ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1894

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME III.

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1894

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 giugno 1894.

A. Messedaglia Vicepresidente

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla interpretazione geometrica del teorema di Moutard.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

« È noto come la trasformazione di Moutard, relativa alle equazioni di Laplace della forma:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = M\theta ,$$

dove M è una funzione data di u , v , trova la sua interpretazione geometrica nella teoria delle deformazioni infinitesime delle superficie flessibili ed inestendibili e delle corrispondenti congruenze, sulle cui falde della superficie focale si corrispondono le linee assintotiche, congruenze che indico con W [1]. Nella presente Nota, appoggiandomi sulle formole generali date nel mio libro, dimostro per le congruenze generali W un teorema che può riguardarsi come un'estensione del *teorema di permutabilità* per le congruenze pseudosferiche (*Lezioni* pag. 435 sg.). Applicando questo teorema a quelle speciali congruenze W, le cui falde focali hanno in punti corrispondenti eguale curvatura, trovo che per esse valgono tutte le notevoli conseguenze già da me segnalate nel caso speciale delle congruenze pseudosferiche.

[1] V. il capitolo XII delle mie *Lezioni di geometria differenziale* (Pisa-Spoerri 1894).

§ 1.

« Partiamo dalla costruzione fondamentale data a pag. 300 delle *Lezioni*, colla quale da una deformazione infinitesima nota di una superficie qualunque S si deduce la corrispondente congruenza W, di cui S è una falda della superficie focale. La costruzione consiste nel condurre per ogni punto P di S nel piano tangente il raggio normale alla direzione dello spostamento che subisce P; la congruenza di raggi così ottenuta è la congruenza W cercata. La seconda falda S_1 della superficie focale si dirà la *trasformata* di S mediante la deformazione infinitesima considerata.

« Ciò premesso, ci proponiamo di dimostrare il teorema seguente:

« *A*) Di una superficie S qualunque si considerino due diverse deformazioni infinitesime, per le quali si costruiscano, nel modo descritto, le rispettive superficie trasformate S_1, S_2. Esiste una semplice infinità di superficie S′, deducibile con una sola quadratura, ciascuna delle quali ammette, come la S_1, la medesima coppia fissa S_1, S_2 di superficie trasformate.

« Osserviamo che se P, P_1, P_2, P′ indicano quattro punti corrispondenti delle quattro superficie S, S_1, S_2, S′, la doppia infinità di quadrilateri sghembi $PP_1P'P_2$ è così formata che ciascun lato descrive una congruenza W, di cui i fuochi sono i due vertici sul lato, mentre i piani focali passano rispettivamente pei due lati consecutivi.

§ 2.

« Per dimostrare il teorema enunciato, riferiamo la superficie S alle sue linee assintotiche u, v colle formole di Lelieuvre (*Lezioni* pag. 297):

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= -\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u}\end{vmatrix}, & \frac{\partial y}{\partial u} &= -\begin{vmatrix} \zeta & \xi \\ \frac{\partial \zeta}{\partial u} & \frac{\partial \xi}{\partial u}\end{vmatrix}, & \frac{\partial z}{\partial u} &= -\begin{vmatrix} \xi & \eta \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial u}\end{vmatrix} \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v}\end{vmatrix}, & \frac{\partial y}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \zeta & \xi \\ \frac{\partial \zeta}{\partial v} & \frac{\partial \eta}{\partial v}\end{vmatrix}, & \frac{\partial z}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \xi & \eta \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} & \frac{\partial \eta}{\partial v}\end{vmatrix} \end{aligned}\right.$$

dove ξ, η, ς sono soluzioni di una medesima equazione di Laplace

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = M\,\theta\,,$$

che è altresì l'equazione delle deformazioni infinitesime per la superficie S.

