ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1894

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME III.

1° Semestre

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1894

Matematica. — *Ancora sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche* [1]. Nota di FEDERIGO ENRIQUES, presentata dal Socio CREMONA.

« § 1. Procediamo alla determinazione di tutti i sistemi lineari di superficie cubiche L ad intersezioni variabili ellittiche, che nascono dalla rappresentazione delle varietà normali V^n d'ordine $n > 4$, e di 1ª specie, ove la V^n sia rappresentata proiettandola da una sua curva irreduttibile razionale normale C d'ordine $n - 3$: tali sistemi sono completamente definiti dal gruppo base perchè rappresentativi di varietà normali.

« È opportuno avvertire che i nominati sistemi non saranno *tutti* i sistemi di superficie cubiche rappresentativi d'una V^n, ma ogni altro sistema di superficie cubiche (o d'ordine diverso) rappresentativo di una V^n dovrà ricondursi ad uno di essi con una trasformazione birazionale dello spazio.

« Inoltre se vorremo ottenere veramente sistemi *tipici* irreducibili fra loro per una trasformazione birazionale dello spazio, dovremo vedere se le differenze nei sistemi ottenuti dalla proiezione indicata di varietà V^n, provengano da differenti proprietà proiettive delle V^n stesse, o dalla differente scelta della curva proiettante C su di esse. Nel 2° caso si dovrà considerare uno solo degli ottenuti sistemi di superficie L come il *tipo* di una *classe* di sistemi di superficie ad intersezioni ellittiche (di dimensione $n + 1$ e grado n).

« § 2. Premettiamo alcuni lemmi.

« 1° *lemma*. Sopra la varietà di 1ª specie V^n, per una sua curva generica irreduttibile C razionale normale d'ordine $n - 3$,

o non passa alcun S_{n-2} segante V^n secondo una superficie,
o passa *un* S_{n-2} segante V^n secondo una superficie d'ordine $n - 3$.

« Nel 2° caso gli iperpiani per lo S_{n-2} segano V^n (fuori di esso) secondo rigate cubiche normali (ciascuna in un S_4).

« Invero poichè lo S_{n-3} della C non sega ulteriormente V^n, ove esista una superficie su V_n giacente in un S_{n-2} per C, essa sega lo S_{n-3} di C secondo la C e però ha l'ordine uguale ad $n - 3$; altrimenti quest'ordine ($< n$) sarebbe multiplo di $n - 3$ (dove $n > 4$), onde sarebbe $n = 5$ e gli iperpiani per lo S_{n-2} segherebbero su V^n infiniti piani (ciò che è assurdo). Analogamente si vede che per C non possono passare due S_{n-2} seganti V^n ciascuno secondo una superficie d'ordine $n - 3$, perchè lo S_{n-1} da essi determinato segherebbe V^n secondo una superficie (composta) d'ordine ($< n$ uguale a) $2(n - 3)$ (dove $n > 4$) onde $n = 5$, e su V^n si avrebbe un fascio di piani.

[1] Cfr. la Nota precedente pag. 481.

« Infine se su V^n vi è una superficie d'ordine $n-3$ in un S_{n-2} per C, gli iperpiani per essa segano V^n (fuori dello S_{n-2}) secondo superficie cubiche ciascuna normale in un S_4 (quindi rigata): in caso opposto sopra una superficie sezione di V^n (superficie razionale normale a sezioni ellittiche in S_n) si avrebbero infinite cubiche piane, ciò che è assurdo (1).

« § 3. 2° *lemma.* Proiettando una varietà V^n di 1ª specie da una sua curva C (irreduttibile, razionale normale d'ordine $n-3$) sopra un S_3, il sistema delle superficie cubiche L ottenute come immagini delle sezioni iperpianali di V^n

« 1°) è determinato dalla curva base K (d'ordine $9-n$) e non ha punti base doppî, se per C non passa un S_{n-2} segante V^n secondo una superficie;

« 2°) nel caso opposto ha, oltre la curva base K, un punto doppio O $(7-n+\varrho)$plo per la K dove $\varrho=0, 1, 2$: in ogni piano per O vi sono allora ϱ punti base per le L infinitamente vicini ad O.

