ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1894

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME III.

1° SEMESTRE

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1894

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 giugno 1894.

F. Brioschi Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica. — *Alcune osservazioni sulla teoria dei motori elettrici* (1). Nota del Corrispondente G. B. Favero.

Parte II. — *Motore proposto dal prof. G. Ferraris. Deduzioni generali.*

« *Motore proposto dal prof. G. Ferraris.* — Nel motore ultimamente proposto dal prof. G. Ferraris si ha pure un campo magnetico fisso di direzione, alternante, bipolare, per cui porremo anche in questo caso

$$h = \mathrm{H} \operatorname{sen} \omega t$$

« La corrente che genera il campo è quella stessa che percorre l'armatura, od è un'altra corrente alternata di eguale periodo. Supporremo l'armatura ridotta ad un semplice circuito circolare di area A, nel quale per fissare le idee, la corrente circoli in modo, che quando φ è compreso fra O e $\frac{\pi}{2}$, il momento che ne risulta tenda a diminuire l'angolo φ, produca cioè un momento negativo, e porremo perciò l'intensità della corrente nel circuito

$$i = -\mathrm{H}' \operatorname{sen} (\omega t + \psi)$$

tenendo conto colla ψ di un eventuale spostamento di fase. Supponiamo che il circuito ruoti di moto uniforme nel senso degli indici d'un orologio, per cui, detta ω_1 la velocità angolare di rotazione, dovremo porre $\varphi = \varphi_0 + \omega_1 t$,

(1) Vedi pag. 418.

essendo φ_0 il valore dell'angolo φ per $t=0$. Il campo essendo fisso di direzione potremo porre $\beta=0$. Con questi valori le formole a) diventano, contando il tempo da $t_0=0$, ed essendo $\frac{d\varphi}{dt}=\omega_1$.

$$\mathrm{M} = -\mathrm{AHH'}\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathrm{sen}\,(\omega t+\psi)\cos(\varphi_0+\omega_1 t)\,,\ \mathrm{M}_m=\frac{1}{t_1}\int_0^{t_1}\mathrm{M}dt\,,\ \mathrm{L}=\mathrm{M}_m\omega_1$$

« Si vede senz'altro che il momento M si annulla per una tripla serie di valori equidistanti, cioè per $\omega t=0,\pi,2\pi,\ldots$, per $\omega t+\psi=0,\pi,2\pi,\ldots$, e per $\varphi_0+\omega_1 t=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\ldots$, i quali ultimi corrispondono alla posizione del circuito normale alla direzione del campo. Il momento M dunque è alternatamente positivo e negativo. Che se $\psi=0$, le due prime serie di valori coincidono: le radici diventano doppie, e quindi la M per esse si annulla bensì, ma non passa da un segno all'opposto. La terza serie comprende solamente radici semplici, ed il momento M per essa è per mezza rotazione positivo, e per l'altra mezza negativo, partendo dalla posizione in cui il piano del circuito è normale alla direzione del campo.

« Esaminiamo ora il valore medio M_m. Posto

$$z=4\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathrm{sen}\,(\omega t+\psi)\cos(\varphi_0+\omega_1 t)\,,$$

risolvendo i prodotti di seni e coseni in somme e differenze abbiamo in generale

$$z=2\cos\psi\cos(\varphi_0+\omega_1 t)-\cos\{(2\omega+\omega_1)t+\psi+\varphi_0\}-\cos\{(2\omega-\omega_1)t+\psi-\varphi_0\}$$

per cui il valore di M si presenta sotto la forma

$$\mathrm{M}=\Sigma\,\mathrm{B}'\cos(\mu' t+\nu')$$

Però per i tre casi speciali $\omega_1=0$, $\omega_1=2\omega$, $\omega_1=-2\omega$, si trova rispettivamente

$$z=2\cos\varphi_0\{\cos\psi-\cos(2\omega t+\psi)\}$$
$$z=2\cos\psi\cos(2\,\omega t+\varphi_0)-\cos(4\,\omega t+\psi+\varphi_0)-\cos(\psi-\varphi_0)$$
$$z=2\cos\psi\cos(2\,\omega t-\varphi_0)-\cos(\psi+\varphi_0)-\cos(4\,\omega t+\psi-\varphi_0)$$

Ora si ha

$$\mathrm{M}_m=-\frac{\mathrm{AHH'}}{4t_1}\int_0^{t_1}z\,dt$$

e coi vari valori della z procedendo alle integrazioni, ed osservando che l'espressione

$$\frac{1}{t_1}\int_0^{t_1}\cos(\mu' t+\nu')\,dt$$

quando μ' sia diverso da zero, converge verso zero col crescere indefinito di t_1, otterremo per il caso di regime, e per un valore qualunque di ω_1 diverso dai tre speciali suddetti

$$M_m = 0$$

Invece per $\omega_1 = 0$

$$M'_m = -\frac{AHH' \cos \varphi_0 \cos \psi}{2}$$

e per $\omega_1 = \pm 2\omega$, rispettivamente

$$M''_m = \frac{AHH'}{4} \cos (\varphi_0 \mp \psi)$$

Il momento medio è dunque nullo in generale: non lo è per $\omega_1 = 0$, ed $\omega_1 = \pm 2\omega$. Ne viene che l'apparecchio non può dare o ricevere lavoro, se non nel caso che la velocità ω_1 di rotazione dell'armatura sia tale da compiere due giri interi, in senso positivo o negativo, nel periodo di una alternazione del campo. Come motore è dunque un motore sincrono.