« Essendo R_1 una soluzione della (2), determiniamo $\xi_1\,\eta_1\,\varsigma_1$ dalle equazioni (*Lezioni* pag. 298):

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\xi_1+\xi)}{\partial u}=(\xi-\xi_1)\dfrac{\partial\log R_1}{\partial u}\,,\quad \dfrac{\partial(\eta_1+\eta)}{\partial u}=(\eta-\eta_1)\dfrac{\partial\log R_1}{\partial u}\,, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial(\zeta_1+\zeta)}{\partial u}=(\zeta-\zeta_1)\dfrac{\partial\log R_1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial(\xi_1-\xi)}{\partial v}=-(\xi+\xi_1)\dfrac{\partial\log R_1}{\partial v}\,,\quad \dfrac{\partial(\eta_1-\eta)}{\partial v}=-(\eta+\eta_1)\dfrac{\partial\log R_1}{\partial v}\,, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial(\zeta_1-\zeta)}{\partial v}=-(\zeta+\zeta_1)\dfrac{\partial\log R_1}{\partial v} \end{cases}$$

e le formole

$$(4)\qquad x_1=x+\begin{vmatrix}\eta_1 & \zeta_1\\ \eta & \zeta\end{vmatrix}\,,\quad y_1=y+\begin{vmatrix}\zeta_1 & \xi_1\\ \zeta & \xi\end{vmatrix}\,,\quad z=z+\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1\\ \xi & \eta\end{vmatrix}$$

definiranno la superficie S_1 trasformata della S mediante una deformazione infinitesima appartenente a R_1 (¹).

« Similmente considerando una seconda soluzione R_2 della (2) determiniamo $\xi_2, \eta_2, \varsigma_2$ dalle equazioni:

$$(3^\star)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\xi_2+\xi)}{\partial u}=(\xi-\xi_2)\dfrac{\partial\log R_2}{\partial u}\,,\quad \dfrac{\partial(\eta_2+\eta)}{\partial u}=(\eta-\eta_2)\dfrac{\partial\log R_2}{\partial u}\,, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial(\zeta_2+\zeta)}{\partial u}=(\zeta-\zeta_2)\dfrac{\partial\log R_2}{\partial u} \\ \dfrac{\partial(\xi_2-\xi)}{\partial v}=-(\xi+\xi_2)\dfrac{\partial\log R_2}{\partial v}\,,\quad \dfrac{\partial(\eta_2-\eta)}{\partial v}=-(\eta+\eta_2)\dfrac{\partial\log R_2}{\partial v}\,, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial(\zeta_2-\zeta)}{\partial v}=-(\zeta+\zeta_2)\dfrac{\partial\log R_2}{\partial v} \end{cases}$$

e le formole

$$(4^\star)\qquad x_2=x+\begin{vmatrix}\eta_2 & \zeta_2\\ \eta & \zeta\end{vmatrix}\,,\quad y_2=y+\begin{vmatrix}\zeta_2 & \xi_2\\ \zeta & \xi\end{vmatrix}\,,\quad z_2=z+\begin{vmatrix}\xi_2 & \eta_2\\ \xi & \eta\end{vmatrix}$$

definiranno una seconda superficie S_2 trasformata di S per una deformazione infinitesima appartenente a R_2.

« Si tratta di provare che esistono ∞^1 superficie S′ che ammettono per una coppia di superficie trasformate le superficie fisse S_1, S_2; la S stessa appartiene, come è naturale, alle superficie S′. Indicando coll'accento le quan-

(¹) Propriamente alla soluzione R_1 della (2) corrisponde una tripla infinità di deformazioni infinitesime della S, che differiscono da una fissa solo per una traslazione infinitesima; noi qui ne intendiamo fissata una dalle soluzioni scelte $\xi_1, \eta_1\ \zeta_1$, del sistema (3).