« Suppongasi che il sistema delle L non sia determinato dalla curva base K: (allora poichè esso è determinato dal gruppo base rappresentando una varietà normale), vi è almeno un punto base per le L che impone ad esse nuove condizioni non espresse dal passaggio per K: un tal punto può essere

« 1) un punto base (multiplo cioè) doppio per le L la cui molteplicità non risulti dal passaggio per esso della K;

« 2) un punto base per le L fuori di K;

« 3) un punto base semplice per le L e per K nel quale sia assegnata una tangente diversa dalla tangente in K e quindi sia fissato il piano tangente alle L;

« 4) un punto base O doppio per le L la cui molteplicità risulti dal passaggio per esso di K, ma in cui sia assegnata una ulteriore tangente per le L (allora K avrà in O un punto triplo o quadruplo e nell'ultimo caso, possibile soltanto per $n=5$, l'ulteriore tangente fisserà il cono quadrico tangente in O alle L).

« Allora i piani per O sono immagini di superficie sezioni parziali di V^n d'ordine $< n$, e quindi per C passa un S_{n-2} ecc.

« Alla stessa conclusione si perviene supponendo l'esistenza d'un punto O base doppio per le L che sia conseguenza della curva base K, osservando che un tal punto O deve esser triplo o quadruplo per la K e che l'ultimo caso (possibile solo per $n=5$) deve escludersi giacchè 4 rette per un punto non possono costituire la curva base K determinante da sola un sistema ∞^6 di L (passando per essa ∞^7 superficie cubiche).

« Così è stabilita la 1ª parte dell'enunciato.

« Per stabilire la 2ª si noti che lo S_{n-2} per C segante V^n secondo una superficie (supposto esistente) determina sullo S_3 rappresentativo un punto O

(1) Invero si proietti la superficie in una del 4° ordine in S_4; se su questa vi è una cubica piana, vi sono anche infinite rette sezioni degli S_3 per essa.

siffatto che ogni piano per O è immagine d'una rigata cubica normale su V^n: sopra un tal piano le L segano dunque un sistema di cubiche avente un punto base doppio e due semplici; il punto base doppio (è fisso al variare del piano per O ossia) cade in O, infatti dall'ipotesi opposta si trarrebbe che esso descrive una retta base doppia per le L e ne seguirebbe che le intersezioni variabili di due L (immagini di curve sezioni di V^n) sarebbero razionali, non ellittiche come si suppone.

« Segue che il punto O è doppio per le L e $(7 - n + \varrho)$plo per la curva base K dove ecc., come è stato enunciato.

« *Osservazione.* — Giova inoltre notare che se $\varrho = 1$, il punto O è biplanare per le L e si ha in esso un piano osculatore fisso; questo si stacca dalla quadrica Q residua di ciascun piano rispetto al sistema delle L, quindi (Nota I, § 4) uno dei piani componenti Q contiene una cubica piana facente parte di K, e si ha $n \leq 6$.

« § 4. I precedenti lemmi fissano i limiti della discussione che dobbiamo compiere: vi sono 4 casi da esaminare per ogni valore di n, cioè il caso in cui il sistema delle L è determinato dalla curva base K, e quello in cui vi è inoltre un punto base doppio per le L e $(7 - n)$plo, o $(8 - n)$plo, o $(9 - n)$plo per la K (d'ordine $9 - n$).

« Cominciamo dall'ultimo caso che dà luogo a soluzioni del problema per ogni valore di n (≤ 9).

« *b*) La curva base K si compone di $9 - n$ rette per un punto base doppio O nel quale è assegnato il cono quadrico tangente alle superficie cubiche L.

« Da questa condizione nasce effettivamente (per $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$) un sistema ∞^{n+1} di superficie cubiche L rappresentativo d'una V^n, e per $n > 3$ nasce dalla effettuata proiezione della V^n da una sua curva C: per $n = 4$ il sistema rientra come caso particolare in quello *a*) del § 3 Nota I. La varietà V^n così rappresentata è un *cono* cioè ha ∞^2 rette per un punto, aventi per immagini le rette per O dello S_3 rappresentativo: lo si verificherà osservando che la sezione con V^n di un iperpiano per una tal retta è un cono giacchè una L contenente una retta generica per O (nello S_3 rappresentativo) è un cono cubico. Parimenti è facile vedere che proiettando un cono V^n da una qualunque sua curva C (d'ordine $n - 3$ ecc.) si ottiene sempre come sistema rappresentativo di V^n il sistema *b*) [1].

« Infine si osservi che il cono quadrico tangente in O alle L è la quadrica Q residua di ciascun piano rispetto al sistema, quindi può supporsi irreduttibile (tale essendo la C) per $n > 6$ (Nota I, § 4).

« § 5. Escludendo le V^n che sono coni, restano ancora 3 casi da esaminare partitamente per ogni valore di n.

(1) Donde segue subito la sua irreducibilità agli altri che verremo trovando.

« c) Sia $n = 5$. La curva base K si supponga una quartica *di 2ª specie* (genere O).

