ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1894

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME III.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1894

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia prima del 19 agosto 1894.

Matematica. — *Sulle assintotiche delle rigate contenute in una congruenza lineare.* Nota del prof. Giulio Pittarelli, presentata dal Socio Cremona.

« Nelle mie due Note, *Sulle linee assintotiche di una classe di superficie gobbe di genere zero — Sulle linee assintotiche delle superficie gobbe razionali di Cayley*, pubblicate nelle sedute del 10 e del 17 maggio 1891 di cotesta illustre Accademia, trattai di alcune proprietà delle rigate contenute in una congruenza lineare (a direttrici distinte o coincidenti) ma razionali. Per altro quelle proprietà che non traggono la loro ragion d'essere nè dall'algebricità nè dalle razionalità della superficie sussistono per superficie qualunque, algebriche o trascendenti, purchè contenute nella congruenza.

« Ciò mi propongo far vedere in questa e nella Nota seguente.

« In un'altra Nota poi, completando il soggetto di quelle del 1891, parlerò delle rigate algebriche, ma di genere qualunque.

Rigate qualunque.

Congruenza a direttrici distinte.

Se con a_i, b_i indichiamo delle funzioni qualunque di v finite e continue insieme alle loro derivate prime seconde e terze, le eq.[i] di una rigata in coordinate curvilinee u, v sono, com'è notissimo:

1) $x_1 = a_1 u + b_1 , x_2 = a_2 u + b_2 , x_3 = a_3 u + b_3 , x_4 = a_4 u + b_4$

« Tracciando su d'un piano arbitrario due assi coordinati u, v, le rette $v = \text{cost.}$ rappresentano le generatrici, e le rette $u = \text{cost.}$ rappresentano una curva gobba della famiglia delle curve di riferimento sulla superficie

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = a_1 : a_2 : a_3 : a_4$$
$$x''_1 : x''_2 : x''_3 : x''_4 = b_1 : b_2 : b_3 : b_4$$

corrispondenti ai valori $u = \infty$ ed $u = 0$.

« Le coordinate-raggi z_{ij} della generatrice $x'x''$ sono i determinanti della matrice

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix};$$

e se essa appartiene ad un complesso qualunque del fascio

2) $$z_{12} - kz_{34} = 0$$

cioè alla congruenza lineare che ha per direttrici le rette $z_{12} = 0$ $z_{34} = 0$, dovrà aversi identicamente qualunque sia v e k

$$z_{12} \equiv a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \,,\; z_{34} \equiv a_3 b_4 - a_4 b_3 = 0 \,.$$

« L'annullarsi di questi due determinanti, risultanti delle due coppie di forme $x_1 x_2$, $x_3 x_4$, lineari in u, date dalle 1), prova che possiamo porre

$$a_1 = \varphi_1 a \,,\; b_1 = \varphi_1 b \,,\; a_2 = \varphi_2 a \,,\; b_2 = \varphi_2 b$$
$$a_3 = \varphi_3 c \,,\; b_3 = \varphi_3 d \,,\; a_4 = \varphi_4 c \,,\; b_4 = \varphi_4 d$$

dove a, b, c, d e φ_i sono funzioni di v.

« Segue da ciò che alle 1) dobbiamo dar la forma:

3) $$x_1 = \varphi_1(au + b) \,, x_2 = \varphi_2(au + b) \,, x_3 = \varphi_3(cu + d) \,, x_4 = \varphi_4(cu + d).$$

« È da notare che il determinante $ad - bc$ non può esser identicamente zero; perchè altrimenti le due forme $au + b$, $cu + d$ differirebbero per un fattore λ (costante o funzione di v) e le 2) diverrebbero, includendo l'unico binomio $au + b$ nel fattore di proporzionalità delle coordinate,

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \varphi_1 : \varphi_2 : \lambda\varphi_3 : \lambda\varphi_4 :$$

e queste eq.[i] rappresentano una curva, non una superficie.

« Dalle 2) possiamo trarre, eliminando i binomî in u,

4) $$\varphi_2 x_1 - \varphi_1 \varphi_2 = 0 \,,\; \varphi_4 x_3 - \varphi_3 x_4 = 0 \,,$$

che rappresentano piani passanti per una generatrice $v = \text{cost.}$ e per le direttrici $x_1, x_2 = 0$, $x_3, x_4 = 0$ della congruenza. L'eliminazione di v tra le 3) conduce all'eq.[e] della superficie

$$\mathrm{U}(x_1 , x_2 , x_3 , x_4) = 0 \,;$$

possiamo anzi dire che le forma dell'eq.[e] dev'essere la

$$\mathrm{V}\left(\frac{x_1}{x_2} , \frac{x_3}{x_4}\right) = 0 \,,$$

del tipo conoidale.