« La condizione del sincronismo porta però di conseguenza, che al principio di ogni alternazione l'armatura avrà sempre rispetto alla direzione del campo la stessa posizione, fissata dall'angolo φ_0, il quale entra nel valore di M_m per il fattore cos $(\varphi_0 \mp \psi)$. Risulta da ciò che il motore, ruotando con velocità doppia del campo, darà un lavoro tanto minore, quanto più l'angolo φ_0 sia vicino al valore $\frac{\pi}{2} \pm \psi$.

« Quando l'armatura è in quiete, cioè per $\omega_1 = 0$, e non sia contemporaneamente anche $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, la M_m non è nulla, dunque il motore comincia a muoversi da sè col momento M'_m sopra trovato. Se, stabilito l'andamento sincrono di regime con un dato valore di $\varphi_0 - \psi$, supposto compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, la velocità dell'armatura viene rallentata per momentaneo sopracarico, l'angolo φ_0 tenderà a diminuire e quindi il momento M''_m ad aumentare, e con questo aumento potrà esser vinto il sopracarico. Il motore avrà dunque in queste condizioni un andamento stabile. Non così se l'angolo di regime fosse negativo, numericamente minore di $\frac{\pi}{2}$: esso dovrà allora essere modificato per ottenere la stabilità.

« Anche questo motore, atteso il cambiamento di segno a cui è soggetta la M durante la rotazione, dovrà, come il precedente, essere dotato di masse che funzionano da volante.

« *Deduzioni generali.* — Il motore Thomson-Brown sopra considerato è asincrono, mentre quello proposto dal prof. Ferraris è un motore sincrono. Ora può domandarsi quale sia il carattere analitico che distingue queste due specie di motori; e su questo argomento faremo ora alcune riflessioni.

« L'espressione del momento M tanto nell'uno che nell'altro motore risulta, prescindendo da un fattore costante, dal prodotto dei tre fattori h, i, $\cos(\varphi_0 + \omega_1 t)$, tutti e tre funzioni alternanti del tempo. Sviluppando questo prodotto in seni e coseni di somme e differenze d'archi, per il motore Thomson-Brown si ebbe la forma generale, qualunque sia ω_1,

$$d) \qquad M = C + \Sigma B \operatorname{sen}(\mu t + \nu)$$

dove C è una quantità indipendente dal tempo. Per il motore Ferraris si ottenne invece la forma generale, qualunque sia ω_1,

$$M = \Sigma B' \cos(\mu' t + \nu')$$

dove manca la quantità indipendente dal tempo. Solo per valori speciali di ω_1 la C nel primo motore sparisce, mentre per valori pure speciali di ω_1 la M del secondo motore prende la forma d), cioè contiene un termine indipendente dal tempo. Dunque nel motore Thomson-Brown il termine C indipendente dal tempo *esiste* per ogni valore di ω_1, eccettuati valori speciali: nel motore Ferraris il termine C *manca* per ogni valore di ω_1, eccettuati valori speciali.

« Ora la media M_m si ha dall'integrale $\int_0^{t_1} M dt$ diviso per t_1. Ma, come fu sopra osservato, le espressioni

$$\frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} \operatorname{sen}(\mu t + \nu) dt \quad , \quad \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} \cos(\mu' t + \nu') dt ,$$

dove μ e μ' siano diverse da zero, tendono a zero col crescere indefinito di t_1, e sono quindi senza influenza sul valore della media M_m: questa dipenderà dunque unicamente dal termine costante C. Se questo è nullo, sarà nulla la media, cioè non si avrà nè dinamo nè motore; se il termine C non è nullo si avrà dinamo o motore. Nel motore Thomson-Brown la C, al variare di ω_1, non è nulla: essa lo è solo per valori speciali di ω_1. Dunque questo motore *possiede* il carattere di macchina attiva per valori qualunque di ω_1; lo *perde* solo per valori speciali di ω_1. Nel motore Ferraris invece la C, al variare di ω_1, è sempre nulla: solo non lo è per valori speciali di ω_1. Dunque questo motore *manca* del carattere di macchina attiva per valori qualunque di ω_1; lo *acquista* solo per valori speciali di ω_1.

« Il carattere analitico adunque che distingue queste due specie di motori è il seguente: Se nell'espressione del momento M, sviluppata in somme e differenze di seni e coseni, si ha un termine C indipendente dal tempo, termine che può annullarsi solamente per valori speciali della velocità angolare ω_1 dell'armatura, il motore è asincrono. Se invece non si ha un termine C indipendente dal tempo, salvo che per valori speciali di ω_1, il motore è sincrono: e precisamente sono questi speciali valori di ω_1 che determinano la velocità da darsi all'armatura, perchè l'apparecchio funzioni.

