano doppio (o alle C di F) corrispondono curve secanti in $\frac{\nu+2}{2}$ punti le generatrici della rigata.

« Riunendo questi risultati ai precedenti si giunge in fine al teorema:

« Se una superficie F contiene una rete di curve C iperellittiche di genere p, tale che il gruppo delle intersezioni variabili di due C generiche si componga di $\nu \geqq p$ coppie della g_2^1 giacente su quelle C, la F può riferirsi biunivocamente

« α) o ad un piano,

« β) o ad una rigata iperellittica di genere p, sulla quale le C sono rappresentate da curve direttrici,

« γ) o ad una rigata ellittica sulla quale le C sono rappresentate da curve secanti le generatrici in $\frac{\nu+1}{2}$ o $\frac{\nu+2}{2}$ punti; il caso γ) è possibile soltanto se $\nu = p$, oppure se $\nu = 4$, $p = 3$ (2) ».

Matematica. — *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche.* Nota di Federigo Enriques, presentata dal Socio Cremona.

« In una mia Nota *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche* (3) ho classificato i sistemi lineari *semplici* di superficie le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche di genere $p > 1$, assegnando il *tipo* a cui siffatti sistemi si possono ricondurre con trasformazioni cremoniane dello spazio.

(1) Pel caso generale si veda Nöther, *Ueber ein-zweideutigen...* l. c.; *Ueber eine Classe von auf die einfache Ebene abbildbaren Doppelebenen* (Math. Annalen, Bd. 33). I casi particolari, in cui la sestica limite ha punti multipli fuori dei punti tripli O, O', si discutono abbassando l'ordine della curva con una trasformazione quadratica.

(2) Ed è certo possibile, come si riconosce considerando il sistema di curve segate sopra un cono cubico K da un sistema lineare $\infty^{\nu+1}$ di coni razionali d'ordine $\frac{\nu+1}{2}$ o $\frac{\nu+2}{2}$ col vertice V in un punto fisso di K, e con una generatrice fissa multipla secondo $\frac{\nu-1}{2}$ o $\frac{\nu}{2}$, colla condizione inoltre, se ν è pari, che la generatrice fissa tocchi K in un punto fuori di V, ed il piano ivi tangente a K sia pur tangente ai coni del sistema. Per ottenere poi il caso $\nu = 4$, $p = 3$, basta segare K coi coni quadrici aventi il vertice in un punto fisso di K.

(3) Rendic. Acc. dei Lincei. Decembre 1893.

« I sistemi lineari di superficie le cui intersezioni variabili sono curve di genere $p = 0$, $p = 1$, non rientrano in generale in quel tipo (come ivi è osservato), ma per $p = 0$ la questione si risolve facilmente come è indicato in una nota di quel lavoro. Alla considerazione del caso $p = 1$ è dedicata la presente Nota, nella quale classifico appunto (riducendo a *tipi*) i sistemi lineari semplici di superficie ad intersezioni variabili ellittiche: vengono soltanto esclusi quei sistemi semplici (ad intersezioni variabili ellittiche) pei quali tre superficie generiche s'incontrano in 3 punti variabili (cioè sistemi di *grado* 3); la determinazione di essi dipende dalla risoluzione del problema se la varietà cubica di S_4, senza punti doppi, sia rappresentabile punto per punto su S_3 (cioè sia razionale) (1). Mi propongo dunque di assegnare e ricondurre a tipi tutti i sistemi lineari semplici di superficie ad intersezioni variabili ellittiche dove tre superficie generiche s'incontrano in $n > 3$ punti variabili (sistemi di grado $n > 3$): mostrerò come i nominati tipi vengono dati da sistemi di quadriche, di superficie cubiche e da un particolare sistema di superficie del 4° ordine.

« Più in generale risolvo qui la questione dello studio delle varietà (a 3 dimensioni) a curve sezioni (cogli S_{n-2} in S_n) ellittiche, d'ordine > 3. Esse risultano tutte razionali o contengono un *fascio* ellittico di piani (ed in quest'ultimo caso non possono essere razionali) (2).