tità relative ad una di queste superficie incognite S', dobbiamo cercare di determinare ξ', η', ζ' in guisa che sussistano insieme le formole:

$$(5)\qquad x' = x_1 + \begin{vmatrix} \eta' & \zeta' \\ \eta_1 & \eta_1 \end{vmatrix}, \quad y' = y_1 + \begin{vmatrix} \zeta' & \xi' \\ \zeta_1 & \xi_1 \end{vmatrix}, \quad z' = z_1 + \begin{vmatrix} \xi' & \eta' \\ \xi_1 & \eta_1 \end{vmatrix}$$

$$(5^*)\qquad x' = x_2 + \begin{vmatrix} \eta' & \zeta' \\ \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix}, \quad y' = y_2 + \begin{vmatrix} \zeta' & \xi' \\ \zeta_2 & \xi_2 \end{vmatrix}, \quad z' = z_2 + \begin{vmatrix} \xi' & \eta' \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix}$$

ed abbiano luogo le formole di Lelieuvre:

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial u} = -\begin{vmatrix} \eta' & \zeta' \\ \dfrac{\partial \eta'}{\partial u} & \dfrac{\partial \zeta'}{\partial u} \end{vmatrix}, \quad \dfrac{\partial y'}{\partial u} = -\begin{vmatrix} \zeta' & \xi' \\ \dfrac{\partial \zeta'}{\partial u} & \dfrac{\partial \xi'}{\partial u} \end{vmatrix}, \quad \dfrac{\partial z'}{\partial u} = -\begin{vmatrix} \xi' & \eta' \\ \dfrac{\partial \xi'}{\partial u} & \dfrac{\partial \eta'}{\partial u} \end{vmatrix} \\[2ex] \dfrac{\partial x'}{\partial v} = \begin{vmatrix} \eta' & \zeta' \\ \dfrac{\partial \eta'}{\partial v} & \dfrac{\partial \zeta'}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \dfrac{\partial y'}{\partial v} = \begin{vmatrix} \zeta' & \xi' \\ \dfrac{\partial \zeta'}{\partial v} & \dfrac{\partial \xi'}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \dfrac{\partial z'}{\partial v} = \begin{vmatrix} \xi' & \eta' \\ \dfrac{\partial \xi'}{\partial v} & \dfrac{\partial \eta'}{\partial v} \end{vmatrix} \end{cases}$$

§ 3.

« Dalle (5), (5*), osservando le (4), (4*), deduciamo primieramente:

$$\begin{vmatrix} \eta' - \eta\,, & \zeta' - \zeta \\ \eta_1 - \eta_2\,, & \zeta_1 - \zeta_2 \end{vmatrix} = 0\,; \quad \begin{vmatrix} \zeta' - \zeta\,, & \xi' - \xi \\ \zeta_1 - \zeta_2\,, & \xi_1 - \xi_2 \end{vmatrix} = 0\,, \quad \begin{vmatrix} \xi' - \xi\,, & \eta' - \eta \\ \xi_1 - \xi_2\,, & \eta_1 - \eta_2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

onde, indicando con λ un fattore incognito di proporzionalità, dovremo avere:

$$(7)\qquad \xi' = \xi + \lambda(\xi_1 - \xi_2)\,, \quad \eta' = \eta + \lambda(\eta_1 - \eta_2)\,, \quad \zeta' = \zeta + \lambda(\zeta_1 - \zeta_2).$$

« Sostituendo nelle (5) o (5*), risulta:

$$(8)\qquad x' = x + \lambda \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix}, \quad y' = y + \lambda \begin{vmatrix} \zeta_1 & \xi_1 \\ \zeta_2 & \xi_2 \end{vmatrix}, \quad z' = z + \lambda \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix}.$$

« Ora le due equazioni

$$\xi' \frac{\partial x'}{\partial u} + \eta' \frac{\partial y'}{\partial u} + \zeta' \frac{\partial z'}{\partial u} = 0$$

$$\xi' \frac{\partial x'}{\partial v} + \eta' \frac{\partial y'}{\partial v} + \zeta' \frac{\partial z'}{\partial v} = 0\,,$$

tenuto conto delle formole del § 2, danno per λ le due equazioni:

