ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1894

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME III.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1894

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Seduta del 4 febbraio 1894.

F. Brioschi Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle equazioni alle differenze.* Nota [1] del Corrispondente S. Pincherle.

« Nella Nota che ho presentata a questa illustre Accademia nella riunione del 7 gennaio u. s., sotto al medesimo titolo, ho data una regola per la scomposizione in fattori simbolici di prim'ordine di una forma lineare alle differenze dell'ordine r, aggiungendo che quella regola si presta a molte e svariate applicazioni. La presente Nota ha per oggetto di far conoscere, fra tali applicazioni, alcune che spero potranno destare qualche interesse perchè dimostrano come la teoria dalle frazioni continue si presenti, partendo dal concetto della scomposizione in fattori, sotto un aspetto nuovo, semplice, atto ad essere facilmente generalizzato e che somministra nel modo più ovvio le formole per il passaggio delle frazioni continue alle serie e viceversa; riserbandomi di indicare in altra comunicazione come si possano trasportare, nel campo delle forme alle differenze, il complesso dei metodi proprî alla teorica della eliminazione.

« 1. Abbiasi la forma lineare alle differenze dell'ordine r:

$$\text{(1)}\qquad \mathrm{F}(f)=f_{n+r}+a_{1.n}f_{n+r-1}+\dots+a_{r.n}f_n\,,$$

e sia P_n un suo integrale particolare. Nel senso stabilito nella precedente Nota, la F sarà divisibile per la forma di prim'ordine

$$\mathrm{E}=f_{n+1}-\frac{\mathrm{P}_{n+1}}{\mathrm{P}_n}f_n$$

[1] V. pag. 12 di questo volume.

ed indicando con G una forma d'ordine $r-1$ che sappiamo determinare, si potrà porre

(2) $$F = GE.$$

« Essendo ora Q_n un integrale della G, si formi l'equazione

(3) $$f_{n+1} - \frac{P_{n+1}}{P_n} f_n = Q_n ;$$

se ne ricava

(4) $$f_n = P_n \left(c + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{Q_\nu}{P_{\nu+1}} \right) ,$$

dove c è una costante arbitraria; e questa espressione, sostituita nella F, la renderà identicamente nulla. Se dunque Q_n contiene s costanti arbitrarie $(s \leq r-1)$ e dà quindi una varietà lineare ∞^{s-1} di integrali della G, la formola (4) conterrà $s+1$ costanti, dandoci una varietà ∞^s di integrali della F: in particolare, ci darà l'integrale generale di F se Q_n è l'integrale generale di G.

« 2. Consideriamo ora la serie

(5) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{Q_\nu}{P_{\nu+1}}$$

e, supponendola convergente, indichiamone con σ la somma e con σ_n il resto

$$\sigma_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{Q_\nu}{P_{\nu+1}} ;$$

la (4) si potrà allora scrivere essendo C e C′ nuove costanti:

$$f_n = P_n (c + \sigma - \sigma_n) = CP_n + C' P_n \sigma_n .$$

Otteniamo così per la F i due integrali P_n e $P_n \sigma_n$, dotati della proprietà che il rapporto del secondo al primo tende a zero per $n = \infty$.

« Può avvenire in ispecie che, rappresentando Q_n l'integrale generale della forma G, la serie (5) sia convergente. In tale ipotesi $P_n \sigma_n$ costituisce una varietà lineare ∞^{r-2} di integrali di F, aventi la proprietà che il rapporto di uno di essi integrali a qualunque altro non appartenente alla varietà stessa, tende a zero per $n = \infty$.

« 3. Applichiamo questi risultati alla forma del second'ordine

$$F = f_{n+2} + p_n f_{n+1} + q_n f_n .$$

« Detto ancora P_n un suo integrale particolare, la F sarà divisibile per $E = f_{n+1} - \frac{P_{n+1}}{P_n} f_n$, ed il quoziente, come si scorge immediatamente, sarà

$$G = f_{n+1} - \frac{q_n P_n}{P_{n+1}} f_n$$

il cui integrale, indicando con C' una costante arbitraria, è

$$Q_n = C' \frac{q_0 q_1 \dots q_{n-1}}{P_n} .$$

« La formola (4) ci dà pertanto l'integrale generale di F per mezzo dell'espressione

$$(6)\ f_n = P_n \left(C + C' \left(\frac{1}{P_0 P_1} + \frac{q_0}{P_1 P_2} + \frac{q_0 q_1}{P_2 P_3} + \dots + \frac{q_0 q_1 \dots q_{n-2}}{P_{n-1} P_n} \right) \right) ;$$