« § 1. Una qualunque varietà W a 3 dimensioni d'ordine > 2, di S_n, le cui superficie sezioni (iperplanari) cogli S_{n-1} sono rigate, contiene un fascio di piani. Per vederlo basta osservare che sulla W si hanno in tale ipotesi ∞^1 rette per un punto, ed il cono da esse generato ha *una* retta comune con un iperpiano (S_{n-1}) generico pel punto, e però è un piano.

« Ciò vale in particolare se la varietà in questione è a curve sezioni ellittiche: perciò le varietà a curve sezioni ellittiche non contenenti un fascio (ellittico) di piani hanno le superficie sezioni non rigate, quindi razionali (3).

« Consideriamo una varietà W^n d'ordine n a curve sezioni ellittiche ed escludiamo che essa contenga un fascio (ellittico) di piani. Supponiamo la W^n appartenente ad un S_4, dove eventualmente può supporsi proiettata da punti esterni.

(1) Tale questione rimane tuttora insoluta. È però notevole il fatto (che il sig. Noether ha segnalato al sig. Segre per $n = 3$), che l'equazione generale del 3° grado in $n + 1$ variabili può risolversi con funzioni razionali di n parametri non invertibili, cioè che si possono far corrispondere biunivocamente i punti di una varietà cubica V_n^3 di S_{n+1} ai gruppi (od anche alle coppie) di una involuzione in S_n.

(2) Giacchè dal teorema del sig. Lüroth relativo alla razionalità delle involuzioni sulla retta (Math. Ann. Bd. 9), segue che un *fascio* di superficie in S_3 è razionale. (Per fascio di superficie in una varietà si deve intendere un sistema ∞^1 di superficie tale che per un punto generico della varietà passi *una* superficie del sistema).

(3) Per un teorema del sig. Castelnuovo, Rendic. Accad. dei Lincei. Gennaio 1894.

« Il procedimento indicato dal sig. Castelnuovo per le superficie non rigate a sezioni ellittiche (1), si estende subito a questo caso e permette di costruire un (anzi *il*) sistema lineare ∞^{n+1} di varietà d'ordine $n-2$ (*aggiunte* alla W^n) seganti ogni piano secondo una curva d'ordine $n-2$ aggiunta alla sezione d'ordine n della varietà (2).

« Tali varietà aggiunte segano sulla W^n un sistema lineare ∞^{n+1} di superficie di cui tre generiche si segano in n punti variabili, al quale sistema appartengono le sezioni iperplanari di W^n. Riferendo proiettivamente gli elementi (superficie) del detto sistema agli iperpiani (S_n) di S_{n+1} la W^n si trasforma in una varietà *normale* V^n, d'ordine n in S_{n+1}, a curve sezioni ellittiche: la V^n risulta così proiettivamente determinata, e per $n > 3$ la W^n è una sua proiezione da punti esterni, mentre per $n = 3$ la W^n coincide colla V^n (a meno di trasformazioni proiettive).

« Se $n > 3$ la V^n può proiettarsi successivamente, in modo univoco, da $n-3$ suoi punti semplici sopra una varietà cubica di S_4 contenente piani (che non è un cono ellittico di 2ª specie), e però è razionale (3).

« Dunque:

« Ogni varietà (di 3 dimensioni) a curve sezioni ellittiche,

1°) o contiene un fascio (ellittico) di piani (ed è irrazionale);

2°) o è rappresentabile punto per punto sulla varietà cubica di S_4, ed in questo caso è certo razionale se ha l'ordine > 3.

« Il teorema si estende alle varietà con più di 3 dimensioni.

« § 2. Data in S_n una varietà (di 3 dimensioni) W^n a curve sezioni ellittiche d'ordine $n > 3$, non contenente un fascio di piani, abbiam visto che essa può proiettarsi (da punti esterni) in una varietà di S_4 la quale è alla sua volta proiezione d'una varietà normale V^n d'ordine n di un S_{n+1}: pel nostro scopo occorre ancora stabilire che la W^n è essa pure proiezione della medesima varietà V^n o di una ad essa proiettiva (occorre cioè stabilire che la varietà normale V^n di cui è data una proiezione, resta così proiettivamente determinata); invero è soltanto a questo patto che potremo affermare

(1) L. c. La possibilità di questa estensione e quindi la possibilità di considerare le W^n come proiezioni delle varietà normali V^n di S_{n+1} fu vista dal sig. Castelnuovo, che me ne suggerì lo studio.