« Queste considerazioni si possono generalizzare. Manteniamo il concetto fondamentale sopra esposto di un circuito ruotante in un campo magnetico. Se allora si considera solamente un tempo limitato si ha sempre in generale, qualunque possa essere la variabilità del campo e della corrente del circuito, una dinamo od un motore, non potendo essere che affatto eccezionale il caso che l'integrale $\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{M}dt$ sia nullo per ogni valore di t_1. Se però si considera un tempo indeterminato e l'apparecchio debba funzionare regolarmente in uno stato di regime, senza limitazione di tempo, allora tanto l'intensità e la direzione del campo magnetico, quanto l'intensità della corrente nel circuito, ed il suo movimento di rotazione devono essere funzioni periodiche del tempo, o funzioni analoghe alle periodiche. Tali funzioni saranno dunque praticamente rappresentabili con un numero finito di termini simili a quelli delle serie di Fourier. Potremo cioè assumere per M l'espressione

$$\mathrm{M} = \mathrm{A}hi \cos(\varphi - \beta)$$

delle formole a), ed esprimere le h ed i scrivendo

$$e)\qquad \begin{cases} h = \mathrm{H} + \Sigma\mathrm{P} \operatorname{sen}(pt + \psi) + \Sigma\mathrm{Q} \cos(p't + \psi') \\ i = \mathrm{I} + \Sigma\mathrm{P}' \operatorname{sen}(qt + \chi) + \Sigma\mathrm{Q}' \cos(q't + \chi') \end{cases}$$

dove H ed I sono indipendenti dal tempo. Volendo poi comprendere anche il caso di un campo rotatorio, supporremo che le φ e β siano funzioni lineari del tempo $\varphi = \omega' t + \varphi'_0$, $\beta = \omega'' t + \varphi''_0$, e posto $\omega' - \omega'' = \omega$, $\varphi_0' - \varphi_0'' = \varphi_0$, avremo $\varphi - \beta = \omega t + \varphi_0$.

« Conveniamo ora di dire, per brevità di linguaggio, che una funzione qualunque del tempo possiede il periodo p, diverso da zero, quando essa contenga un termine della forma $\mathrm{P} \operatorname{sen}(pt + \psi)$, oppure $\mathrm{Q} \cos(pt + \psi)$, essendo le $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \psi$ indipendenti dal tempo; e che essa possiede il periodo zero quando essa contenga un termine totalmente indipendente dal tempo. E siccome $\operatorname{sen}(pt + \psi) = - \operatorname{sen}(-pt - \psi)$, $\cos(pt + \psi) = \cos(-pt - \psi)$, così il dire che una funzione possiede il periodo p, oppure il dire che possiede il periodo $-p$, sarà la stessa cosa.

« Ciò premesso, siccome i prodotti $\operatorname{sen} x \cos y$, $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$, $\cos x \cos y$ si risolvono in somme e differenze di seni e coseni di $x + y$ e di $x - y$, ne viene che se due funzioni F, F′ del tempo possiedono rispettivamente i periodi p e q, il prodotto FF′ possiederà i periodi $p + q$ e $p - q$. Se dunque la funzione h possiede i periodi $o, p_1, p_2, \ldots, p'_1, p'_2, \ldots$, e la funzione i possiede i periodi $o, q_1, q_2, \ldots, q'_1, q'_2, \ldots$, il prodotto hi sarà dotato dei periodi $o, p, q, p \pm q$; intendendo per p e q due qualunque dei periodi rispettivi delle h ed i. Il prodotto $hi \cos(\omega t + \varphi_0)$, ossia il momento M, sarà perciò dotato dei periodi $\omega, p \pm \omega, q \pm \omega, (p \pm q) \pm \omega$. Questo momento dunque sarà in generale, cioè per un valore qualunque di ω, privo di periodi nulli, ossia mancherà di costanti C, e potremo asserire:

A) Facendo ruotare con velocità angolare qualunque, senza limitazione di tempo, in un campo magnetico costante o periodicamente variabile, fisso o rotatorio, un circuito nel quale scorra una corrente elettrica d'intensità costante o periodicamente variabile, non si ha in generale nè dinamo nè motore.

« Se però i periodi ω' ed ω'', che fissano la legge di rotazione del circuito e del campo siano tali, o si scelgano in modo, che sia verificata una delle equazioni $\omega = \omega' - \omega'' = 0$, $p \pm \omega = 0$, $q \pm \omega = 0$, $(p \pm q) \pm \omega = 0$, per qualche periodo o coppia di periodi p e q, allora si avranno in generale una o più costanti C, e si otterrà un apparecchio sincrono, se con tal nome vogliamo indicare un apparecchio dove la velocità di rotazione ω' è subordinata ad un legame lineare coi periodi ω'', p e q, e potremo dire:

B) Se nel campo magnetico accennato ad *A*) il circuito non si fa ruotare con velocità angolare qualunque, ma con una speciale velocità angolare, si ha in generale una dinamo od un motore. La speciale velocità angolare a ciò necessaria dipende linearmente dalla durata dei periodi spettanti al campo ed alla corrente nel circuito.