nel caso poi che la serie

$$(7) \qquad \sigma = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q_0 q_1 \dots q_{\nu-1}}{P_\nu P_{\nu+1}}$$

sia convergente, σ_n essendone il resto e c, c' essendo costanti la (6) diviene:

$$(8) \qquad f_n = c\, P_n + c'\, P_n \sigma_n .$$

Si avverta che

$$\sigma_0 = \sigma + \frac{1}{P_0 P_1} , \quad \sigma_1 = \sigma .$$

« Ecco ora come i risultati ottenuti si collegano alla teoria delle frazioni continue. L'equazione $F = 0$ ammette come integrali i numeratori A_n ed i denominatori B_n delle ridotte della frazione continua

$$\cfrac{q_0}{p_0 - \cfrac{q_1}{p_1 - \cfrac{q_2}{p_2 - \dots}}} ,$$

la quale è convergente se il rapporto $A_n : B_n$, per $n = \infty$, tende ad un limite λ, valore della frazione continua. Essendo, come è noto,

$$A_0 = 1 , A_1 = 0 ,$$
$$B_0 = 0 , B_1 = 1 ,$$

viene

$$P_n \sigma_n = P_0 \sigma_0 A_n + P_1 \sigma_1 B_n ,$$

da cui, per essere $\lim\limits_{n=\infty} \sigma_n = 0$, si ricava

$$P_0 \sigma_0 \lambda + P_1 \sigma_1 = 0 .$$

Onde si ottiene la seguente relazione fra la serie (7) formata con un integrale qualsivoglia P_n della F ed il valore λ della frazione continua:

$$(9) \qquad \lambda = - \frac{P_1^2 \sigma}{P_0 P_1 \sigma + 1} .$$

Prendendo per integrale P_n il sistema B_n dei denominatori delle ridotte, viene $\lambda = - \sigma$, cioè si ritrova lo sviluppo classico della frazione continua in serie, dovuto ad Eulero.

« 4. Suppongasi ora di avere scomposta la forma di second'ordine F nel prodotto di due fattori di prim'ordine:

$$F = E'E = f_{n+2} - (a_{n+1} + b_n) f_{n+1} + a_n b_n f_n ;$$

l'applicazione del metodo indicato qui sopra conduce colla massima facilità a trovare le note formole per la trasformazione delle frazioni continue in serie e viceversa. Infatti, un primo integrale della F ci è dato intanto dall'integrale della E

$$P_n = a_0 a_1 a_2 \dots a_{n-1} ,$$

e la forma $G = f_{n+1} - b_n f_n$ ha per integrale

$$Q_0 = 1 , Q_n = b_0 b_1 \dots b_{n-1} .$$

« La formola (4) diviene pertanto

$$f_n = a_0 a_1 \dots a_{n-1} \left(c + c' \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{b_0 b_1 \dots b_{\nu-1}}{a_1 a_2 \dots a_\nu} \right) . \tag{10}$$

« Nell'ipotesi della convergenza della serie

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_0 b_1 \dots b_{\nu-1}}{a_1 a_2 \dots a_\nu} ,$$

di cui si dirà ancora σ la somma e σ_n il resto, l'integrale generale della F prende la forma

$$f_n = a_0 a_1 \dots a_{n-1} (c + c' \sigma_n)$$

e la frazione continua

$$\lambda = - \cfrac{a_0 b_0}{a_1 + b_0 - \cfrac{a_1 b_1}{a_2 + b_1 - \cfrac{a_2 b_2}{a_3 + b_2 - \dots}}}$$

è convergente ed ha per valore, secondo l'art. precedente:

$$- \frac{P_1^2 \sigma}{P_0 P_1 \sigma + 1} , \text{ ossia } - \frac{a_0^2 \sigma}{a_0 \sigma + 1} .$$

« Considerando pertanto la frazione continua

$$\Lambda = \frac{1}{a_0 + \lambda} = \cfrac{1}{a_0 - \cfrac{a_0 b_0}{a_1 + b_0 - \cfrac{a_1 b_1}{a_2 + b_1 - \dots}}} ,$$

si ha l'uguaglianza notevole

$$\Lambda = \frac{1}{a_0} + \frac{b_0}{a_1} + \frac{b_0 b_1}{a_1 a_2} + \frac{b_0 b_1 b_2}{a_1 a_2 a_3} + \dots\dots , \tag{11}$$

in cui dalla convergenza della serie risulta, come viene dimostrato dallo stesso procedimento seguito, quella della frazione continua e da cui, mediante ipotesi speciali sulle a_n e b_n, si ricavano tutte le svariate formole di riduzione delle serie in frazioni continue, raccolte dallo Stern e riportate dal Novi [1].