(2) Si potrebbe vedere (ma qui non occorre) che le nominate varietà d'ordine $n-2$ sono effettivamente aggiunte alla W^n nel senso stabilito dal sig. Noether (Math. Ann. Bd. 2, 8).

(3) Cfr. Segre *Sulle varietà cubiche della spazio a 4 dimensioni* ecc. (Accad. di Torino. Memorie 1888). — Sulle varietà cubiche contenenti piani (e segnatamente su quella che ne contiene 10) cfr. anche Segre, Atti Accad. di Torino 1887 e Castelnuovo, Atti Istituto Veneto 1888-1891.

che un sistema lineare semplice di superficie ad intersezioni variabili ellittiche in S_3 rappresentativo di W^n, è contenuto in un sistema che rappresenta la varietà normale V^n. La questione di cui qui si tratta fa parte di una questione generale analoga a quella che è stata risoluta dal sig. Segre per le curve e per le superficie rigate (1), e da me per tutte le superficie (2). Non è qui il luogo di trattare la questione generale (che pure può risolversi affermativamente): basterà che trattiamo il caso che ci riguarda.

« A tal fine occorre dimostrare che sopra una varietà W_1^n d'ordine n di S_4, proiezione della W_1^n, una superficie d'ordine n la quale appartenga ad un sistema lineare di superficie contenente quello delle sezioni iperplanari di W_1^n, è la sezione di W_1^n (fuori della superficie multipla) con una varietà aggiunta d'ordine $n-2$: infatti ciò significa che il sistema delle superficie sezioni iperplanari di W^n è contenuto in quello delle sezioni iperplanari della V^n costruita nel precedente §.

« Ora si osservi che la nostra superficie F, per le condizioni poste, sega ogni curva C sezione piana di W_1^n in un gruppo di n punti intersezione di *una* curva d'ordine $n-2$ aggiunta alla C (giacchè le nominate curve aggiunte determinano sulla C la serie completa contenente quella segata dalle rette): facendo variare il piano della C per una retta generica di S_4, la nominata curva aggiunta descrive una varietà d'ordine $n-2$ aggiunta alla W_1^n, di cui la F è sezione (3) *cdd.*

« § 3. Ciò posto noi dobbiamo rivolgerci allo studio delle varietà normali V^n d'ordine $n > 3$ in S_{n+1} a curve sezioni ellittiche (non contenenti un fascio di piani e però) razionali: rappresentandole sopra S_3 punto per punto, i sistemi di superficie rappresentativi (costituiti dalle immagini delle sezioni iperplanari di V^n), e quelli in essi contenuti, ci forniranno i tipi richiesti. Per brevità parlando di una V^n intenderemo che essa sia una varietà soddisfacente alle condizioni enunciate.

« Sebbene il procedimento adoperato sia il medesimo, conviene tener distinto il caso delle varietà V^n d'ordine $n > 4$ da quello delle V^4.

« Per quest'ultime si noti anzitutto che esse sono intersezione completa di due quadriche (varietà base di un fascio di quadriche). Invero una quartica C sezione con un S_3 della V^4 è base per un fascio di superficie quadriche di S_3: un S_4 per lo S_3 sega V^4 secondo una superficie F (a sezioni normali) per la quale passano tante quadriche di 3 dimensioni quante superficie quadriche passano per una sezione (4), in altre parole vi è *una* quadrica di S_4 contenente tanto la F quanto una superficie quadrica per C in S_3; va-

(1) Math. Ann. Bd. 33-34.

(2) *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche.* Accad. di Torino. Memorie 1893.

(3) Cfr. le mie *Ricerche* ecc. l. c. cap. II, § 1, pag. 22.

(4) V. le mie *Ricerche* ecc. l. c. cap. V, § 4, pag. 59.

riando lo S_4 per S_3 il luogo delle nominate quadriche di 3 dimensioni passanti per una stessa superficie di 2° ordine di S_3 è *una* quadrica di S_5 passante per la medesima superficie del 2° ordine e contenente la V^4: la V^4 appartiene dunque alle quadriche d'un fascio in S_5 (1).