« Se anche soddisfacendo al legame lineare fra la ω' e le ω'', p e q la costante C o la somma algebrica delle costanti C si annulla, l'apparecchio resterà tuttavia inattivo.

« Che se i periodi p e q siano tali che per uno o più di essi si verifichi alcuna delle equazioni $p \pm \omega = 0$, $q \pm \omega = 0$, $(p \pm q) \pm \omega = 0$ per un valore qualunque di ω, allora la costante (o le costanti) C esisteranno in generale per qualunque ω, ossia per qualunque $\omega' - \omega''$, e si avrà un apparecchio asincrono. Siccome però affinchè sia $p \pm \omega = 0$, $q \pm \omega = 0$, $(p \pm q) \pm \omega = 0$ per qualunque ω, dev'essere $p = \mp \omega$, $q = \mp \omega$, $p \pm q = \mp \omega$, ne viene che non si può avere un apparecchio asincrono, altrochè nel caso che il prodotto hi presenti il periodo $\omega' - \omega''$, cioè contenga dei termini della forma $\mathrm{P} \operatorname{sen} \{(\omega' - \omega'')t + \psi\}$, $\mathrm{Q} \cos \{(\omega' - \omega'')t + \psi\}$.

« Questo caso si avvera sempre qualora le correnti nel circuito ruotante siano quelle indotte dal campo. Infatti in tal caso la forza elettromotrice nel circuito è data da $\mathrm{E} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$, essendo Φ il flusso, che ha per valore $\Phi = \mathrm{A}h \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$. Dunque il flusso e quindi la forza elettromotrice avranno i periodi ω, $p \pm \omega$, e gli stessi periodi spetteranno quindi all'intensità i. Dunque il prodotto hi avrà i periodi ω, $p \pm \omega$, $p \pm (p \pm \omega)$, ossia ω, $p + \omega$, $p - \omega$, $2p + \omega$, $2p - \omega$, e quindi il momento M avrà in generale i periodi

$$o\,, p\,, 2p\,, 2\omega\,, p + 2\omega\,, p - 2\omega\,, 2p + 2\omega\,, 2p - 2\omega\,.$$

« Che se nella h fosse $H = 0$, i periodi sarebbero

$$0\,,\ 2p\,,\ 2\omega\,,\ 2p + 2\omega\,,\ 2p - 2\omega$$

« Vi sono adunque in ogni caso delle costanti C indipendenti dal tempo nel valore di M, e queste in generale non si annulleranno che per valori speciali di ω. Possiamo dunque dire:

C) Facendo ruotare con velocità angolare qualunque, senza limitazione di tempo, in un campo magnetico costante o periodicamente variabile, fisso o rotatario, un circuito nel quale scorra una corrente elettrica indotta dal campo, si ha in generale una dinamo od un motore.

« Se però per speciali valori di ω la somma algebrica delle costanti C dovesse annullarsi, l'apparecchio per quei valori perde la sua qualità di dinamo o motore. Può però anche darsi che per altri valori speciali di ω. alle costanti C inerenti al sistema per qualunque ω, altre se ne aggiungano dovute al sincronismo. In tal caso aumenta il numero delle costanti C, ed i valori di M corrispondenti costituiscono delle discontinuità nella M considerata come funzione di ω.

« Colle norme generali precedenti diventa facile decidere sulla natura dei motori Thomson-Brown e Ferraris sopra esaminati. Nel primo si ha il campo $h = H \operatorname{sen} \omega t$, che ha il periodo ω; il flusso $\Phi = Ah \operatorname{sen}(\omega_1 t + \varphi_0)$ ha i periodi $\omega + \omega_1$, $\omega - \omega_1$, e questi stessi periodi spettano quindi alla forza elettromotrice ed all'intensità i. Il prodotto hi avrà dunque i tre periodi ω_1, $2\omega + \omega_1$ $2\omega - \omega_1$, e perciò il momento M, atteso il fattore $\cos(\omega_1 t + \varphi_0)$ avrà i cinque periodi 0, 2ω, $2\omega_1$, $2\omega + 2\omega_1$, $2\omega - 2\omega_1$. Vi è dunque una costante C nel valore di M, ed il motore è asincrono. Nel motore Ferraris il campo $h = H \operatorname{sen} \omega t$ ha il periodo ω; l'intensità i sincrona al campo ha pure il periodo ω; dunque il prodotto hi ha i due periodi 0, 2ω: quindi il momento M ha i tre $2\omega + \omega_1$, $2\omega - \omega_1$, ω_1. Manca dunque lo zero, ossia la costante, ed il motore non può essere che sincrono: ed infatti per avere periodi nulli bisogna porre $2\omega + \omega_1 = 0$, $2\omega - \omega_1 = 0$, ossia assumere la velocità angolare $\omega_1 = \pm 2\omega$.