« 5 Un caso particolare degno di menzione si ha quando F si può porre sotto forma di prodotto di due fattori di prim'ordine fra loro uguali. In tale caso si scriverà

$$F = E^2 = f_{n+2} - (a_n + a_{n+1}) f_{n+1} + a_n^2 f_n$$

il cui integrale generale viene ad assumere la forma assai degna di nota

$$f_n = a_0\, a_1 \dots a_{n-1} \left(C + C' \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} \right) \right).$$

Quando la serie $\Sigma \frac{1}{a_n}$ è convergente, ed è di conseguenza convergente la frazione continua definita dalla F, si ritrova la nota uguaglianza [2]:

$$\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} = \cfrac{1}{a_0 - \cfrac{a_0^2}{a_0 + a_1 - \cfrac{a_1^2}{a_1 + a_2 - \cdots}}}$$

« 6. Passiamo ora a fare l'applicazione di quanto si è esposto negli art. 1 e 2 alla forma di terzo ordine, che supporremo scomposta nei suoi fattori di prim'ordine e che potremo perciò scrivere:

$$F = E'' E' E =$$
$$= f_{n+3} - (a_{n+2} + b_{n+1} + c_n) f_{n+2} + (a_{n+1} b_{n+1} + a_{n+1} c_n + b_n c_n) f_{n+1} - a_n b_n c_n f_n.$$

« Posto $E'' E' = G$, dove

$$G = f_{n+2} - (b_{n+1} + c_n) f_{n+1} + b_n c_n f_n,$$

l'integrale Q_n sarà dato, per la formola (10) (art. 4), da

$$Q_n = b_0\, b_1 \dots b_{n-1} \left(C' + C'' \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{c_0\, c_1 \dots c_{\nu-1}}{b_1\, b_2 \dots b_\nu} \right); \tag{12}$$

ma l'integrale di F si trova risolvendo la equazione

$$f_{n+1} - a_n f_n = Q_n,$$

epperciò viene dato da

$$f_n = a_0 a_1 \dots a_{n-1} \Bigg[c + c' \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{b_0 b_1 \dots b_{\mu-1}}{a_1 a_2 \dots a_\mu} + \tag{13}$$
$$+ c'' \sum_{\mu=1}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{\mu-1} \frac{c_0\, c_1 \dots c_{\nu-1}\, b_{\nu+1}\, b_{\nu+2} \dots b_{\mu-1}}{a_2\, a_3 \dots a_{\nu+1}\, a_{\nu+2} \dots\dots a_\mu} \Bigg].$$

(1) *Algebra superiore*, pag. 426 e segg. (Firenze, Lemonnier, 1863).
(2) Novi, loc. cit, pag. 429.

« Introduciamo ora l'ipotesi che i numeri a_n, b_n, c_n siano positivi e che le serie

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_0\, b_1 \dots b_{\nu-1}}{a_1\, a_2 \dots a_\nu}\,, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_0\, c_1 \dots c_{\nu-1}}{b_0\, b_1 \dots b_\nu}$$

siano convergenti; indichiamone con σ_1, σ'_1 le somme e con σ_n, σ'_n i resti rispettivi. La (12) si potrà allora scrivere

$$Q_n = b_0\, b_1 \dots b_{n-1}\, (c' + c'' \sigma'_n)$$

e per mezzo di questo integrale di G formando l'integrale di F, si avrà

$$f_n = a_0\, a_1 \dots a_{n-1} \left(c + c' \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{b_0\, b_1 \dots b_{\mu-1}}{a_1\, a_2 \dots a_\mu} + c'' \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{b_0\, b_1 \dots b_{\mu-1}\, \sigma'_\mu}{a_1\, a_2 \dots a_\mu} \right).$$

Ma la serie $\Sigma \frac{b_0\, b_1 \dots b_{\nu-1}}{a_1\, a_2 \dots a_\nu}$ essendo convergente e le σ'_ν essendo, per ipotesi, quantità decrescenti e tendenti a zero, la serie

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{b_0\, b_1 \dots b_{\mu-1}\, \sigma'_\mu}{a_1\, a_2 \dots a_\mu}$$

sarà a fortiori convergente, ed il suo resto potrà porsi sotto la forma $\sigma_n\, \varrho_n$, dove ϱ_n tende a zero per $n = \infty$. La espressione precedente dell'integrale generale di F può quindi trasformarsi in

$$f_n = P_n\, (c_1 + c'_1\, \sigma_n + c_1''\, \sigma_n\, \varrho_n) \tag{14}$$

dove $P_n = a_0\, a_1 \dots a_{n-1}$; cosicchè si hanno per F tre integrali P_n, $P_n\, \sigma_n$ e $P_n\, \sigma_n\, \varrho_n$ dotati della proprietà che il rapporto del secondo al primo e quello del terzo al secondo tendono a zero per $n = \infty$.

