ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI

1894

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME III.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1894

e si avrà tenendo conto delle formole trovate

$$X_1 = \frac{1}{a^2} \left\} 1 + by(p-f) \right\}^2 \left\{ \alpha^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{y}{x}\right) + b\, \frac{y}{x^2} (pf' - p'f) \right) - \mathrm{F} y f\left(\frac{y}{x}\right) \right\}$$

$$Y_1 = \frac{1}{a^2} \left\} 1 + by(p-f) \right\}^2 \left\{ \alpha^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x^2} p'\left(\frac{y}{x}\right) + b\, \frac{y}{x^2} (pf' - p'f) \right) - \mathrm{F} y p\left(\frac{y}{x}\right) \right\}$$

« Si potrebbe ancora vedere in qual caso anche queste forze saranno centrali ».

Matematica. — *Sulla superficie del 5° ordine con 5 punti tripli ed una cubica doppia.* Nota di A. Del Re, presentata dal Socio Cremona.

« In questa 3ª Nota sulla superficie del 5° ordine con 5 punti tripli ed una cubica doppia, io mi propongo di aggiungere, a quelle già sviluppate in due Note precedenti [1], altre proprietà. Queste riguardano la costruzione della superficie, in cinque diversi modi, col mezzo di forme proiettive; la formazione di cinque connessi punto-piano (1, 2) di ciascuno dei quali si presenta come superficie fondamentale; la formazione, in due modi diversi, dell'equazione della superficie, e la ricerca degli invarianti assoluti proiettivi. In ultimo indico la costruzione delle omografie che cangiano l'una nell'altra due superficie siffatte, quando è soddisfatta l'uguaglianza fra detti invarianti.

« Siccome, per non fare inutili ripetizioni, mi occorre spesso di citare formule, e risultati, già stabiliti nelle suddette Note, indicherò queste rispettivamente con N I, N II.

§ I.

« 1. I cinque connessi punto-piano (1, 2) a cui ho fatto cenno al principio del § VI (n. 16) della N II, e di ciascuno dei quali la superficie può essere riguardata come fondamentale, si ottengono nel modo seguente, dal quale abbiamo anche altri modi di costruzione della superficie per forme proiettive.

« Fissiamo una qualunque delle 5 distinte reti di quadriche, di cui si è discorso al n. 13, N II, e sia, p. es., la $\lambda f^{(i)} + \mu\varphi^{(i)} + \nu\psi = 0$ ivi considerata. Le quadriche polari delle rette m di A_i rispetto al fascio $\lambda f^{(i)} + \mu\varphi^{(i)} = 0$ formano una rete particolare, la cui base si compone della polare b_i rispetto a questo fascio, e dei 4 punti A_k, A_l, A_m, A_n. Le quadriche di questa rete, e le rette m, sono fra loro riferite proiettivamente, ed i punti M, M', fuori

[1] Cfr. questi Rend. vol. II, 2° sem., serie 5ª, fasc. 4 e 5.

di A_i, nei quali m incontra ulteriormente la superficie, sono tali che i loro piani polari rispetto a $\psi = 0$ sono tangenti alla quadrica corrispondente della m. Cosicchè, mutando, per polarità rispetto a $\psi = 0$, la rete ora considerata, quella quadrica si muterà in un'altra della rete tangenziale ottenuta dalla trasformazione, la quale avrà comuni con m precisamente i punti M, M'. Fra m e questa quadrica vi sarà frattanto corrispondenza proiettiva, e noi quindi possiamo enunciare il risultato seguente, il quale, come dicevamo, fornisce nuovi modi di costruzione della superficie, cioè:

« Vi sono 5 modi diversi di produrre la superficie come luogo delle intersezioni delle rette di una stella, col centro in un punto triplo, e le quadriche di una rete tangenziale la cui base è formata dalle facce del tetraedro dei rimanenti punti tripli, e della retta b della superficie.

« Fra le quadriche di questa rete vi sono le 4 coppie di punti costituite da un vertice del tetraedro dei piani a cui esse sono tangenti, e dal punto in cui b taglia la faccia opposta. Fra le rette della stella proiettiva, vi sono poi le 4 rette che proiettano i vertici di quel tetraedro, e che corrispondono ordinatamente a quelle quadriche. Siccome una corrispondenza proiettiva fra due forme di 2^a specie, è individuata dal dare 4 coppie di elementi corrispondenti, così si ricava di nuovo i 5 punti tripli e la retta b individuano la superficie (cfr. N I, n. 5).