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \lambda}{\partial u} = \lambda \dfrac{\partial}{\partial u} \log(R_1 R_2) + \lambda^2 \dfrac{\partial}{\partial u} \log\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right) \\[2ex] \dfrac{\partial \lambda}{\partial v} = \lambda \dfrac{\partial}{\partial v} \log(R_1 R_2) + \lambda^2 \dfrac{\partial}{\partial v} \log\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right). \end{cases}$$

« Questo sistema simultaneo per determinare λ, al quale possiamo dare la forma lineare in $\frac{1}{\lambda}$:

$$
(9^*) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\lambda}\right) &= -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial u}\log(R_1 R_2) + \frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \\
\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\lambda}\right) &= -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial v}\log(R_1 R_2) + \frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{R_1}{R_2}\right)
\end{aligned}
\right.
$$

soddisfa alla condizione d'illimitata integrabilità, riducendosi questa alla relazione

$$
\frac{1}{R_1}\frac{\partial^2 R_1}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{R_2}\frac{\partial^2 R_2}{\partial u\,\partial v},
$$

che è appunto verificata. Si ha quindi λ *con una quadratura* dalla formola

$$
(10) \qquad \frac{R_1 R_2}{\lambda} = C + \int \left\{ \begin{vmatrix} R_1 & R_2 \\ \frac{\partial R_1}{\partial u} & \frac{\partial R_2}{\partial u} \end{vmatrix} du - \begin{vmatrix} R_1 & R_2 \\ \frac{\partial R_1}{\partial v} & \frac{\partial R_2}{\partial v} \end{vmatrix} dv \right\},
$$

ove C indica una costante arbitraria.

« Viceversa se determiniamo λ da questa formola (10), le (8) ci daranno una superficie S′ nella relazione richiesta con S_1, S_2. Si verifica subito infatti che le formole (6) di Lelieuvre sono, pei valori (7) di ξ', η', ζ', identicamente soddisfatte. Così il nostro teorema *A)* è completamente dimostrato.

§ 4.

« Ponendo

$$
M_1 = R_1 \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{1}{R_1}\right), \quad M_2 = R_2 \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{1}{R_2}\right),
$$

le equazioni

$$
(11) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial v} = M_1\,\theta,
$$

$$
(12) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial v} = M_2\,\theta
$$

sono le trasformate di Moutard della (2) per mezzo delle rispettive soluzioni R_1, R_2; esse rappresentano altresì le equazioni delle deformazioni infinitesime per le superficie S_1, S_2.

« Sia ora

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \mathrm{M}' \theta \tag{13}$$

l'equazione di Moutard per la S', talchè

$$\mathrm{M}' = \frac{1}{\xi'} \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{\eta'} \frac{\partial^2 \eta'}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{\zeta'} \frac{\partial^2 \zeta'}{\partial u\, \partial v}$$

« La (13) ammette come la (2) le due equazioni (11), (12) per trasformate di Moutard. Se indichiamo con R'_1, R'_2 le rispettive soluzioni delle (11), (12) che le trasformano nella (13), dovranno sussistere le formole

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial(\xi' + \xi_1)}{\partial u} = (\xi_1 - \xi') \frac{\partial \log \mathrm{R}'_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial(\xi' - \xi_1)}{\partial v} = -(\xi_1 + \xi') \frac{\partial \log \mathrm{R}'_1}{\partial v} \\ &\frac{\partial(\xi' + \xi_2)}{\partial u} = (\xi_2 - \xi') \frac{\partial \log \mathrm{R}'_2}{\partial u}, \quad \frac{\partial(\xi' - \xi_2)}{\partial u} = -(\xi_2 + \xi') \frac{\partial \log \mathrm{R}'_2}{\partial v} \end{aligned}\right. \tag{14}$$

