# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1894

---

SERIE QUINTA

---

# RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME III.**

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1894

possibilità di trarre dalla crioscopia, dalla termochimica e dai mutamenti di volumi che accompagnano le soluzioni, nuovi criterî per stabilire l'esistenza di aggregati molecolari e forse anche di determinare la massima complessità.

« Noi continueremo queste ricerche del resto appena iniziate e non solo ci occuperemo dei mutamenti di volumi che accompagnano il miscuglio dei varî liquidi, ma l'estenderemo al miscuglio di liquidi e solidi, studiando parallelamente i fenomeni termici, che senza dubbio molto varranno a chiarire l'argomento.

« Nelle ricerche sui miscugli dei liquidi, a rendere più facile la parte sperimentale, sostituiremo alla benzina il toluene il quale ha il vantaggio di bollire al disopra di 100° e di non solidificarsi a 0°. Ragioni di analogia ci fanno fondatamente supporre che il toluene, come la benzina, non ha potere disgregante sui complessi molecolari, tranne che in soluzioni molto diluite ».

**Matematica.** — *Altre osservazioni sulle assintotiche delle rigate appartenenti ad una congruenza lineare.* Nota del prof. GIULIO PITTARELLI, presentata dal Socio CREMONA.

### Rigate qualunque.

*Congruenza a direttrici coincidenti.*

« Continuando alla Nota inserita a pag. 111 del fascicolo precedente, sia ora il fascio di complessi:

1) $$z_{14} - z_{23} + kz_{12} = 0 .$$

che si tagliano secondo una congruenza avente l'unica direttrice $z_{12} = 0$.

« In questo caso tra' determinanti $a_i b_j - a_j b_i$ dovranno passare le relazioni

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \,, \; a_1 b_4 - a_4 b_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 .$$

« La prima dà, come innanzi,

$$a_1 u + b_1 = \varphi_1 (au + b) \,, \; a_2 u + b_2 = \varphi_2 (au + b)$$

ed all'altra si può dare, con questi valori di $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ la forma:

2) $$\frac{ab_3 - a_3 b}{\varphi_1} = \frac{ab_4 - a_4 b}{\varphi_2} = \psi ,$$

poniamo.

« Di quì possiamo ricavare, eliminando $b_3$ e $b_4$,

$$a_3 u + b_3 = \frac{a_3}{a}(au + b) + \varphi_1 \frac{\psi}{a}$$

$$a_4 u + b_4 = \frac{a_4}{a}(au + b) + \varphi_2 \frac{\psi}{a} .$$

« Nulla viene di porre

$$a_3 = a\varphi_3\ ,\ a_4 = a\varphi_4\ ,\ \psi = a\varphi\ ;$$

ed allora le eq.ⁱ della superficie si scriveranno così, posto sempre $f = au + b$,

3) $$x_1 = \varphi_1 f\ ,\ x_2 = \varphi_2 f\ ,\ x_3 = \varphi_3 f + \varphi_1\varphi\ ,\ x_4 = \varphi_4 f + \varphi_2\varphi\ .$$

Quì pure è da avvertire che dev'essere

$$\varphi_1\varphi_4 - \varphi_2\varphi_3 \gtrless 0\ ;$$

chè, altrimenti, si potrebbe scrivere,

$$\varphi_3 = \lambda\varphi_1\ ,\ \varphi_4 = \lambda\varphi_2\ ,$$

e così le 3) darebbero

$$x_1 = \varphi_1 f\ ,\ x_2 = \varphi_2 f\ ,\ x_3 = \varphi_1(\lambda f + \varphi)\ ,\ x_4 = \varphi_2(\lambda f + \varphi)$$

donde poi l'iperboloide

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0\ ,$$

che escludiamo.