« 2. Formiamo le equazioni delle 5 corrispondenze proiettive suddette; e, per semplicità, riferiamoci alle (2) e (3) della N I. I punti di una retta per ξ_i saranno dati, quando s'indichino con $\tau_1 : \tau_2 : \tau_3$ due parametri variabili con la retta, e con σ un parametro variabile con un punto di questa, dalle formule:

$$z_1 = \sigma\xi_1 + \tau_1\,, \quad z_2 = \sigma\xi_2 + \tau_2\,, \quad z_3 = \sigma\xi_3 + \tau_3\,, \quad z_4 = \sigma\xi_4 \tag{1}$$

perciò, il piano polare di ognuno di questi punti, rispetto alla (2) cit., avrà per equazione

$$\lambda\,(\sigma f_{\xi x} + f_{\tau x}) + \mu\,(\sigma\varphi_{\xi x} + \varphi_{\tau x}) = 0\,,$$

avendo posto:

$$g_{\xi x} = \sum_1^4 g_i\,\xi_i\,x_i\,, \quad g_{\tau x} = \sum_1^3 g_i\,\tau_i\,x_i \quad (g \equiv f, \varphi).$$

« Cosicchè dovrà essere, indipendentemente da σ:

$$\sigma f_{\xi x} + f_{\tau x} = 0\,, \quad \sigma\varphi_{\xi x} + \varphi_{\tau x} = 0\,,$$

e ciò richiede che si abbia:

$$f_{\xi x}\,\varphi_{\tau x} - f_{\tau x}\,\varphi_{\xi x} = 0. \tag{2}$$

« Se si osserva che

$$f_1x_1 \cdot \varphi_{\xi x} - \varphi_1 x_1 \cdot f_{\xi x} = (f\varphi)_{12} \cdot \xi_2 x_1 x_2 + (f\varphi)_{13} \cdot \xi_3 x_1 x_3 + (f\varphi)_{14} \cdot \xi_4 x_1 x_4$$
$$f_2x_2 \cdot \varphi_{\xi x} - \varphi_2 x_2 \cdot f_{\xi x} = (f\varphi)_{21} \cdot \xi_1 x_1 x_2 + (f\varphi)_{23} \cdot \xi_3 x_2 x_3 + (f\varphi)_{24} \cdot \xi_4 x_3 x_4$$
$$f_3x_3 \cdot \varphi_{\xi x} - \varphi_3 x_3 \cdot f_{\xi x} = (f\varphi)_{31} \cdot \xi_1 x_1 x_3 + (f\varphi)_{32} \cdot \xi_2 x_2 x_3 + (f\varphi)_{34} \cdot \xi_4 x_3 x_4$$

e si pone $(f\varphi)_{ik} = A_{ik}$ $(ik = 12, \dots, 34)$ potremo scrivere la (2) nella forma

$$\begin{aligned} &\tau_1 \{ A_{12}\xi_2 . x_1 x_2 - A_{31}\xi_3 . x_1 x_3 + A_{14}\xi_4 . x_1 x_4 \} \\ +&\tau_2 \{ -A_{12}\xi_1 . x_1 x_2 + A_{23}\xi_3 . x_2 x_3 + A_{24}\xi_4 . x_2 x_4 \} \\ +&\tau_3 \{ A_{31}\xi_1 . x_1 x_3 - A_{23}\xi_2 . x_2 x_3 + A_{34}\xi_4 . x_3 x_4 \} = 0 \end{aligned} \qquad (2')$$

da cui segue che, mutando per polarità rispetto alla (3) cit., conformemente a quanto si è detto nel n. precedente, e ponendo:

$$\begin{aligned} &\chi_1 \{ A_{12}\xi'_2 . u_1 u_2 - A_{31}\xi'_3 . u_1 u_3 + A_{14}\xi'_4 . u_1 u_4 \} = \Phi_1 \\ &\chi_2 \{ -A_{12}\xi'_1 . u_1 u_2 + A_{23}\xi'_3 . u_2 u_3 + A_{24}\xi'_4 . u_3 u_4 \} = \Phi_2 \quad (\xi'_i = \chi_i \xi_i ,\ i = 1, \dots, 4) \\ &\chi_3 \{ A_{31}\xi'_1 . u_1 u_3 - A_{23}\xi'_2 . u_2 u_3 + A_{34}\xi'_4 . u_3 u_4 \} = \Phi_3 \end{aligned}$$

si avrà l'equazione:

$$\tau_1 \Phi_1 + \tau_2 \Phi_2 + \tau_3 \Phi_3 = 0 \qquad (3)$$

della rete tangenziale di quadriche che, insieme alla stella di rette (1), e corrispondentemente ai medesimi sistemi di valori dei parametri $\tau_1 : \tau_2 : \tau_3$, produce la superficie.

« 3. Poniamo ora:

$$\tau_1 \chi'_{12} A_{12}\xi_2 - \tau_2 \chi'_{12} A_{12}\xi_1 = B_{12}, \quad -\tau_1 \chi'_{31} A_{31}\xi_3 + \tau_3 \chi'_{31} A_{31}\xi_1 = B_{31},$$
$$\tau_2 \chi'_{23} A_{23}\xi_3 - \tau_3 \chi'_{23} A_{23}\xi_2 = B_{23}$$
$$(\tau_1 \chi'_{14} A_{14},\ \tau_2 \chi'_{24} A_{24},\ \tau_3 \chi'_{34} A_{34})\xi_4 = B_{14}, B_{24}, B_{34} \ (\chi'_{ik} = \chi_i \chi_k ;\ ik = 12, \dots, 34)$$

avremo la (3) nella forma:

$$B_{12} . u_1 u_2 + B_{23} . u_2 u_3 + B_{31} . u_3 u_1 + B_{14} . u_1 u_4 + B_{24} . u_2 u_4 + B_{34} . u_3 u_4 = 0. \qquad (4)$$

« Rimpiazziamo in questa i valori

$$\tau_1 = x_1 \xi_4 - x_4 \xi_1 , \quad \tau_2 = x_2 \xi_4 - x_4 \xi_2 , \quad \tau_3 = x_3 \xi_4 - x_4 \xi_3 \qquad (\mu)$$

che si cavano dalle (1) dopo di che diciamo B'_{ik} ciò che diventa B_{ik} per tale sostituzione. Avremo l'equazione

$$\Sigma B'_{ik} u_i u_k = 0 \quad (i \neq k ;\ i, k = 1, \dots, 4) \qquad (5)$$

che è quella di un connesso punto-piano (1, 2) di cui la superficie è fondamentale. Noi abbiamo dunque così questo interessante risultato:

« *La superficie è fondamentale per 5 diversi connessi punto-piano (1, 2) specializzati, le cui equazioni si possono ridurre tutte al tipo (5).*

« Da questo risultato si cava che una forma dell'equazione della superficie è:

$$\begin{vmatrix} 0 & B'_{12} & B'_{31} & B'_{14} & x_1 \\ B'_{12} & 0 & B'_{23} & B'_{24} & x_2 \\ B'_{31} & B'_{23} & 0 & B'_{34} & x_3 \\ B'_{14} & B'_{24} & B'_{34} & 0 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad (6)$$

che può anche essere scritta nella forma

$$\begin{vmatrix} 0 & A_{12}p_{12} & A_{31}p_{31} & A_{14}p_{14} & x_1 \\ A_{12}p_{12} & 0 & A_{23}p_{23} & A_{24}p_{24} & x_2 \\ A_{31}p_{31} & A_{23}p_{23} & 0 & A_{24}p_{24} & x_3 \\ A_{14}p_{14} & A_{24}p_{24} & A_{34}p_{34} & 0 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad (7)$$

dove si è supposto $\chi_i = 1$ $(i = 1, \ldots, 4)$, il che è lecito (n. 13, N II), si sono indicate con p_{ik} le coordinate della retta che unisce il punto x_i della superficie al punto triplo ξ_i, e dove le costanti A_{ik} soddisfanno alla condizione