« Si ha così effettivamente l'unico sistema ∞^6 di L rappresentativo d'una V^5, che sia determinato dalla quartica base giacchè questa deve appartenere ad *una* quadrica residua di ciacun piano rispetto al sistema: un tal sistema nasce effettivamente rappresentando V^n mediante una proiezione come è stato indicato.

« Sotto la condizione di essere di 2ª specie la quartica K può degenerare, ma debbono escludersi (cioè non nascono dalla indicata proiezione di una tale V^5) i casi in cui la K porti l'esistenza d'un punto base doppio per le L (2º lemma § 3) (1).

« Le varietà V^5 rappresentate dal sistema c) non sono coni: dico che inversamente ogni V^5 che non è un cono può rappresentarsi con un sistema c).

« Si consideri la rappresentazione di una V^5 che non è un cono mediante la proiezione indicata da una C.

« Se il sistema rappresentativo di L non è quello c), le L avranno un punto base doppio O $(7 - 5 + \varrho)$plo per la curva base K, dove $\varrho = 0, 1$ (per $\varrho = 2$ V^n è un cono). Allora si consideri un piano generico per O, ed in esso una conica generica (irreduttibile) passante per O e per gli altri due punti base del sistema di L nel piano (uno dei quali è forse infinitamente vicino ad O).

« Questa conica γ rappresenta una conica su V^n per la quale non passa una quadrica a due dimensioni (contenuta in V^n), giacchè la γ non appartiene ad una quadrica per K nè ad un particolare piano per O, cui corrisponda su V^5 una quadrica. Proiettando V^5 da una tale sua conica su S_3, si rappresenta dunque V^5 mediante un (particolare) sistema c) (2º *lemma* § 3).

« § 6. Sia $n = 6$. Escludendo i coni V^6 (già esaminati), sul sistema rappresentativo della V^6 (proiettata da una sua curva C su S_3) si possono fare le tre ipotesi (§ 3):

« d) La cubica base K determina da sola il sistema delle L, e però anche *una* quadrica Q residua di ciascun piano rispetto al sistema, quindi si compone di 3 rette sghembe.

« Nasce così effettivamente un sistema ∞^7 di L rappresentativo d'una V^6, ove la V^6 sia stata proiettata ecc.

« d') Il sistema delle L ha (oltre la curva base K) un punto base doppio O, che è *semplice* per la cubica base K. Allora questa K è una cubica gobba appartenente alle ∞^2 quadriche residue dei piani per O rispetto al sistema delle L (non ad ∞^3 quadriche).

« Nasce così effettivamente un sistema ∞^7 rappresentativo d'una V^6 proiettata da una sua cubica C.

(1) Basta per ciò che la *K* si componga di 3 rette per un punto ed un'altra retta incidente ad una delle prime tre fuori del punto.

« d'') Il sistema delle L ha (oltre la curva base K) un punto base doppio O, che è pure *doppio* per la cubica base K; ed inoltre le L hanno in O (punto biplanare) un piano osculatore fisso. Allora (§ 3 *Osservazione*) la K è una cubica piana (certo non appartenente al piano osculatore). Un siffatto gruppo base determina effettivamente un sistema ∞^7 di L rappresentativo d'una V^6, e nascente dalla proiezione di V^6 da una sua cubica C.

« I sistemi d) d') d'') sono irreducibili fra loro, perchè le V^6 rappresentate sono proiettivamente distinte. Per convincersene basta notare che nel 1° caso non si hanno mai reti (¹) di rigate cubiche su V^6; nel 2° se ne ha due reti, e una superficie rigata d'una rete compone una sezione iperplanare di V^6 insieme ad una superficie rigata dell'altra non mai insieme ad una superficie della stessa rete; nel 3° caso la V^6 possiede una sola rete di rigate cubiche, dove due rigate compongono una sezione iperplanare di V^6.

« § 7. Sia $n > 6$. Notando che una curva base d'ordine < 3 non può *mai* individuare *una* quadrica che la contiene, nè quindi un sistema ∞^{n+1} di L, e ricordando l'osservazione posta in fine al § 3, si ha che, escludendo i sistemi rappresentativi di coni, è da esaminare soltanto il caso dei sistemi di L con punto base doppio $(7-n)$plo per la curva base K.

« È quindi $n \leqq 7$ ossia $n = 7$.