« 7. Nella stessa maniera che negli art. 3 e 4 abbiamo poste in relazione le formole d'integrazione della forma di second'ordine colla teoria delle frazioni continue, così noi potremo ora applicare i risultati dell'art. precedente all'algoritmo che delle frazioni continue fornisce la generalizzazione. A tale oggetto, conviene prima dire che cosa intendiamo con *convergenza* di un simile algoritmo.

« Data una forma F di terz'ordine, si consideri il sistema fondamentale d'integrali determinato dai valori iniziali

$$\begin{array}{lll} A_0 = 1, & A_1 = 0, & A_2 = 0, \\ B_0 = 0, & B_1 = 1, & B_2 = 0, \\ C_0 = 0, & C_1 = 0, & C_2 = 1, \end{array}$$

in guisa che ogni altro integrale viene dato da

$$P_n = P_0\, A_n + P_1\, B_n + P_2\, C_n\,; \tag{15}$$

poi si considerino i rapporti $A_n : C_n$, $B_n : C_n$. Quando questi rapporti ammettono per $n = \infty$ i limiti α e β rispettivamente, e di più ammette limite anche il rapporto $B_n - \beta C_n : A_n - \alpha C_n$, e sia γ, si dirà che la F definisce un algoritmo *convergente*. Il limite γ, in questo ordine di idee, ha lo stesso ufficio che spetta, nella teoria delle frazioni continue, al valore della frazione continua stessa.

« Ritornando ora alle formule dell'art. 6, applichiamo la (15) agli integrali P_n, $P_n\sigma_n$, $P_n\sigma_n\varrho_n$; passiamo poi al limite tenendo conto che il limite di σ_n e ϱ_n sono nulli, ed otteniamo così senza difficoltà il valore di γ sotto la forma

$$\gamma = -\frac{P_0\,\sigma_0\,\varrho_0}{P_1\,\sigma_1\,\varrho_1}.$$

Ma $P_0 : P_1 = \dfrac{1}{a_0}$, inoltre, posto

$$S = \sigma_1\,\varrho_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_0 b_1 \dots b_{\nu-1}\sigma'_\nu}{a_1 a_2 \dots a_\nu},$$

si ha

$$\sigma_0\,\varrho_0 = S + \frac{1}{a_0}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{c_0\,c_1 \dots c_{\nu-1}}{b_1\,b_2 \dots b_\nu} + \frac{1}{a_0}$$

onde

$$\gamma = -\frac{\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{c_0\,c_1 \dots c_{\nu-1}}{b_1\,b_2 \dots b} + 1}{a_0^2\,S} - \frac{1}{a_0}. \tag{16}$$

« 8. Aggiungiamo la seguente osservazione. Se una forma F contiene il fattore di prim'ordine $E = f_{n+1} - a_{n-1} f_n$, sappiamo che essa ammette l' integrale $a_0\,a_1 \dots a_{n-1}$. Se ora essa contiene il fattore $E^2 = f_{n+2} - (a_{n+1} + a_n) f_{n+1} + a_n^2 f_n$, è facile vedere che ammette corrispondentemente l' integrale con due costanti arbitrarie

$$f_n = a_0\,a_1 \dots a_{n-1}\left(c + c'\left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots \frac{1}{a_{n-1}}\right)\right). \tag{17}$$

Così se la F contiene il fattore E^3, corrisponderà l' integrale con tre costanti

$$f_n = a_0\,a_1 \dots a_{n-1}\left(c + c'\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{a_\nu} + c''\sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\frac{1}{a_\nu\,a_\mu}\right), \tag{18}$$

e così via.

« In particolare, se F è di terz'ordine e della forma E^3, la (18) ne darà l' integrale generale. L'algoritmo che essa definisce sarà convergente e si potrà applicare la (16) se le serie S e σ'_1, che ora sono

$$\sigma'_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu}, \quad S = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\frac{1}{a_\mu\,a_\nu},$$

si suppongono convergenti ».