« La natura della superficie dipende soltanto dalle funzioni φ_i o, meglio, da' rapporti $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \frac{\varphi_4}{\varphi_3}$ che, in sostanza, sono le coordinate binarie dei piani mobili con v nei due fasci 4). Perciò non può essere nè contemporaneamente, nè separatamente:

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)=0\ ,\ \frac{d}{dv}\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_4}\right)=0$$

identicamente. Infatti, se avesse luogo per es. la prima identità, il rapporto $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ sarebbe indipendente da v; onde il primo dei piani 3) sarebbe fisso, e la rigata si ridurrebbe al fascio di rette segnate su quel piano fisso dal secondo piano (mobile) 4). E nè anche può essere

$$\varphi_1\,\varphi_4-\varphi_2\,\varphi_3\equiv 0:$$

altrimenti la superficie diverrebbe l'iperboloide

$$x_1\,x_4-x_2\,x_3=0\ ,$$

che vogliamo escludere dai nostri ragionamenti. (I fasci 4) sarebbero projettivi).

« Ritenendo definite le coordinale ξ_i di un piano ξ dall'eq.^{e}

$$\xi_x=\xi_1\,x_1+\xi_2\,x_2+\xi_3\,x_3+\xi_4\,x_4=0\ ,$$

l'eq.^{e} del punto 3) della superficie è

$$(\varphi_1\,\xi_1+\varphi_2\,\xi_2)\,(au+b)+(\varphi_3\,\xi_3+\varphi_4\,\xi_4)\,(cu+d)=0\ .$$

« Essa è l'eq.^{e} di un punto sulla retta che unisce i due corrispondenti ad $u=0$ $u=\infty$

$$(\varphi_1\,\xi_1+\varphi_2\,\xi_2)\,a+(\varphi_3\,\xi_3+\varphi_4\,\xi_4)\,b=0$$
$$(\varphi_1\,\xi_1+\varphi_2\,\xi_2)\,c+(\varphi_3\,\xi_3+\varphi_4\,\xi_4)\,d=0$$

o anche, poichè $ad-bc\lesseqgtr 0$, sulla retta che unisce i punti

5) $$\varphi_1\,\xi_1+\varphi_2\,\xi_2=0\ ,\ \varphi_3\,\xi_3+\varphi_4\,\xi_4=0\ ,$$

il primo dei quali è situato sulla retta $x_3\,,x_4=0$, il secondo sulla retta $x_1\,,x_2=0$ direttrici della congruenza.

« Le 5) hanno la stessa forma (duale) delle 4). Si trae da ciò che l'eq.^{e} della sup. in coordinate di piani si ottiene dalle $\mathrm{U}=0\,,\mathrm{V}=0$ ponendo in queste, al posto di $x_1\,,x_2\,,x_3\,,x_4$ rispettivamente $\xi_2\,,-\xi_1\,,\xi_4\,,-\xi_3$; e si ha dunque

$$\mathrm{U}\,(\xi_2\,,-\xi_1\,,\xi_4\,,-\xi_3)=0\ ,\ \text{ovvero}\ \mathrm{V}\left(-\frac{\xi_2}{\xi_1}\,,-\frac{\xi_4}{\xi_3}\right)=0\ .$$

« L'eq.^{e} del piano tangente nel punto x, dinotando con y_i le coordinate correnti e con accenti le derivate rispetto a v, è:

$$(cu+d)(\varphi_4\varphi'_3-\varphi_3\varphi'_4)(\varphi_2y_1-\varphi_1y_2)-(au+b)(\varphi_2\varphi'_1-\varphi_1\varphi'_2)(\varphi_4y_3-\varphi_3y_4)=0.$$

« Ponendo per brevità

6) $$au+b=f\ ,\ cu+d=g$$
$$\varphi_2\,\varphi'_1-\varphi_1\varphi'_2=\mathrm{F}\ ,\ \varphi_4\,\varphi'_3-\varphi_3\,\varphi'_4=\mathrm{G}$$

scriveremo la precedente eq.^{e} così:

$$7) \qquad g\,G(\varphi_2 y_1 - \varphi_1 y_2) - f\,F(\varphi_4 y_3 - \varphi_3 y_4) = 0\,.$$

« Scriviamo adesso l'eq^e. del piano polare dello stesso punto x rispetto al complesso 2)

$$8) \qquad f(\varphi_2 y_1 - \varphi_1 y_2) - kg(\varphi_4 y_3 - \varphi_3 y_4) = 0\,.$$

Identificando questa all'eq.^{e} precedente, il punto di contatto x sarà un punto di quell'assintotica che corrisponde al dato valor di k (costante d'integrazione); e ciò per il ben noto teorema di Lie ch'io richiamai nella prima delle mie Note ricordate.