« e) Il sistema ∞^8 di superficie cubiche L con conica base e punto base doppio fuori di esso (unico sistema che nasce dall' ipotesi precedente), rappresenta effettivamente una V^7 che non è un cono, ove questa sia proiettata ecc. In esso la conica base è irreduttibile tale essendo la curva proiettante C, perchè (per $n > 6$) è irreduttibile la quadrica Q residua di ciascun piano rispetto al sistema, cioè il cono quadrico proiettante da O la conica.

« Il nominato sistema di L si riconduce con una trasformazione quadratica al sistema delle quadriche passanti per un punto.

« Per $n > 7$ le varietà V^n di 1ª specie sono coni.

« Così è esaurito l'esame delle varietà normali V^n di 1ª specie.

« § 8. Rimane ora la considerazione delle varietà V^8 di 2ª specie, precedentemente escluse (²).

« Ad una superficie sezione iperplanare generica di V^8 appartengono ∞^3 quartiche razionali normali da ciascuna delle quali la superficie può proiet-

(¹) Col nome di *rete* di superficie designamo (come di solito) un sistema lineare ∞^2 di superficie sulla varietà (per due punti generici di questa passa una superficie della rete).

(²) Nel citato lavoro del sig. Del Pezzo (v. Nota I) si trova considerata la V^8 di 2ª specie rappresentata su S_3 dal sistema delle quadriche (e qualche altra V^n di 1ª specie costruita partendo da particolari sistemi di superficie cubiche compresi tra quelli da noi enumerati): ivi è pure enunciato (senza dimostrazione) che la V^8 di 2ª specie è sempre rappresentabile col sistema delle quadriche di S_3; questo fatto si troverà dimostrato in questo §, *escluso che la* V^8 *sia un cono*, restrizione che evidentemente il detto autore ha tacitamente supposta.

tarsi univocamente sopra una quadrica. Scegliamo sopra una sezione iperplanare generica della V^8 (di 2ª specie) una siffatta quartica irreduttibile C ed un punto P fuori di essa: lo S_5 determinato da P e da C non sega la V^8 fuori di C e di P, e da questo S_5 la V^8 può proiettarsi univocamente sopra un S_3. Con ciò si ottiene una rappresentazione della V^8 su S_3 nella quale le immagini delle sezioni iperplanari di V^8 sono superficie del 4° ordine L (ciascuna proiezione della corrispondente sezione generica dai 4 punti comuni ad essa sezione e a C) seganti sopra un piano generico un sistema di quartiche con due punti base doppî (rappresentativo di una superficie sezione di V^8 con un iperpiano per lo S_5 proiettante); il sistema delle L ha dunque una conica base doppia K (irreduttibile o nò): le curve sezioni di V^8 vengono proiettate in curve dello stesso ordine 8, intersezioni variabili di due L, onde il sistema delle L non ha altre curve base. È poi facile vedere che il piano della conica K, è il piano immagine del centro di proiezione P: invece alla quartica proiettante C corrisponde un cono quadrico irreduttibile Q, quello corrispondente alla C nella rappresentazione (mediante proiezione da C) della V^7 proiezione di V^8 da P su un S_8 (§ 7).

Se si stacca il piano della conica doppia dalle superficie quartiche L, si ha un sistema di superficie cubiche rappresentativo appunto della nominata V^7 (proiezione di V^8 da P su un S_8); questo sistema è costituito dalle superficie cubiche con un punto base doppio O, e la conica base K, la quale o non passa per O ed è irreduttibile, o si spezza in due rette per O; in questo 2° caso il cono quadrico Q è il cono tangente nel punto doppio a tutte le superficie cubiche.

« *1ª ipotesi.* Il punto O non appartiene alla conica K e quindi nemmeno al piano α di essa.

« Allora esso è doppio per le L come pel sistema residuo rispetto al sistema di esse del piano α.

« Si ha il tipo:

« e') Per $n = 8$, il sistema delle superficie quartiche con conica base doppia e punto base doppio fuori di essa: questo sistema si riconduce con una trasformazione quadratica al sistema di tutte le quadriche, ed è effettivamente rappresentativo di una V^8 di 2ª specie (non cono).

« *2ª ipotesi.* Il punto O appartiene alla conica K che è in tal caso spezzata in due rette per O. Il punto O è base triplo pel sistema delle superficre quartiche L, giacchè staccando il piano α per esso, risulta doppio per le superficie cubiche residue: in O tutte le L hanno (oltre al piano α) lo stesso cono quadrico tangente Q (irreduttibile). Si ha così il tipo:

« e'') Per $n = 8$, il sistema delle superficie quartiche L con punto base triplo, per esso due rette base doppie (distinte o nò) ed in esso anche lo stesso cono quadrico tangente irreduttibile (oltre al piano delle due rette). Si determina così un effettivo sistema ∞^9 rappresentativo di una V^8 di

2^a specie contenente ∞^2 rette, che (colle considerazioni del § 4) si vede essere un cono [1].

