ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1894

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME III.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1894

Matematica. — *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve ellittiche.* Nota di GUIDO CASTELNUOVO, presentata dal Socio CREMONA.

« In un lavoro pubblicato quattro anni or sono [1] ho studiato le superficie aventi come sezioni piane curve iperellittiche (di genere $p \geqq 1$), ed ho dimostrato che quelle superficie sono *razionali* (rappresentabili punto per punto sul piano), quando sia soddisfatta la restrizione che le note formole di postulazione di Nöther applicate al calcolo del numero delle superficie di ordine $\geqq n-3$ aggiunte alle superficie studiate (d'ordine n), conducano a risultati conformi al vero. Una tale restrizione sembrava allora di poco momento; ma vari esempi portati in seguito di superficie algebriche alle quali non sono più applicabili (nel senso suddetto) le formule di postulazione, mi convinsero che quel teorema non poteva riuscir veramente utile finchè non si fosse giunti a togliere la nominata restrizione.

« Recentemente il sig. Enriques con un elegante procedimento potè dimostrare che effettivamente *tutte* le superficie non rigate aventi come sezioni piane curve iperellittiche di genere $\geqq 2$, sono razionali [2]. Ma come lo stesso autore avverte, quel procedimento non si applica alle superficie aventi le sezioni piane di genere 1. La lacuna che così rimaneva viene appunto colmata dalla presente Nota; sicchè ormai si può enunciare il notevole risultato che:

« *Ogni superficie non rigata le cui sezioni piane siano curve iperellittiche* (di genere $\geqq 1$), *è razionale*; mentre è noto che le rigate a sezioni di genere >0 non sono certamente razionali. Quanto alle superficie (rigate o no) a sezioni di genere 0, è noto, già da lungo tempo, che esse sono tutte razionali.

« Sia F una superficie (algebrica irriduttibile), di ordine n, e non rigata, la quale da un piano generico venga segata in una curva C di genere 1. Piani particolari possono tuttavia segar la F in curve di genere 0, o in curve riduttibili; però queste sezioni riduttibili non possono formare un sistema doppiamente infinito [3], sicchè per una retta generica r dello spazio non passa alcun piano secante la F in una curva spezzata.

« La curva C ammette, come è noto, una unica curva aggiunta d'ordine

[1] *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche* (Rendic. del Circolo matem. di Palermo, tomo IV).

[2] *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche* n. 2 (Rendic. della R. Accad. d. Lincei, dicembre 1893).

[3] Infatti una superficie avente ∞^2 sezioni piane riduttibili è rigata, od è la nota superficie di Steiner a sezioni razionali: si veda in proposito la mia Nota, *Sulle superficie algebriche che ammettono un sistema doppiamente infinito di sezioni piane riduttibili* (Rendic. Accad. d. Lincei, gennaio 1894).

$n-3$ φ^{n-3}, la quale non sega C fuori dei punti multipli di C. Si domanda anzitutto se le ∞^3 curve φ^{n-3} che si ottengono al variare della sezione C, appartengano ad una stessa superficie d'ordine $n-3$, oppure no.

« Si considerino perciò gli ∞^1 piani che passano per una retta generica r, e su questi le curve φ^{n-3} aggiunte alle corrispondenti sezioni piane di F. Quelle curve costituiscono una superficie Φ il cui ordine non è inferiore a $n-3$; se lo supera, la Φ contiene certo la retta r. Ne viene che in quest'ultima ipotesi, o le ∞^1 φ^{n-3} dei piani del fascio segano r in $n-3$ punti, dei quali uno almeno varia da curva a curva (tanto che un punto qualsiasi di r appartiene ad una delle φ^{n-3}); oppure una (almeno) delle ∞^1 φ^{n-3} si spezza nella retta r ed in una curva d'ordine $n-4$; in entrambi i casi si può condurre per r un tal piano che la corrispondente φ^{n-3} passi per una delle intersezioni di r con F. Ma allora la curva C segata su F da quel piano, essendo incontrata in un punto fuori dei punti multipli dalla sua curva aggiunta φ^{n-3}, deve spezzarsi: e ciò non è possibile, visto che r è una retta generica dello spazio. Dunque la superficie Φ che contiene le ∞^1 φ^{n-3} ha proprio l'ordine $n-3$; ed è una superficie Φ^{n-3} la quale si comporta come una superficie aggiunta ad F lungo le curve multiple di F, (vale a dire passa $\varrho-1$ volte per ogni curva che sia multipla secondo ϱ per F), e non sega la F fuori di queste curve. Un piano qualsiasi sega Φ^{n-3} ed F lungo due curve φ e C d'ordini $n-3$ ed n, la prima delle quali si comporta come una curva aggiunta a C nei punti multipli di C, è dunque la curva φ^{n-3} aggiunta a C.

« Così resta dimostrato che le ∞^3 curve φ^{n-3} sono le sezioni piane di una unica superficie Φ^{n-3} (¹).