« Per questa identificazione si avrà:

$$9) \qquad Ff^2 - k\,G\,g^2 = 0\,,$$

ch'è l'eq.^{e} in coordinate curvilinee u, v dell'assintotica A_k, corrispondente a k.

« Le espressioni parametriche in funzione di v delle coordinate dei punti della curva A_k si ottengono eliminando tra le 3) e la 9) il parametro u, e, cioè, il rapporto $f:g$. Si trova così:

$$9^{bis}) \qquad x_1 : x_2 : x_4 : x_5 = \varphi_1 \sqrt{kG} : \varphi_2 \sqrt{kG} : \varphi_3 \sqrt{F} : \varphi_4 \sqrt{F}$$

dove ad uno dei due radicali si deve dare il doppio segno $\pm$. Ma anche le 9^{bis}) si possono far dipendere da' soli rapporti

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \mu(v) = \mu\,, \quad \frac{\varphi_3}{\varphi_4} = \nu(v) = \nu\,,$$

dovendo essere $\mu - \nu = \dfrac{\varphi_1 \varphi_4 - \varphi_2 \varphi_3}{\varphi_2 \varphi_4} \gtrless 0$, come fu osservato.

« Infatti dalle espressioni 6) di F e G si trae

$$10) \qquad F = \varphi_2^2 \frac{d\mu}{dv} = \varphi_2^2 \mu'\,, \quad G = \varphi_4^2 \frac{d\nu}{dv} = \varphi_4^2 \nu'$$

donde poi, sostituendo in 9^{bis}), si ha subito:

$$11) \qquad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \mu \sqrt{k\nu'} : \sqrt{k\nu'} : \nu \sqrt{\mu'} : \sqrt{\mu'}\,.$$

« Se μ è una funzione algebrica di ν, cioè se tra μ e ν esiste una relazione della forma

$$\Phi\left(\overset{m}{\mu}, \overset{n}{\nu}\right) = 0$$

di grado m in μ e di grado n in ν, allora, poichè le derivazioni non introducono trascendenti. le curve 11) saranno algebriche. Questo caso sarà trattato nella Nota in cui parlerò delle rigate algebriche.

« Il fatto che la 9) sia di 2° grado in u e che, perciò, l'assintotica A_k incontri in due punti una generatrice qualunque v delle superficie, trova la spiegazione geometrica in ciò che, come osservò Klein, ad un piano ξ per la generatrice v della superficie corrispondono projettivamente due punti, l'uno x di contatto con le superficie, l'altro x_1 come polo del piano stesso rispetto al complesso 2). I punti x ed i punti x_1 formano due punteggiate projettive su v, i cui punti uniti, appartengono all'assintotica, pel teorema di Lie. E dualmente.

« La forma delle 9) e 9^{bis}) mostra che le funzioni F e G si annullano per quei valori di v i quali danno generatrici toccate dalle A_k, ed i punti di contatto sono sull'una o sull'altra delle direttrici rettilinee. Si trae pure, dal doppio segno di uno dei due $\sqrt{\ }$, che sopra una generatrice qualunque v i due punti comuni ad essa ed all'assintotica A_k ed i due ne' quali essa incontra le direttrici rettilinee formano un gruppo armonico; e variando k la prima coppia forma un involuzione i cui elementi doppî sono quelli della seconda coppia: l'eq.^{e} dell'involuzione è

$$(\varphi_1 \xi_1 + \varphi_2 \xi_2)^2 k \, G - (\varphi_3 \xi_3 + \varphi_4 \xi_4)^2 F = 0 ,$$

ed ai valori $k = 0$ o $k = \infty$ corrispondono l'uno o l'altro dei due punti $\varphi_3 \xi_3 + \varphi_4 \xi_4 = 0$, $\varphi_1 \xi_1 + \varphi_2 \xi_2 = 0$ delle direttrici rettilinee. La 9) mostra allora che, poichè v è data, le assintotiche corrispondenti sono fornite dalle eq.^{i} $f^2 = 0$, $g^2 = 0$ che danno precisamente le due direttrici rettilinee, ciascuna contata due volte. Le generatrici, per contrario, toccate da una A_k nei punti situati sulle predette direttrici sono le generatrici *singolari* delle superficie, per le quali appunto F e G si annullano. Ed infatti per queste generatrici singolari varrano le eq.^{i} 4) insieme alle loro derivate rispetto a v

$$\varphi'_2 x_1 - \varphi'_1 x_2 = 0 , \quad \varphi'_4 x_3 - \varphi'_3 x_4 = 0 ,$$