« § 4. Esaurito così l'esame delle varietà normali V^n $(n > 3)$ in ordine alla loro rappresentazione su S_3, riferendoci alle cose dette nei §§ 1, 2 della Nota I, possiamo enunciare il teorema:

« I sistemi lineari semplici di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche, e dove tre superficie generiche s'incontrano in più di 3 punti variabili (cioè sistemi di grado > 3), si possono ricondurre con una trasformazione birazionale dello spazio ad uno dei seguenti sistemi lineari tipici, di grado n e dimensione $n+1$, o ad un sistema contenuto in uno di questi:

per $n = 4$,

« 1°) il sistema ∞^5 di superficie cubiche determinato da una quintica base di genere due (che può degenerare) intersezione parziale d'una quadrica e d'una superficie cubica;

per $n = 5, 6, 7, 8, 9$,

« 2°) il sistema ∞^{n+1} di superficie cubiche determinato da un punto doppio base, in esso il cono quadrico tangente fisso (che può supporsi irreduttibile per $n > 6$) e su questo $9 - n$ rette base (questo sistema, rappresentativo d'un cono, per $n = 4$ rientra nel 1° tipo);

oppure: per $n = 5$,

« 3°) il sistema ∞^6 di superficie cubiche senza punti base doppî determinato da una quartica di 2^a specie (che può spezzarsi);

per $n = 6$,

« 4°) il sistema ∞^7 di superficie cubiche determinato da 3 rette base sghembe;

« 5°) il sistema ∞^7 di superficie cubiche determinato da un punto base doppio e da una cubica gobba base passante semplicemente per esso (cubica che può degenerare);

« 6°) il sistema ∞^7 di superficie cubiche determinato da un punto base biplanare, in esso un piano osculatore fisso, e una cubica piana base avente in esso un punto doppio (cubica che può degenerare);

per $n = 7, 8$,

[1] Che ogni V^8 di 2^a specie, la quale non sia un cono, possa rappresentarsi col sistema delle quadriche e'), può anche vedersi considerando gli iperpiani per una sua quartica C tangenti ad essa in due punti di C: le sezioni si spezzano in superficie di Veronese ed (è facile provarlo) si ottiene un sistema omoloidico di tali superficie su V^8, onde ecc.

« 7°) il sistema (∞^8 o ∞^9) delle quadriche con un punto base semplice o senza punti base;

per $n=8$ anche

« 8°) il sistema ∞^9 delle superficie quartiche con punto triplo base, due rette base doppie per esso, ed in esso (oltre al piano delle due rette) lo stesso cono quadrico tangente irreduttibile (sistema rappresentativo d'un cono di 2ª specie).

« Questi sistemi tipici irreducibili fra loro sono nel caso generale i rappresentanti d'ordine minimo di ciascuna classe: racchiudono come casi particolari tutti i sistemi di quadriche con punti base semplici ».

Matematica. — *Sopra alcune trasformazioni delle equazioni della dinamica del punto.* Nota del dott. Michele Leoncini, presentata dal Socio Bianchi.

Elettricità. — *Sulla legge della dissipazione di energia nei dielettrici sotto l'azione di campi elettrici di debole intensità.* Nota di Riccardo Arnò, presentata dal Socio Ferraris.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica terrestre. — *I terremoti di lontana provenienza registrati al Collegio Romano.* Nota del dott. G. Agamennone, presentata a nome del Corrispondente Tacchini.

« Nella seduta del 21 maggio dello scorso anno (1) ebbi l'onore di comunicare all'Accademia i primi risultati ottenuti da un nuovo *sismometrografo* a registrazione continua, installato fin dal gennaio 1893 sulla torre del Collegio Romano, costruito con un pendolo lungo circa sei metri e con una massa di kg. 75. Mediante questo strumento fu possibile registrare il passaggio di onde simiche lievissime provocate da lontani terremoti, quali furono quelli di *Zante* del 31 gennaio e 1° febbraio 1893, quello di *Samotracia* del 9 febbraio, di *Aleppo* del 2-3 marzo, di *Serbia* dell'8 aprile, e nuovamente di *Zante* del 17 aprile.

« D'allora in poi si sono moltiplicati gli esempî di registrazione di scosse, quantunque coll'epicentro fuori d'Italia. Così il 14 giugno dello stesso anno

(1) *I terremoti e le perturbazioni magnetiche.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, ser. 5ª, vol. II, 1° sem. 1893, p. 479.