« Quanto al concetto fondamentale di un circuito ruotante, mantenuto fin qui, giova osservare che al concetto ristretto di una circonferenza ruotante intorno ad un suo diametro normale alla direzione del campo magnetico, può sostituirsi un concetto più generale senza pregiudizio delle deduzioni sopra formulate. Infatti la circonferenza fin qui considerata sostituisce un magnete; ma per fare tale sostituzione non occorre una circonferenza completa, basta anche una parte di circonferenza, un arco limitato, in cui si supponga esistere una corrente. Un certo numero di tali archi limitati, anche se i loro piani non passano per l'asse di rotazione, od i loro centri non cadono nell'asse stesso, equivarranno sempre ad altrettanti magneti, le cui direzioni passeranno per i centri degli archi e saranno normali ai piani degli archi stessi. Queste direzioni saranno invariabili le une rispetto alle altre, qualora gli archi mantengano pure inalterata la loro posizione rispettiva durante la rotazione. L'intensità dei poli dei singoli magneti sarà variabile colla variabilità delle correnti che percorrono gli archi corrispondenti. L'azione del campo sui poli di questi magneti produrrà un momento intorno all'asse di rotazione: tale momento sarà la somma dei momenti dovuti ai poli di tutti i magneti rispetto all'asse stesso.

« Se si assume quest'asse di rotazione come asse delle z, e si considera un polo P, spettante ad uno dei magneti, e siano al tempo t, x, y, z le coordinate di P, i l'intensità della corrente nell'arco corrispondente, X, Y, Z le componenti dell'intensità del campo nel punto P, il momento di rotazione intorno all'asse delle z dovuto al polo P, sarà espresso da $\alpha(\mathrm{Y}ix - \mathrm{X}iy)$, essendo α una costante relativa al polo P, ed in coordinate polari $\alpha\varrho(\mathrm{Y}i \cos\vartheta - \mathrm{X}i \operatorname{sen}\vartheta)$, e per tutti i poli insieme

$$\mathrm{M} = \Sigma\alpha\varrho\,(\mathrm{Y}i \cos\vartheta - \mathrm{X}i \operatorname{sen}\vartheta)$$

Se ora supponiamo che le X, Y, Z come pure le i siano funzioni periodiche del tempo, e sia, per la rotazione uniforme, $\vartheta = \omega t + \varphi_0$, ne dedurremo che tutti i termini componenti la M ricadono nella forma

$$hi \cos(\varphi - \beta)$$

sopra considerata; e ciò con una maggiore generalità relativa alla rotazione del campo, che non solo può essere rotatorio nel piano, ma rotatorio nello spazio, avendo ammessa la periodicità di tutte e tre le X, Y, Z.

« Notiamo come eccezione il caso, che si abbia in ogni tempo $\mathrm{M} = 0$, come quando p. e. siano nulle le X ed Y, cioè la direzione del campo costantemente parallela alle z.

« La trovata espressione più generale del momento M ci permette di sostituire al circuito circolare sopra considerato, un circuito comunque conformato od un sistema di circuiti qualunque, purchè tale sistema ruotando non si deformi, ma mantenga inalterate le distanze reciproche fra i propri punti. Infatti un circuito qualunque o sistema di circuiti, può intendersi sempre suddiviso in archetti infinitesimi, e questi possono essere rimpiazzati dagli archetti infinitesimi dei relativi circoli osculatori; per cui il circuito qualunque o sistema di circuiti, equivarrà sempre ad un sistema determinato di magneti infinitesimi, di posizione rispettiva fissa, ed i cui poli, d'intensità periodicamente variabile, ruoteranno intorno all'asse delle z in circoli aventi i centri nell'asse stesso.

« Nelle superiori proposizioni A), B) e C) possiamo dunque alla parola circuito attribuire il senso di circuito qualunque, anche non circolare, o sistema di circuiti qualunque.

« Fra gli apparecchi dotati di tali circuiti molteplici meritano speciale attenzione quelli che sono più o meno esattamente simmetrici rispetto a qualunque piano passante per l'asse di rotazione. Per tali apparecchi può avvenire, se si prescinde dalle correnti indotte dal campo, che il momento M riesca nullo qualunque sia il valore del tempo t. Tali apparecchi in simili condizioni non sono naturalmente nè motori nè dinamo. Ma possono però diventare facilmente l'uno o l'altro, qualora col mezzo di commutatori od altrimenti s'introduca una discontinuità nel prodotto hi spettante ai singoli circuiti costituenti il circuito molteplice, come più sotto si dirà, parlando della mutazione di apparecchi sincroni in apparecchi asincroni.