« L'eq$^e$. di un punto della sup. è

$$(\varphi_1\xi_1 + \varphi_2\xi_2 + \varphi_3\xi_3 + \varphi_4\xi_4) f + (\varphi_1\xi_3 + \varphi_2\xi_4)\varphi = 0 :$$

essa è dunque quella di un punto sulla retta che unisce i due punti

$$\varphi_1\xi_3 + \varphi_2\xi_4 = 0\ ,\ \varphi_1\xi_1 + \varphi_2\xi_2 + \varphi_3\xi_3 + \varphi_4\xi_4 = 0\ .$$

« Il primo punto ha per coordinate $(0\ ,0\ ,\varphi_1\ ,\varphi_2)$ ed appartiene alla retta $x_1 = x_2 = 0$ direttrice della congruenza. Il secondo punto appartiene ad una curva gobba definita dalle

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4$$

« Trasformando in altro modo le eq.ⁱ 2) potremo ottener formole che, se rispetto alle 3) perdono simmetria, guadagnano in semplicità per la scomparsa in esse di una funzione $\varphi$.

« Scriviamo la 2) così:

$$\frac{a_3\varphi_2 - a_4\varphi_1}{a} = \frac{b_3\varphi_2 - b_4\varphi_1}{b} = \varphi_2\varphi_3\ ,\ \text{poniamo.}$$

« Se ne ricava

$$a_3 = \frac{a_4}{\varphi_2}\varphi_1 + a\varphi_3\ ,\ b_3 = \frac{b_4}{\varphi_2}\varphi_1 + b\varphi_3\ ;$$

e ponendo

$$c = \frac{a_4}{\varphi_2}\ ,\ d = \frac{b_4}{\varphi_2}\ ,\ g = cu + d\ ,$$

le eq.ⁱ della superficie si scriveranno così:

4) $$x_1 = \varphi_1 f\ ,\ x_2 = \varphi_2 f\ ,\ x_3 = \varphi_3 f + \varphi_1 g\ ,\ x_4 = \varphi_2 g\ .$$

« Onde poi l'eq$^i$. del punto è

$$(\varphi_1\xi_1 + \varphi_2\xi_2 + \varphi_3\xi_3) f + (\varphi_1\xi_3 + \varphi_2\xi_4) g = 0\ ,$$

ch'è un punto della congiungente i due punti

$$5)\qquad \varphi_1 \xi_3 + \varphi_2 \xi_4 = 0 \ , \ \varphi_1 \xi_1 + \varphi_2 \xi_2 + \varphi_3 \xi_3 = 0 \ ,$$

l'uno (lo stesso di quello di prima) appartenente alla direttrice rettilinea $x_1 = x_2$, l'altro di coordinate

$$6)\qquad x_1 = \varphi_1 \ , \ x_2 = \varphi_2 \ , \ x_3 = \varphi_3 \ , \ x_4 = 0$$

appartenente ad una curva piana definita da queste ultime eq.ⁱ La curva poi taglia la retta $x_1 = x_2 = 0$ nel punto $(0, 0, 1, 0)$, e per quei valori di $v$ per i quali $\varphi_3 = \infty$.

« Dalle eq.ⁱ 5) si vede che la natura della superficie dipende dalle tre funzioni $\varphi$ o meglio da' loro rapporti. Ricaviamo dalle eqⁱ. 5)

$$7)\qquad \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = -\frac{\xi_4}{\xi_3} \ , \ \frac{\varphi_1}{\varphi_3} = \frac{-\xi_3 \xi_4}{\xi_1 \xi_4 - \xi_2 \xi_3} \ , \ \frac{\varphi_2}{\varphi_3} = \frac{\xi_3^2}{\xi_1 \xi_4 - \xi_2 \xi_3} \ ;$$

onde si scorge che nel risultato dell'eliminazione comparirà il determinante $\xi_1 \xi_4 - \xi_2 \xi_3$, ch'è proprietà caratteristica non solo delle superficie rigate algebriche di Cayley (1), ma delle trascendenti purchè contenute in una congruenza della specie considerata.