colle analoghe per η, ζ. Da queste, combinate colle formole dei §§ precedenti, troviamo per determinare R'_1, R'_2 le formole:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \log \mathrm{R}'_1}{\partial u} &= \lambda \frac{\partial \log \mathrm{R}_2}{\partial u} - (\lambda + 1) \frac{\partial \log \mathrm{R}_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \log \mathrm{R}'_1}{\partial v} &= -\lambda \frac{\partial \log \mathrm{R}_2}{\partial v} + (\lambda - 1) \frac{\partial \log \mathrm{R}_1}{\partial v} \end{aligned}\right. \tag{15}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \log \mathrm{R}'_2}{\partial u} &= (\lambda - 1) \frac{\partial \log \mathrm{R}_2}{\partial u} - \lambda \frac{\partial \log \mathrm{R}_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \log \mathrm{R}'_2}{\partial v} &= -(\lambda + 1) \frac{\partial \log \mathrm{R}_2}{\partial v} + \lambda \frac{\partial \log \mathrm{R}_1}{\partial v}, \end{aligned}\right. \tag{16}$$

dalle quali risultano determinate $\mathrm{R}'_1\, \mathrm{R}'_2$, ciascuna a meno di un fattore costante, che resta, come è naturale indeterminato. Le (15), (16), confrontate dimostrano che si può porre

$$\mathrm{R}'_1 = \frac{\mathrm{R}_2}{\lambda}, \quad \mathrm{R}'_2 = \frac{\mathrm{R}_1}{\lambda} \tag{17}$$

e si avrà allora

$$\frac{\partial}{\partial u}(\mathrm{R}_1 \mathrm{R}_1') = \mathrm{R}_1^2 \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1}\right), \quad \frac{\partial}{\partial v}(\mathrm{R}_1 \mathrm{R}'_1) = -\mathrm{R}_1^2 \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(\mathrm{R}_2 \mathrm{R}'_2) = -\mathrm{R}_2^2 \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{R}_1}{\mathrm{R}_2}\right), \quad \frac{\partial}{\partial v}(\mathrm{R}_2 \mathrm{R}'_2) = \mathrm{R}_2^2 \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathrm{R}_1}{\mathrm{R}_2}\right).$$

« Quindi R_1' è la soluzione della (11), trasformata di R_2 per mezzo di R_1, come R'_2 è la soluzione della (12), trasformata di R_1 per mezzo di R_2. Si ha poi evidentemente

$$\mathrm{R}_1 \mathrm{R}'_1 = \mathrm{R}_2 \mathrm{R}'_2 .$$

« Se avessimo voluto parlare soltanto delle mutue relazioni fra le quattro equazioni di Laplace

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=\mathrm{M}\theta\,,\quad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=\mathrm{M}_1\,\theta\,,\quad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=\mathrm{M}_2\theta\,,\quad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=\mathrm{M}'\,\theta\,,$$

bastava semplicemente dare le formole del presente §. Ma ciò non avrebbe fatto conoscere che incompletamente le relazioni geometriche espresse dal teorema *A*).

§ 5.

« Il teorema generale *A*) consente varie applicazioni sulle quali mi propongo di ritornare in seguito. Per ora mi limiterò a darne una che riguarda quelle congruenze W, le cui falde focali hanno in punti corrispondenti eguale curvatura. Di queste congruenze ho trattato distesamente nel T. XVIII (1890). degli Annali di matematica e a pag. 313 e segg. del libro. Le superficie focali di una tale congruenza godono della proprietà caratteristica che la loro curvatura K, espressa pei parametri u, v delle linee assintotiche, prende la forma

$$a)\qquad \mathrm{K}=-\frac{1}{\{\varphi(u)+\psi(v)\}^2}\,.$$

« Viceversa ogni tale superficie appartiene, come superficie focale, a una doppia infinità di tali congruenze W, la cui ricerca dipende dalla integrazione di un'equazione di Riccati. Ora supponiamo che le coppie $(\mathrm{S},\mathrm{S}_1)$, $(\mathrm{S},\mathrm{S}_2)$ del teorema *A*) costituiscano appunto le falde focali di due tali congruenze W. Mentre nel caso generale la quadratura indicata nell'enunciato del teorema non sembra possa evitarsi, qui invece possiamo ottenere la superficie S′ in termini finiti, perchè sussiste la proprietà seguente:

« *B*) Fra le ∞^1 superficie S′ ve ne ha, oltre S, una ed una soltanto S_3, che ha in ogni suo punto la curvatura comune di S, S_1, S_2 nei punti corrispondenti.