« Se si tien conto delle correnti i indotte dal campo, anche gli apparecchi con armatura simmetrica rispetto ad ogni piano passante per l'asse, possono possedere un momento M diverso da zero, come sopra si è trovato per il motore Thomson-Brown, calcolando il momento M', dovuto ad un numero N di circuiti uniformemente distribuiti intorno all'asse di rotazione. Il motore proposto dal Ferraris perderebbe invece ogni proprietà di apparecchio attivo, se vi si considerassero moltissimi anelli disposti uniformemente come i meridiani di una sfera, e non fosse dotato di alcuna disposizione di discontinuità.

« Nella prima parte di questa Nota si è accennato alla possibilità di una discontinuità sia nella funzione h rappresentante il campo, sia nel momento m del magnete a cui equivale il circuito percorso dalla corrente elettrica d'intensità i; discontinuità che potrà intendersi anche limitata alle derivate prime di h e di m rispetto al tempo. La discontinuità in queste funzioni produrrà in generale discontinuità anche nel prodotto hm, cioè nel prodotto hi. Fra i casi di discontinuità merita attenzione quello in cui essa abbia luogo periodicamente, e precisamente in dipendenza dell'angolo $\varphi - \beta$, delle formole a), in modo da ripetersi tutte le volte che il circuito rotante riprende la stessa posizione rispetto alla direzione del campo.

« Si può dimostrare che coll'introdurre opportunamente una discontinuità di tal genere, un apparecchio sincrono può convertirsi in apparecchio asincrono.

« A tale scopo premetteremo alcune relazioni analitiche. Sono note le formole

$$\alpha = \operatorname{sen} u + \operatorname{sen} 2u + \ldots + \operatorname{sen} mu = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} mu \operatorname{sen} \frac{1}{2}(m+1)u}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u}$$

$$\beta = 1 + \cos u + \cos 2u + \ldots + \cos mu = \frac{\cos \frac{1}{2} mu \operatorname{sen} \frac{1}{2}(m+1)u}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u}$$

le quali valgono per u qualunque, e per m intero e finito. Cercando il limite a cui tendono le espressioni $\frac{\alpha}{m+1}, \frac{\beta}{m+1}$ quando m cresce indefinitamente, si trova facilmente per la prima espressione

$$\lim \frac{\alpha}{m+1} = 0 \text{ , qualunque sia } u$$

Per la seconda invece bisogna distinguere i valori di u espressi da $u = 2k\pi$, dove k è un numero intero o nullo, dagli altri valori. Se $u = 2k\pi$ si ha

$$\lim \frac{\beta}{m+1} = 1 \text{ , mentre } \lim \frac{\beta}{m+1} = 0 \text{ , per gli altri valori.}$$

Se si pone

$$\alpha' = \operatorname{sen} \delta + \operatorname{sen} (\delta + u) + \operatorname{sen} (\delta + 2u) + \ldots + \operatorname{sen} (\delta + mu)$$

$$\beta' = \cos \delta + \cos (\delta + u) + \cos (\delta + 2u) + \ldots + \cos (\delta + mu)$$

sarà $\alpha' = \beta \operatorname{sen} \delta + \alpha \cos \delta$, $\beta' = \beta \cos \delta - \alpha \operatorname{sen} \delta$, e quindi

$$\lim \frac{\alpha'}{m+1} = \operatorname{sen} \delta \text{ , } \lim \frac{\beta'}{m+1} = \cos \delta \text{ , per } u = 2\,k\,\pi$$

$$\lim \frac{\alpha'}{m+1} = 0 \quad \text{ , } \lim \frac{\beta'}{m+1} = 0 \quad \text{ , per gli altri valori di } u.$$

Ciò premesso poniamo

$$\varepsilon = \sum_{i=0}^{i=m} \int_{a+ic}^{b+ic} \operatorname{sen} (\lambda t + \delta) dt \quad , \quad \eta = \sum_{i=0}^{i=m} \int_{a+ic}^{b+ic} \cos (\lambda t + \delta) dt$$

dove m sia un numero intero positivo finito, λ sia diversa da zero, a, b, c, δ siano quantità finite qualunque, escluso però il caso $c = b - a$, che ridurrebbe le espressioni ad un solo integrale. Cerchiamo i valori di

$$l_s = \lim \frac{\varepsilon}{m+1} \text{ e di } l_c = \lim \frac{\eta}{m+1} \text{ per } \lim . m = \infty$$

Sviluppate le integrazioni e tenuto conto delle formole superiori, si trova

$$l_s = \frac{1}{\lambda} \left\{ \cos (\lambda a + \delta) - \cos (\lambda b + \delta) \right\} , \; l_c = \frac{1}{\lambda} \left\{ \operatorname{sen} (\lambda b + \delta) - \operatorname{sen} (\lambda a + \delta) \right\} ,$$

$$\text{per } \lambda c = 2k\pi \text{ . Invece } l_s = 0 \text{ , } l_c = 0 \text{ , per gli altri valori di } \lambda c.$$

Se $\lambda = 0$, mantenute le condizioni superiori per le altre quantità, si ha, com'è d'altronde evidente,

$$l_s = (b - a) \operatorname{sen} \delta \quad , \quad l_c = (b - a) \cos \delta$$