« Dalle 4) si traggono anche le:

$$8)\qquad \varphi_2 x_1 - \varphi_1 x_2 = 0 \ , \ \varphi_3 x_2 - \varphi_2 x_3 + \varphi_1 x_4 = 0$$

le quali danno la costruzione correlativa della superficie mediante rette comuni ai piani del fascio $\varphi_2 x_1 - \varphi_1 x_2 = 0$ per la direttrice rettilinea ed ai piani tangenti di coordinate

$$9)\qquad \xi_2 = \varphi_3 \ , \ \xi_3 = -\varphi_2 \ , \ \xi_4 = \varphi_1$$

che inviluppano un cono di vertice $\xi_1 = 0$; il quale tocca il piano $x_2 = 0$ passante per la direttrice per quei valori di $v$ che danno $\varphi_3 = \infty$.

« Guardando le 5) e 7) si vede come la sostituzione $\begin{pmatrix} x_4 & -x_3 & x_2 & -x_1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \end{pmatrix}$ conduca dall'eq.ᵉ tangenziale a quella in coordinate di punti, nella quale comparirà anche la funzione $x_1 x_4 - x_2 x_3$: perchè si trova

$$10)\qquad \frac{x_1}{x_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \ , \ \frac{x_1 x_4 - x_2 x_3}{x_2^2} = -\frac{\varphi_3}{\varphi_2}$$

« L'eq.ᵉ del piano tangente nel punto $x$ è:

$$11)\qquad (\mathrm{G}f - \mathrm{F}g)\,(\varphi_2 y_1 - \varphi_1 y_2) - \mathrm{F}f\,(\varphi_3 y_2 - \varphi_2 y_3 + \varphi_1 y_4) = 0$$

dove

$$\mathrm{F} = \varphi_2 \varphi'_1 - \varphi_1 \varphi'_2 \ , \ \mathrm{G} = \varphi_3 \varphi'_2 - \varphi_2 \varphi'_3 \ ,$$

(1) Cayley, *A second Memoir on skew Surfaces* nelle Phil. Transactions di Londra pag. 563, anno 1864; Cremona, Istituto Lombardo 1868. Una classe particolare di queste sup. algebriche s'era già nel 1861 presentata allo Chasles, tomo 53 de' Comptes Rendus.

e quella del piano polare dello stesso punto rispetto al complesso 1) è

12) $$(g+kf)(\varphi_2 y_1-\varphi_1 y_2)-f(\varphi_3 y_2-\varphi_2 y_3+\varphi_1 y_4)=0\,.$$

« Identificando le due eq.[i] 11) e 12) si ha la relazione

13) $$2\mathrm{F}g+(k\mathrm{F}-\mathrm{G})f=0$$

che è l'eq.[e] in coordinate curvilinee dell'assintotica $A_k$ per questa superficie. Da essa si vede, poichè è di 1° grado in $f:g$, che l'$A_k$ è incontrata in un sol punto da qualunque generatrice. Siccome poi per i punti della direttrice rettilinea $x_1=x_2=0$ è $f=0$ (e $g$ qualunque), così la $A_k$ incontra la direttrice rettilinea ne' punti per i quali $\mathrm{F}=0$. I valori di $v$ tratti da questa eq.[e] forniscono le generatrici singolari della superficie. Infatti se la generatrice 5) (o, ch'è lo stesso, 8)) incontra la consecutiva, dovranno, insieme alle 5), valere le loro derivate rispetto a $v$:

$$\varphi'_1\xi_1+\varphi'_2\xi_2+\varphi'_3\xi_3=0\;,\;\varphi'_1\xi_3+\varphi'_2\xi_4=0$$

« Eliminando le $\xi_i$ tra queste due eq.[i] e le due 19) si ha

$$\begin{vmatrix}\varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & 0\\ \varphi'_1 & \varphi'_2 & \varphi'_3 & 0\\ 0 & 0 & \varphi_1 & \varphi_2\\ 0 & 0 & \varphi'_1 & \varphi'_2\end{vmatrix}=0$$

onde

$$(\varphi_1\varphi'_2-\varphi'_1\varphi_2)^2=\mathrm{F}^2=0\,.$$

È anche quì da avvertire che le funzioni F e G non possono essere identicamente nulle, nè contemporaneamente nè separatamente. Infatti se così fosse, se ne trarrebbe intanto