« In tal caso le quattro congruenze W descritte dai quattro lati del quadrilatero $\mathrm{P}\,\mathrm{P}_1\,\mathrm{P}_3\,\mathrm{P}_2$ appartengono tutte alla classe speciale di cui qui ci occupiamo. Come si vede, è questa un'estensione del *teorema di permutabilità* per le congruenze o superficie pseudosferiche, teorema che risulterà così alla sua volta nuovamente dimostrato.

§ 6.

« Che la superficie S_3 del teorema *B*), ove esista, sia unica e determinata, risulta subito dal quadrare e sommare le tre formole

$$(18)\quad \xi_3=\xi+\lambda\,(\xi_1-\xi_2),\ \eta_3=\eta+\lambda\,(\eta_1-\eta_2)\,,\ \zeta_3=\zeta+\lambda\,(\zeta_1-\zeta_2)\,,$$

dove con ξ_3, η_3, ξ_3 indichiamo i valori di ξ', η', ζ' per S_3. Dobbiamo infatti avere per ipotesi

$$\xi_3^2+\eta_3^2+\zeta_3^2=\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2=\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2=\varrho\,,$$

onde segue per λ il valore unico

$$\lambda=\frac{\Sigma\,\xi\,\xi_2-\Sigma\,\xi\,\xi_1}{\varrho-\Sigma\xi_1\,\xi_2}\,. \tag{19}$$

« Ci resta da verificare che questo valore di λ soddisfa effettivamente le (9). Per ciò supponiamo che la S_1 sia derivata dalla S per mezzo delle formole al N. 176 delle *Lezioni* (pag. 315 segg.) e la S_2 per mezzo delle formole stesse, cangiatovi σ in σ', k in k', φ in φ'; diremo allora che S_1 è derivata da S con una trasformazione B_k e S_2 con una $B_{k'}$.

« Per definire R_1, R_2 nel nostro caso troviamo

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial\log R_1}{\partial u}&=\beta\cot^2\left(\frac{\sigma}{2}\right)-\sqrt{e}\,\cot\left(\frac{\sigma}{2}\right)\cos\left(\varphi+\frac{\Omega}{2}\right)\\ \frac{\partial\log R_1}{\partial v}&=\alpha\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{\sigma}{2}\right)+\sqrt{g}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)\cos\left(\varphi-\frac{\Omega}{2}\right)\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial\log R_2}{\partial u}&=\beta\cot^2\left(\frac{\sigma'}{2}\right)-\sqrt{e}\,\cot\left(\frac{\sigma'}{2}\right)\cos\left(\varphi'+\frac{\Omega}{2}\right)\\ \frac{\partial\log R_2}{\partial v}&=\alpha\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{\sigma'}{2}\right)+\sqrt{g}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\sigma'}{2}\right)\cos\left(\varphi'-\frac{\Omega}{2}\right)\end{aligned}\right.$$

avendo posto

$$\alpha=\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'\,,\quad\beta=\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'.$$

« La (19) diventa:

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{1-\cos\sigma'\cos\sigma-\mathrm{sen}\sigma'\,\mathrm{sen}\sigma\cos(\varphi-\varphi')}{\cos\sigma'-\cos\sigma}\,. \tag{19*}$$