« Riprendiamo la curva C segata su F da un piano π per r. La C possiede, come è noto, ∞^{n-1} curve aggiunte d'ordine $n-2$ φ^{n-2}, e per $n-2$ punti arbitrari $a_1, a_2 \ldots a_{n-2}$ di r passano ∞^1 curve φ^{n-2}; per fissare una tra queste basterà darne la tangente t in uno degli $n-2$ punti, per es. in a_1 (che possiamo supporre non sia una delle $n-3$ intersezioni di r con Φ^{n-3}). Ora si faccia variare il piano π intorno ad r, senza che mutino i punti $a_1, a_2 \ldots a_{n-2}$, e per ogni posizione di π si assuma come retta t la intersezione del piano mobile π con un piano fisso τ condotto per a_1 (ma non per r). Sopra ogni piano π del fascio resterà allora fissata una curva φ^{n-2} (passante pei punti $a_1, a_2 \ldots a_{n-2}$ e tangente a $t \equiv \pi\tau$ in a_1), e le ∞^1 curve φ^{n-2} costituiranno una superficie d'ordine non minore di $n-2$. Se però l'ordine

(¹) La stessa dimostrazione può anche presentarsi così. Se le ∞^3 curve φ^{n-3} non appartengono ad una stessa superficie (d'ordine $n-3$, come è chiaro), esse coi loro punti invadono lo spazio, ed anzi per ogni punto dello spazio passano ∞^1 di quelle curve. Scelto il punto in un punto semplice di F, si trova che per esso passano ∞^1 sezioni piane di F, le quali essendo segate fuori dei punti multipli dalle corrispondenti φ^{n-3}, devono spezzarsi; e ciò è assurdo per il teorema sopra citato.

superasse $n-2$, poichè le intersezioni delle φ^{n-2} con r sono fisse, vi dovrebbe esser un piano per r, la cui corrispondente φ^{n-2} dovrebbe spezzarsi nella retta r ed in una φ^{n-3} aggiunta a C, e *passante per* a_1 (perchè in a_1 la φ^{n-2} ha una tangente t determinata e distinta da r). Ora una tale φ^{n-3} non esiste perchè il punto a_1 si è supposto esterno alla Φ^{n-3}; dunque la superficie che contiene le $\infty^1\ \varphi^{n-2}$ è proprio d'ordine $n-2$, è una superficie Φ^{n-2}, la quale si comporta come una superficie aggiunta ad F lungo le curve multiple di F, ed è segata da ogni piano in una curva φ^{n-2} aggiunta alla corrispondente sezione piana di F. Per ogni φ^{n-2} aggiunta, di un piano π, passano infinite Φ^{n-2}, ciascuna delle quali si ottiene colla costruzione precedente quando si sia segnata in π una retta generica r, si siano collocati i punti $a_1, a_2 \ldots a_{n-2}$ nelle intersezioni di r con φ^{n-2}, e si sia assunto come piano τ uno tra gli ∞^1 piani che toccano φ^{n-2} in a_1. Fissata r si hanno in tal guisa $\infty^1\ \Phi^{n-2}$, le quali però non variano al variare di r, perchè una sola tra le infinite Φ^{n-2} passanti per φ^{n-2} contiene un ulteriore punto di π, e si spezza quindi in π e nella Φ^{n-3}. Ne viene che le Φ^{n-2} passanti per una φ^{n-2} formano un fascio, e che gli ∞^{n-1} fasci corrispondenti alle ∞^{n-1} curve φ^{n-2} aggiunte a C (i quali contengono tutti la superficie $\Phi^{n-3}+\pi$) formano un sistema lineare ∞^n di superficie Φ^{n-2}, delle quali ∞^3 si spezzano nella Φ^{n-3} ed in un piano qualsiasi.

« Il sistema lineare delle Φ^{n-2} sega su F un sistema lineare ∞^n di curve d'ordine n (poichè una φ^{n-2} sega la corrispondente C in n punti fuori dei punti multipli), tra le quali si trovano le ∞^3 sezioni piane di F. Dal che segue anzitutto che le curve del sistema passanti per un punto generico di F, non hanno altri punti comuni (perchè altrettanto accade per le ∞^2 sezioni piane contenenti quel punto); in secondo luogo che il numero delle intersezioni di due curve del sistema è n (perchè n sono le intersezioni di due sezioni piane). Riferendo dunque le ∞^n curve del sistema proiettivamente agli ∞^n iperpiani S_{n-1} di uno spazio S_n ad n dimensioni, resta determinata in S_n una superficie F′ d'ordine n, la quale è riferita punto per punto alla F, ed anzi proiettata in S_3 da un S_{n-4} convenientemente scelto dà una superficie (proiettivamente) identica ad F. Ora è noto che una superficie F′ d'ordine n di S_n, non rigata (chè altrimenti sarebbe rigata la F contro l'ipotesi), è razionale, ed ha l'ordine $n \leq 9$ (1). Possiamo dunque asserire che:

« *Ogni superficie le cui sezioni piane siano curve ellittiche o è rigata, od è razionale*; e nell'ultimo caso ha l'ordine $n \leq 9$, ed è rappresentabile sul piano mediante un sistema lineare di cubiche con $9-n$ punti base semplici, od anche (per $n=8$) mediante un sistema lineare di quartiche con due punti base doppi ».

(1) Del Pezzo, *Sulle superficie dell'n° ordine immerse nello spazio di n dimensioni* (Rendic. Circolo matem. di Palermo, tomo I).