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1}=\text{cost}=a\;,\;\frac{\varphi_3}{\varphi_2}=\text{cost}=b.$$

Supposto soltanto F nullo il primo rapporto darebbe il punto fisso $\xi_3+a\xi_4=0$ (o il piano fisso $ax_1-x_2=0$), ed essendo G diverso da zero, la superficie si ridurrebbe alle rette projettanti da quel punto i punti della curva 6) cioè ad un cono (ovvero alle rette intersezione del piano fisso coi piani tangenti al cono 9) cioè ad una curva piana inviluppata dalle sue tangenti). Se anche $\mathrm{G}\equiv 0$, si ha una retta fissa congiungenti i due punti fissi

$$\xi_3+a\xi_4=0\;,\;\xi_1+a\xi_2+ab\xi_3=0$$

(ovvero intersezione dei due piani fissi

$$ax_1-x_2=0\quad abx_2-ax_3+x_4=0)\,.$$

« Se fosse solo $\mathrm{G}\equiv 0$, la terza della 21) mostra che si avrebbe la quadrica rigata

$$\xi_1\xi_4-\xi_2\xi_3=\mu\xi_3^2$$

« Consideriamo ora sopra una generatrice $v =$ costante il punto $u_d$ in cui essa taglia la direttrice rettilinea e il punto $u_k$ dove taglia l'assintotica $A_k$. Poichè pel primo punto si ha $f = 0$ e pel secondo punto si ha la 13), così l'eq.$^i$ complessiva dei due punti sarà

$$2Fgf + (kF - G)f^2 = 0 . \tag{14}$$

« I parametri $u, u_1$ della coppia coniugata armonica alla 14) saranno ligati dall'eq.$^e$ polare

$$F(g_1f + f_1g) + (kF - G)f_1f = 0 . \tag{15}$$

« Questa permette di scrivere l'eq$^e$. del piano tangente nel punto $u, v$ co' parametri $u_1, v$. Da essa infatti si trae

$$Ff(g_1 + kf_1) - (Gf - Fg)f_1 = 0$$

ed eliminando con l'aiuto di essa il rapporto $\frac{Gf - Fg}{Ff}$ dalla 11) si ha per l'eq$^e$. del piano tangente

$$(g_1 + kf_1)(\varphi_2y_1 - \varphi_1y_2) - f_1(\varphi_3y_2 - \varphi_2y_3 + \varphi_1y_4) = 0 .$$

« Or questa è l'eq$^e$. del piano polare del punto $u_1 . v$ rispetto al complesso. Da questo istante noi possiamo trarre per la superficie di Cayley le stesse conclusioni che per quelle a direttrici distinte; soltanto quì la trasformazione è data dalla 15) con la curva unita 14). È inutile trascrivere queste conclusioni. Soltanto faccio osservare che, analogamente alla 14$^{bis}$) della Nota precedente possiamo quì scrivere

$$x_1 = -\eta_4 , x_2 = \eta_3 , x_3 = -\eta_2 + k\eta_4 , x_4 = \eta_1 - k\eta_3$$

che è la più generale reciprocità che muta l'assintotica $A_k$ e la superficie in se stessa [1] ».

## Elettrotecnica. — *Sull'impiego dell'elettrometro a quadranti come strumento differenziale* [2]. Nota dell'ing. Riccardo Arnò, presentata dal Socio G. Ferraris.

« Siano A, B e C tre punti di un circuito in cui agisce una forza elettromotrice e siano A e B le estremità di una resistenza $r$ inserita nel circuito stesso. Se, per mezzo della variazione di tale resistenza, si fanno successivamente variare le due differenze di potenziali $V_A - V_B$ e $V_B - V_C$, esistenti rispettivamente fra i punti A, B e B, C, è sempre possibile, per mezzo di

(1) Un caso particolare fu trovato a proposito delle 5) e 7); esso corrisponde a $k = 0$.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Elettrotecnica del R. Museo industriale italiano in Torino.