« Ed ora se teniamo conto delle formole date a pag. 417 delle *Lezioni*:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\left(\varphi-\frac{\Omega}{2}\right)&=\alpha\sqrt{\frac{e}{g}}\,\mathrm{sen}\,\Omega+\sqrt{e}\cot\left(\frac{\sigma}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\varphi+\frac{\Omega}{2}\right)\\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\varphi+\frac{\Omega}{2}\right)&=-\beta\sqrt{\frac{g}{e}}\,\mathrm{sen}\,\Omega-\sqrt{g}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\varphi-\frac{\Omega}{2}\right)\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\left(\varphi'-\frac{\Omega}{2}\right)&=\alpha\sqrt{\frac{e}{g}}\,\mathrm{sen}\,\Omega+\sqrt{e}\cot\left(\frac{\sigma'}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\varphi'+\frac{\Omega}{2}\right)\\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\varphi'+\frac{\Omega}{2}\right)&=-\beta\sqrt{\frac{g}{e}}\,\mathrm{sen}\,\Omega-\sqrt{g}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\sigma'}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\varphi'-\frac{\Omega}{2}\right)\end{aligned}\right.$$

nonchè delle altre

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \cos\sigma}{\partial u} = 2\beta(\cos\sigma + 1)\ , \ \dfrac{\partial \cos\sigma}{\partial v} = 2\alpha(\cos\sigma - 1) \\ \dfrac{\partial \cos\sigma'}{\partial u} = 2\beta(\cos\sigma' + 1)\ , \ \dfrac{\partial \cos\sigma'}{\partial v} = 2\alpha(\cos\sigma' - 1)\ , \end{cases}$$

vediamo che col valore (19*) di $\frac{1}{\lambda}$ le (9*) sono identicamente soddisfatte.

« Si osserverà poi che dalle (18), (19) seguono le formole

$$\Sigma\xi_1\xi_3 = \Sigma\xi_2\xi\ ,\ \Sigma\xi_2\xi_3 = \Sigma\xi_1\xi\ ,$$

le quali dimostrano che la normale a S_3 fa colle normali a S_1, S_3 rispettivamente gli angoli σ', σ che le normali a S_2, S_1 fanno colla corrispondente di S.

§ 7.

« Dietro il risultato ultimamente conseguito possiamo dire che S_3 deriva da S_1 con una trasformazione $B'_{k'}$, e da S_2 con una B'_k, onde le trasformazioni composte

$$B_k B'_{k'}\ ,\ B_{k'} B'_k\ ,$$

a costanti k, k' invertite, hanno su S il medesimo effetto, di trasformarla cioè in S_3.

« Supponiamo ora che della S si conoscano tutte le ∞^2 congruenze speciali W derivate, che cioè si sia integrata la *prima* equazione di Riccati che si incontra nel metodo di trasformazione. Le conseguenze dedotte dal teorema di permutabilità nel caso delle congruenze pseudosferiche valgono inalterate nel caso attuale più generale e però le successive equazioni di Riccati saranno senz'altro integrate colla prima, cioè: Per ciascuna delle superficie della classe *a*), derivate da S, potremo determinare con soli calcoli algebrici e di derivazione le nuove ∞^2 superficie trasformate e così di seguito. Prendendo ad esempio per superficie iniziale S il paraboloide iperbolico equilatero o l'elicoide rigata d'area minima, che appartengono appunto alla classe *a*), l'integrazione della corrispondente equazione di Riccati è immediata. L'applicazione successiva del metodo di trasformazione non richiede quindi più alcun calcolo d'integrazione. Riconosciamo per tal modo l'esistenza di un gruppo infinito di superficie della classe *a*) che dipendono soltanto dalle funzioni ordinarie.

« Di più, se osserviamo che dalle (17) si avrà ogni volta *senza quadrature* il valore della funzione caratteristica di Weingarten nella corrispondente deformazione infinitesima della superficie della classe *a*), cui siamo pervenuti, ne potremo costruire in termini finiti le superficie *associate*. Queste appartengono alla classe di superficie considerate da Cosserat (*Lezioni* pag. 318), caratterizzate dall'ammettere una deformazione continua nella quale il sistema (u, v) attualmente coniugato tale si conserva nella deformazione ».