Da questi risultati, ponendo per brevità

$$P_s = \operatorname{sen} (\lambda t + \delta) \cos (\omega t + \varphi_0) \quad , \quad P_c = \cos (\lambda t + \delta) \cos (\omega t + \varphi_0)$$

$$Z = \sum_0^m \int_{a+ic}^{b+ic} P_s \, dt \quad , \quad \Theta = \sum_0^m \int_{a+ic}^{b+ic} P_c \, dt$$

e decomponendo i prodotti di seni e coseni in somme di seni e coseni, applicando le formole superiori, si otterranno i valori di

$$L_s = \lim . \frac{Z}{m+1} \quad , \quad L_c = \lim . \frac{\Theta}{m+1}$$

Questi valori riescono diversi secondo che si abbia o meno $\lambda + \omega = 0$, $\lambda - \omega = 0$, $(\lambda + \omega) c = 2k\pi$, $(\lambda - \omega) c = 2k'\pi$, essendo k, k' numeri interi o nulli. La determinazione di L_s ed L_c nei diversi casi non presenta, coll'aiuto delle formole superiori, alcuna difficoltà. Per lo scopo del presente studio ci limiteremo al caso, in cui la c abbia il valore $c = \frac{2\pi}{\omega}$; e posto $\lambda = j\omega$, escluso il valore $j = 0$, e scrivendo per brevità

$$S_g = \delta + \varphi_0 + g\omega \quad , \quad D_g = \delta - \varphi_0 + g\omega$$

otterremo:

1) Per $j = +1$,
$$L_s = \frac{1}{4\omega}(\cos S_{2a} - \cos S_{2b}) + \frac{b-a}{2} \operatorname{sen} D_0 \;,$$

$$L_c = \frac{1}{4\omega}(\operatorname{sen} S_{2b} - \operatorname{sen} S_{2a}) + \frac{b-a}{2} \cos D_0$$

1) Per $j = -1$,
$$L_s = \frac{1}{4\omega}(\cos D_{-2b} - \cos D_{-2a}) + \frac{b-a}{2} \operatorname{sen} S_0$$

$$L_c = \frac{1}{4\omega}(\operatorname{sen} D_{-2a} - \operatorname{sen} D_{-2b}) + \frac{b-a}{2} \cos S_0$$

3) Per j intero, numericamente diverso dall'unità,

$$L_s = \frac{1}{2(j+1)\omega}(\cos S_{(j+1)a} - \cos S_{(j+1)b}) + \frac{1}{2(j-1)\omega}(\cos D_{(j-1)a} - \cos D_{(j-1)b})$$

$$L_c = \frac{1}{2(j+1)\omega}(\operatorname{sen} S_{(j+1)b} - \operatorname{sen} S_{(j+1)a}) + \frac{1}{2(j-1)\omega}(\operatorname{sen} D_{(j-1)b} - \operatorname{sen} D_{(j-1)a})$$

4) Per j non intero $\qquad L_s = 0 \;, \quad L_c = 0$

« Si vede dunque che questi limiti sono nulli in generale, ed acquistano un valore finito solamente per valori speciali di ω, cioè quando ω sia numericamente eguale o summultiplo di λ.

« Premesse queste relazioni analitiche, ritorniamo alle funzioni h ed i, date in forma generale dalle e), e rendiamo il loro prodotto hi discontinuo, in dipendenza dall'angolo $\varphi - \beta$, ossia $\omega t + \varphi_0$, come sopra si disse. E per fissare le idee posto per brevità $hi = v$, limitandoci a due soli valori per una circonferenza, facciamo che quel prodotto sia espresso da $hi = v_1$ dal momento in cui l'angolo $\omega t + \varphi_0$ è eguale ad α_0 fino a quando esso diventa eguale a β_0; e sia invece espresso da $hi = v_2$ per il rimanente della circonferenza, cioè da quando l'angolo $\omega t + \varphi_0$ è eguale a β_0 fino a che diventa eguale ad $\alpha_0 + 2\pi$; riprendendo poi nelle successive rotazioni alternatamente le espressioni v_1 e v_2. Per ottenere la media del momento M in tal caso, estenderemo l'integrale $\int M dt$ dal tempo t_0 in cui l'angolo $\omega t + \varphi_0$ è eguale ad α_0 fino al tempo t_1 in cui esso diventa eguale ad $\alpha_0 + 2(m+1)\pi$, essendo m un numero grande, comprendendo così un gran numero di rivoluzioni.