« Se gli elementi (punti) di una di queste quadriche sono le rette dello spazio ordinario, la V^4 è un complesso quadratico di rette. La sua rappresentazione su S_3 è nota (2).

« Per ottenerla nel modo più semplice si può notare che ad una superficie F sezione generica della V^4 (intersezione di due quadriche di S_4) appartiene sempre almeno una retta (anzi 16 rette distinte se F non ha punti doppi ed almeno 4 rette, distinte o no, per il punto doppio, se la F possiede un punto doppio): da una di queste rette a la F viene proiettata univocamente sopra un piano, giacchè due quadriche per la F segano un piano generico per a, fuori di a, in due rette non passanti per uno stesso punto di a, non essendo F rigata (3).

« Perciò proiettando la V^4 di S_5 da una tale retta a sopra un S_3 (contenuto nel suo S_5) si ottiene la rappresentazione univoca della V^4 su S_3. In questa rappresentazione le immagini delle sezioni iperplanari della V^4 sono le superficie cubiche L proiezioni delle sezioni stesse dal punto comune ad a e al loro iperpiano; le immagini delle quartiche sezioni sono le quartiche proiezioni di esse da a; quindi le superficie cubiche L hanno comune una quintica base k. In luogo di proiettare la V^4 da a è lo stesso proiettarla prima da un punto O di a in una V^3 di S_4, e quindi proiettare V^3 su S_3 dal punto doppio corrispondente ad a. Si vede così come alla retta a corrisponda nello S_3 rappresentativo una quadrica Q contenente la quintica k base pel sistema delle L (la quale può eventualmente spezzarsi): si vede inoltre come al centro di proiezione O (che è un punto generico di a) corrisponda una retta di questa quadrica che insieme alla k costituisce una sestica intersezione della quadrica Q con le superficie cubiche non spezzate costituenti il sistema rappresentativo della V^3.

(1) Questa dimostrazione si estende e permette in generale di stabilire che per una varietà M_k di k dimensioni a curve sezioni normali, (cogli S_{n-k+1} in S_n), passano tante quadriche di S_n (linearmente indipendenti) quante quadriche di S_{n-k+1} passano per una sua curva sezione generica. Pel caso della V^4 il fatto stabilito segue anche dall'osservazione che la V^4 vien proiettata da un punto in una V^3 di S_4 (Segre, Accad. Tor. Memorie, l. c.).

(2) Si veda l'aggiunta del sig. Klein alla fine di una Nota *Zur Theorie der algebraischen Functionen mehrerer complexen Variabeln*, del sig. Nöther (Göttinger Nachrichten, 1869); cfr. pure Caporali, *Sui complessi e sulle congruenze di 2° grado*. Memorie dell'Accad. dei Lincei 1877-78.

(3) Siffatta rappresentazione di una tale superficie F è stata data dal sig. Segre, Math. Ann. Bd. 24.

« Dunque:

« *a*) La V^4 può rappresentarsi su S_3 mediante il sistema lineare ∞^5 di superficie cubiche che ha una quintica base di genere *virtuale due*, intersezione parziale di una quadrica (spezzata o no) con una superficie cubica non spezzata. Una tale quintica base individua sempre da sola il sistema rappresentativo della V^5 (purchè per certe degenerazioni molto singolari di essa s'intenda convenientemente il passaggio per essa delle superficie cubiche).

« § 4. Procediamo a considerare le varietà V^n d'ordine $n > 4$.

« Una superficie F sezione della V^n con un iperpiano generico è razionale e può rappresentarsi sul piano

1°) o con un sistema lineare di cubiche avente $9 - n$ punti base $(n \leq 9)$;

2°) o, per $n = 8$, anche con un sistema lineare di quartiche con due punti base doppi (1).

« Le due specie di superficie F corrispondenti ai due modi di rappresentazione indicati, danno luogo a due specie di varietà V^n (dove $n \leq 9$) che diremo risp. di 1ª e 2ª *specie*.