$$A_{12}\,A_{34} + A_{23}\,A_{14} + A_{31}\,A_{24} = 0.$$

« 4. È da osservarsi che questa 2ª forma dell'equazione della superficie si può cavare direttamente dalla (2′) scrivendo dapprima tangenzialmente l'equazione del sistema di quadriche da queste rappresentate, poi ponendo al posto delle τ_1, τ_2, τ_3 i valori (μ), con che si cade sull'equazione di un connesso piano retta (2, 3) (¹), e poi facendo le sostituzioni $x_i = u_i$ $(i = 1, \ldots 4)$, ciò che concorda con quanto dicemmo più in generale nella Nota: « *Altre proprietà* ecc. » (questi Rend., nov. 1892).

§ II.

« 5. Cerchiamo ora gli invarianti assoluti della superficie, rispetto al gruppo lineare. Se dalla retta b proiettiamo i 5 punti tripli $A_1, \ldots, A_5$, avremo i 5 rapporti anarmonici

$$b\,(A_1\,A_2\,A_3\,A_4),\quad b\,(A_1\,A_2\,A_3\,A_5)\,, \ldots , b\,(A_2\,A_3\,A_4\,A_5)$$

di cui due soltanto sono indipendenti, poichè detti ordinatamente $\lambda_5, \lambda_4, \ldots, \lambda_1$ si hanno le note relazioni:

$$\lambda_1\,\lambda_2 + \lambda_4 = \lambda_2\,\lambda_3 + \lambda_5 = \lambda_3\,\lambda_4 + \lambda_1 = \lambda_4\,\lambda_5 + \lambda_2 = \lambda_5\,\lambda_1 + \lambda_3 = 1.$$

« Ora, dato il pentagono dei punti tripli, due qualunque di questi rapporti anarmonici non fissano la retta b ma *assicurano* soltanto che questa è fra le corde di una certa cubica φ circoscritta a quel pentagono. Per fissare b occorre dunque dare i suoi punti di appoggio su questa cubica, cioè due altri rapporti anarmonici se la cubica è doppia per la superficie, ed uno soltanto se è cuspidale. Ne concludiamo che la superficie ha 4 o 3 invarianti assoluti secondochè la cubica φ è per essa doppia o cuspidale.

« Possiamo trovare sul piano rappresentativo (cfr. N I, § II) che cosa valgono questi invarianti assoluti. Per i due ultimi rapporti anarmonici sunnominati

(¹) Questo connesso è quello che ci ha condotti alle formule (1) della N I, e quindi anche uno dei 5 di cui è parola ai n.ⁱ 13 e 16 della N II.

si possono prendere quelli che i punti di appoggio della b sulla φ fanno con 3 dei 5 punti tripli. Ora la φ è rappresentata dai punti delle rette e, f e queste, insieme ai lati del pentalatero 12...5 che rappresentano i punti tripli, sono tangenti ad una stessa conica, la $\mathcal{A}$. Ne segue che dei rapporti anarmonici sunnominati, due sono quelli, indipendenti, del pentalatero 12...5 e gli altri sono quelli delle rette e, f con 3 dei lati di esso. Si vede così che corrispondentemente alle trasformazioni lineari che mutano il sistema rappresentativo di una superficie S, come quella che stiamo studiando, nel sistema rappresentativo di un'altra tale superficie S', quando è soddisfatta l'uguaglianza fra il numero ed il valore degli invarianti assoluti, si hanno trasformazioni lineari di S in S'. Cerchiamo ora direttamente queste trastormazioni.

« 6. Diciamo A_i, A'_i $(i = 1, \ldots, 5)$ i rispettivi punti tripli di S, S'; b, b' le rette fuori di essi punti; φ, φ' le cubiche doppie; H_i, H'_i $(i=1,2)$ i punti $b.\varphi$, $b'.\varphi'$. Queste cubiche sono individuate dai primi due degli invarianti assoluti relativi a ciascuna superficie, e di cui si è discorso al n. precedente, perchè ciascuna si presenta come linea focale del sistema di rette (1, 3) ulteriore sezione di due complessi tetraedrali i cui tetraedri fondamentali hanno in comune tre vertici; perciò, in qualunque modo, ma con riguardo alla genesi di φ, φ' omograficamente, si passi dal pentagono $A_1 \ldots A_5$ al pentagono $A'_1 \ldots A'_5$, allo stesso modo si passerà dalla cubica φ alla cubica φ'. — Ora, si supponga che l'uguaglianza degli invarianti assoluti segua così che si abbia:

$$b\,(A_1\,A_2\,A_3\,A_4\,A_5) \barwedge b'\,(A'_1 A'_2\,A'_3\,A'_4\,A'_5)$$

$$(A_i\,A_k\,A_l\,H_p) = (A'_i\,A'_k\,A'_l\,H'_p) \qquad (p = 1, 2)$$

sulle cubiche φ, φ' si avranno le serie proiettive

$$A_1\,A_2 \ldots A_5\,H_1\,H_2 \barwedge A'_1 A'_2 \ldots A'_5\,H'_1\,H'_2$$

epperò l'omografia spaziale

$$\Omega \equiv \frac{A_1\ \ A_2\ \ A_3\ \ A_4\ \ A_5}{A'_1\,A'_2\,A'_3\,A'_4\,A'_5}$$

farà corrispondere al puntô H_p il punto H'_p $(p = 1, 2)$; cosicchè muterà anche b in b'. Se ne conclude, in virtù di quanto si disse nel numero 5 della NI, ed in fine del prec. n.° 1, che Ω muta S in S', e quindi, il risultato seguente:

« L'uguaglianza degli invarianti assoluti indipendenti delle superficie S, S' porta seco l'esistenza, in generale, di un'omografia che cangia S in S'. Ed in particolare:

« La superficie che stiamo studiando non ammette, in generale, trasformazioni lineari in sè, diverse dall'identità.

« 7. Per giustificare l'*in generale* con cui abbiamo creduto accompagnare gli enunciati precedenti, supponiamo, p. es., che su φ sia H_1 l'armonico di A_3 ed H_2 l'armonico di A_4 rispetto ad $A_1 A_2$; allora evidentemente sarà:

$$\Omega_1 \equiv \frac{A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5}{A_2\ A_1\ A_4\ A_3\ A_5}\begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2 & H_1 \end{pmatrix}$$

un'omografia che cangia S in sè stessa; e sarà perciò allora $\Omega_1\ \Omega$ un'altra omografia, diversa dalla Ω, che cangia S in S' ».

Elettricità. — *Sulla determinazione delle costanti dielettriche col mezzo delle oscillazioni rapide* (1). Nota del dott. ADOLFO CAMPETTI, presentata dal Corrispondente NACCARI.

1. Allorquando, adottando la disposizione di Lecher, si siano determinati i nodi delle oscillazioni elettriche che si propagano lungo i fili secondarî, si osserva facilmente che qualunque cambiamento, sia della capacità, sia dell'autoinduzione del primario o del secondario porta con sè un cambiamento nel sistema delle onde, cambiamento che si rende manifesto collo spostamento dei nodi. A questo proposito si hanno, fra le altre, esperienze di Cohn ed Heerwagen (2), Salvioni (3), Ebert e Wiedemann (4).

« Approfittando di tali fenomeni, ho pensato che si potrebbero facilmente determinare o confrontare la capacità di dati condensatori in queste condizioni, ed avere quindi un metodo abbastanza semplice di determinare costanti dielettriche per durate di carica così brevi. Ma prima di occuparmi di tale argomento credo opportuno di far vedere come ci si possa render conto dello spostamento dei nodi prodotto dall' inserire una capacità in un punto qualunque del secondario. A tale scopo basterà, come in caso analogo ha fatto anche il Salvioni, partire dai due postulati richiamati e giustificati dal Cohn ed Heerwagen (l. c.) e cioè: a) *L'energia dei due sistemi* (*fili e condensatore*) *ha una somma indipendente dal tempo*; b) *La differenza di potenziale tra le estremità dei fili attaccati al condensatore è uguale alla differenza di potenziale tra le lastre del condensatore*; ed applicare poi al nostro sistema le espressioni date dagli autori per la differenza di potenziale

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica dell'Università di Torino.
(2) Cohn e Heerwagen, Wied. 43, 1891.
(3) Salvioni, Rendiconti dei Lincei 1892.
(4) Ebert und Wiedemann, Wied. Ann. 48, 1893.