« Le quattro eq^i. devono coesistere, onde

$$0 = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & 0 & 0 \\ \varphi'_1 & \varphi'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_3 & \varphi_4 \\ 0 & 0 & \varphi'_3 & \varphi'_4 \end{vmatrix} = FG .$$

« Data sempre la generatrice v, consideriamo sovra di essa i due punti comuni coll'assintotica A_k, i cui parametri u_k, u'_k saranno le radici dell'eq^e. 9) quadratica in u, ed una coppia di punti di parametri uu_1 coniugati armonici con quelli della prima. I parametri u ed u_1 saranno legati tra loro dall'eq.^{e} prima polare di 9), cioè dalla

$$\text{12)} \qquad F f_1 f - k \, G g_1 g = 0$$

dove $f = au + b$, $f_1 = au_1 + b$ ecc.

« La 12) permette di scrivere l'eq.^{e} 7) del piano tangente nel punto di parametri u, v co' parametri u_1, v; basta per questo eliminare tra le due il rapporto $Ff : Gg$: e si ha

$$\text{13)} \qquad f_1 (\varphi_2 y_1 - \varphi_1 y_2) - k g_1 (\varphi_4 y_3 - \varphi_3 y_4) = 0 .$$

« Or questa è la 8) scritta co' parametri u_1, v: essa dunque rappresenta il piano polare del punto u_1, v rispetto al complesso 2). Con l'aiuto di questa eq.^{e} noi possiamo scrivere le espressioni delle coordinate del piano tangente nel punto u, v sotto forma molto più semplice di quella che si avrebbe dalla 7): esse sono

$$\xi_1 = \varphi_2 f_1 \, , \; \xi_2 = - \varphi_1 f_1 \, , \; \xi_3 = - k \varphi_4 g_1 \, , \; \xi_4 = k \varphi_3 g_1 \, ,$$

e, come si vede, hanno la stessa struttura delle coordinate x_i del punto di contatto x; salvo che nelle espressioni f e g figura non già il parametro u ma quello u_1 coniugato armonico di esso rispetto ad $u_k u'_k$ (il parametro v è lo stesso, perchè la generatrice non muta in questo discorso). Segue che se noi scriviamo (col parametro u)

14) $$\eta_1 = \varphi_2 f \, , \; \eta_2 = - \varphi_1 f \, , \; \eta_3 = - k \varphi_4 g \, , \; \eta_4 = k \varphi_3 g$$

saranno queste le coordinate del piano polare del punto u, v rispetto al complesso, ma anche del piano tangente alla superficie nel punto coniugato armonico di uv rispetto ai due $u_k, v ; u'_k, v$. Dalle 14) e dalle 3) noi tragghiamo

14bis) $$x_1 = - \eta_2 \, , \; x_2 = \eta_1 \, , \; x_3 = - \frac{1}{k} \eta_4 \, , \; x_4 = \frac{1}{k} \eta_3$$

che stabiliscono la giù generale reciprocità rispetto al complesso che muta la rigata e l'assintotica A_k in se stessa [1].

« Possiam dunque concludere:

« Nel piano (uv) la 12) definisce una trasformazione involutoria di 2° ordine, le cui coppie di punti sono sulle rette del fascio $v =$ cost.: la curva unita dell'involuzione è la curva 9), immagine dell'assintotica arbitraria A_k. Ad un punto u, v del piano corrisponderà sulla superficie un punto u, v ed un piano u, v polare del complesso 2) che la toccherà nel punto u_1, v coniugato armonico di u, v rispetto ai punti nei quali la generatrice v è tagliata dall'assintotica A_k.

« Per ogni assintotica si ha una trasformazione involutoria nel piano ed una trasformazione reciproca della superficie in se stessa, per la quale l'assintotica non muta. Vi sono ∞^1 di tali trasformazioni.

« Reggono dunque le conclusioni di questa mia Nota; soltanto quì non si può parlare di rappresentazione nel senso stretto (di Clebsch) cioè di rappresentazione biunivoca; e la trasformazione involutoria non si può dire di Jonquières, perchè la curva 9) non è algebrica ».

[1] Una particolare fu trovata esaminando le eq.[i] 4) e 5); essa corrisponde a $k = 1$.