« Durante la prima rivoluzione l'espressione v_1 vale dal tempo t_0 fino ad un tempo t' tale che l'angolo $\omega t + \varphi_0$ diventi eguale a β_0, l'espressione v_2 invece dal tempo t' fino ad un tempo t'' tale che l'angolo $\omega t + \varphi_0$ diventi eguale ad $\alpha_0 + 2\pi$. Similmente per le rivoluzioni seguenti. L'integrale complessivo $\int M dt$ fra t_0 e t_1 si esprime dunque come segue

$$f)\qquad \int_{t_0}^{t_1} M dt = A \sum_0^m \int_{t_0+ic}^{t'+ic} v_1 \cos(\omega t + \varphi_0) dt + A \sum_0^m \int_{t'+ic}^{t''+ic} v_2 \cos(\omega t + \varphi_0) dt$$

dove l'intervallo c dovrà esser tale che $t_0 + c = t''$; e $t'' + mc = t_1$, ed i valori dei tempi t_0, t', t'', t_1 saranno tali che $\omega t_0 + \varphi_0 = \alpha_0$, $\omega t' + \varphi_0 = \beta_0$, $\omega t'' + \varphi_0 = \alpha_0 + 2\pi$, $\omega t_1 + \varphi_0 = \alpha_0 + 2(m+1)\pi$. Da queste si deduce $c = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

« Ottenuto l'integrale $\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} M dt$ per un valore finito m, si avrà la media M_m dalla

$$M_m = \lim. \frac{\int_0^{t_1} M dt}{t_1 - t_0}\,,\quad \lim.\ t_1 = \infty$$

ossia dalla

$$M_m = \frac{\omega}{2\pi} \lim. \frac{\int_{t_0}^{t_1} M dt}{m+1}\,,\quad \lim.\ m = \infty$$

« Ora avuto riguardo alla forma generale delle funzioni h ed i, date dalla e), il loro prodotto v potrà sempre mettersi sotto la medesima forma, risolvendo al solito i prodotti di seni e coseni. Per cui possiamo scrivere

$$v_1 = C_1 + \Sigma P_1 \operatorname{sen}(\mu_1 t + \nu_1) + \Sigma Q_1 \cos(\mu'_1 t + \nu'_1)$$
$$v_2 = C_2 + \Sigma P_2 \operatorname{sen}(\mu_2 t + \nu_2) + \Sigma Q_2 \cos(\mu'_2 t + \nu'_2)$$

« Sostituendo questi valori nella f) e tenuto conto delle relazioni analitiche superiori, si arriva facilmente all'espressione

$$M_m = \frac{A(C_1 - C_2)}{2\pi} (\operatorname{sen}\beta_0 - \operatorname{sen}\alpha_0) + AK$$

supposto $C_1 - C_2 \gtrless 0$ ed indicando con K una quantità che in generale è nulla per un valore qualunque di ω, e che solo per valori speciali di ω può assumere un valore finito, a meno che nelle stesse v_1 e v_2 non sia contenuto, come sopra fu dimostrato, il periodo ω. Se escludiamo questo caso che caratterizza il motore asincrono, e sopprimiamo la discontinuità ponendo $v_2 = v_1$, e quindi anche $C_2 = C_1$, avremo

$$M_m = AK$$

cioè un apparecchio sincrono, ossia un apparecchio che darà per M_m un valore diverso da zero solamente per speciali valori di ω. Col mantenere la discontinuità invece si ha un apparecchio asincrono, poichè anche per tutti i valori di ω pei quali $K = 0$, M_m non è nullo.

« Per il motore proposto dal prof. Ferraris fu sopra osservato, che il momento M cambia di segno durante la rotazione, atteso il fattore $\cos(\omega_1 t + \varphi_0)$. Se con un commutatore s'inverte la direzione della corrente nel circuito rotante ogni volta che il piano di questo è normale alla direzione del campo, s'introduce una discontinuità. Per mezza rotazione abbiamo allora $v_1 = + hi$, per l'altra mezza $v_2 = - hi$, e sarà $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, $\beta_0 = \alpha_0 + \pi$, e quindi $\omega_1 t_0 + \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, $\omega_1 t' + \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$, $\omega_1 t'' + \varphi^0 = \frac{5\pi}{2}$, $c = \frac{2\pi}{\omega_1}$. Ma per il motore Ferraris si ha

$$hi = - HH' \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen}(\omega t + \psi)$$

dunque, sviluppando, porremo

$$v_1 = - \frac{HH'}{2}(\cos\psi - \cos(2\omega t + \psi)) \ , \quad v_2 = \frac{HH'}{2}(\cos\psi - \cos(2\omega t + \psi))$$

e quindi sarà $C_1 = - \frac{1}{2} HH' \cos\psi$, $C_2 = \frac{1}{2} HH' \cos\psi$, coi quali valori si ottiene

$$M_m = A\left(\frac{HH' \cos\psi}{\pi} + K\right) .$$

Il motore dunque mediante il commutatore da sincrono diventa asincrono.

Chimica. — *Sintesi dell'etere trimetilico della benzofloroghicina* (*metilidrocoteina o benzoilidrocotone*) Nota del Socio GIACOMO CIAMICIAN e di PAOLO SILBER.

Botanica. — *Nuove osservazioni sulla reviviscenza della Grimaldia dichotoma Raddi.* Nota del Corrispondente ORESTE MATTIROLO.

Queste due Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.