« Consideriamo dapprima le V^n di 1ª specie. E osserviamo anzitutto che su V^n si può scegliere (in infiniti modi) una curva irreduttibile C d'ordine $n - 3$, razionale normale in S_{n-3}, dalla quale la V^n viene proiettata univocamente sopra un S_3 (contenuto nello S_{n+1} di V^n); basta infatti considerare sopra una superficie F sezione iperplanare generica di V^n, la curva C rappresentata da una delle ∞^{n-4} coniche del piano rappresentativo di F passanti pei $9 - n$ punti base delle cubiche immagini delle sue curve sezioni; invero da una tale C la F viene proiettata univocamente sopra un piano, e quindi altrettanto avviene per ogni altra sezione iperplanare generica di V^n per essa. Si noti ancora che l'immagine della curva C sul piano rappresentativo di F, su cui F è rappresentata per proiezione (da C), deve essere una conica irreduttibile se $n > 6$ affinchè la C sia irreduttibile; invece per $n \leq 6$ ogni conica di quel piano pei $9 - n$ punti base del sistema rappresentativo di F potrebbe essere spezzata in una retta fondamentale ed in un'altra retta qualunque, dove quest'ultima rappresenterebbe una C irreduttibile su F.

« Proiettando la V^n sopra un S_3 di S_{n+1} dalla curva C scelta su di essa, si ottiene la rappresentazione punto per punto di V^n su S_3; le sezioni iperplanari di V^n per C vengono proiettate univocamente sui piani di S_3; le sezioni iperplanari generiche di V^n vengono proiettate (ciascuna dagli $n - 3$ punti che essa ha su C) in superficie cubiche L; le curve sezioni di V^n, d'ordine n, vengono proiettate da C in curve d'ordine n intersezioni

(1) Del Pezzo, *Sulle superficie dello n° ordine immerse nello spazio di n dimensioni.* Circolo Matematico di Palermo t. I. Cfr. anche Guccia, *Sulla riduzione dei sistemi lineari di curve ellittiche* ecc. (ibidem).

variabili delle superficie cubiche L; tutte le L hanno dunque comune una curva base k d'ordine $9 - n$:

« Nella stabilita rappresentazione di V^n su S_3, alla curva proiettante C corrisponde in S_3 una quadrica residua di ciascun piano rispetto al sistema delle L, la quale deve quindi contenere la curva-base k del sistema; questa quadrica Q sega un piano generico di S_3 (rappresentativo di una sezione iperplanare per C) secondo una conica (immagine della C in quanto appartiene a tale sezione), perciò se $n > 6$ essa è certo irreduttibile tale essendosi supposta la C.

« In un punto generico della C vi è un S_3 tangente alla V^n; per esso e per la C passa un S_{n-1} che sega secondo una retta lo S_3 rappresentativo: tali rette immagini dei punti generici di C appartengono alla quadrica Q, e la generano intieramente ove essa sia irreduttibile: se invece la Q si spezza in due piani ($n \leqq 6$), uno di questi è il luogo delle nominate rette, l'altro corrisponde invece ad un punto doppio di V^n su C, e poichè quest'ultimo piano è immagine di un punto su V^n, l'intersezione di esso colle superficie cubiche L è fissa, ossia è una linea di 3° ordine facente parte della curva base k, la quale adunque risulta d'ordine $\geqq 3$. Questo fatto (che si verifica anche considerando la rappresentazione d'una sezione iperplanare di V^n sopra il piano corrispondente di S_3) prova nuovamente che se Q si spezza, mentre C è irreduttibile, deve essere $n \leq 6$. Il ragionamento va anche per $n = 4$.

« Possiamo dunque affermare che:

« Proiettando una varietà V^n di 1ª specie ($n > 3$) su S_3 da una sua curva irreduttibile C razionale normale d'ordine $n - 3$, la varietà V^n viene rappresentata biunivocamente sullo S_3 mediante un sistema lineare di superficie cubiche L aventi comune una curva base k d'ordine $9 - n$ appartenente ad una quadrica Q: la Q può spezzarsi soltanto per $n \leq 6$, ed in questo caso uno dei piani in cui si spezza contiene una linea di 3° ordine facente parte di k (cioè base pel sistema delle L).

« Se e quando la nominata curva k determini da sola (come curva base) il sistema delle L, o pur no, e quali sieno i tipi di sistemi lineari di superficie cubiche L rappresentativi di varietà V^n, che ne derivano, è una questione che verrà trattata in una prossima Nota dove sarà presa in esame anche la rappresentazione delle V^s di 2ª specie ».