ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1894

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME III.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1894

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia prima del 7 ottobre 1894.

Meccanica. — *Sulle tensioni in un sistema elastico articolato.* Nota I del Socio F. Siacci.

« Il teorema sulle tensioni nei sistemi elastici articolati, enunciato nella sua generalità la prima volta dal Gen. Menabrea che lo chiamò *principio di elasticità*, e che il Castigliano disse poi *teorema del minimo lavoro*, è un teorema limite, ossia una proposizione che si verifica quando le deformazioni siano infinitamente piccole. Esistono casi, in cui, anche in quella ipotesi, la proposizione non sussiste? Esistono casi in cui, anche senza quella ipotesi, la proposizione è vera? Si può stabilire una proposizione analoga che, almeno per deformazioni infinitamente piccole, comprenda tutti i casi, e comprenda tanto le tensioni delle aste, quanto le compressioni degli appoggi esterni? Ci studieremo di rispondere a questi quesiti.

§ 1.

« Siano n i vertici, o nodi, di un sistema articolato in equilibrio, l_{rs} sia la lunghezza dell'asta che congiunge i nodi r ed s, T_{rs} la sua tensione, x_r y_r z_r le coordinate ortogonali del nodo r, ed X_r Y_r Z_r le componenti della forza applicata in esso.

« Supporremo in questa prima Nota il sistema completamente libero. Le equazioni d'equilibrio allora sono:

$$(1)\qquad \begin{cases} X_r = \sum\limits_s T_{rs} \dfrac{\partial l_{rs}}{\partial x_r}, \\ Y_r = \sum\limits_s T_{rs} \dfrac{\partial l_{rs}}{\partial y_r}, \qquad r, s = 1, 2 \ldots n. \\ Z_r = \sum\limits_s T_{rs} \dfrac{\partial l_{rs}}{\partial z_r}. \end{cases}$$

La tensione T_{rs} si suppone applicata in r e si considera positiva quando è diretta verso s, cioè quando proviene da un allungamento, e negativa nel caso contrario. Onde dicendo L_{rs} la lunghezza *naturale* dell'asta l_{rs}, cioè la sua lunghezza quando fosse libera e non sollecitata da alcuna forza esterna, si avrà

$$(2)\qquad T_{rs} = \varepsilon_{rs} (l_{rs} - L_{rs}),$$

ove ε_{rs} è un coefficiente positivo (coefficiente di resistenza) dipendente dalla materia e dalle dimensioni dell'asta allo stato naturale. T_{rs} e T_{sr} hanno valore e segno eguali, ma T_{sr} è applicata in s e diretta in senso contrario a T_{rs}.

Le coordinate, e quindi i coseni direttori delle tensioni si suppongono conosciuti. Si suppongono date anche le forze applicate, onde le sole incognite sono le tensioni.

« Le equazioni (1) equivalgono, rispetto alle tensioni, a sole $3n - 6$, giacchè esse verificano le sei

$$(3)\qquad \begin{cases} \sum\limits_r X_r = 0, & \sum\limits_r (y_r Z_r - z_r Y_r) = 0, \\ \sum\limits_r Y_r = 0, & \sum\limits_r (z_r X_r - x_r Z_r) = 0, \\ \sum\limits_r Z_r = 0, & \sum\limits_r (x_r Y_r - y_r X_r) = 0, \end{cases}$$

nelle quali le tensioni non entrano. Le (1) adunque non bastano in generale a determinare le tensioni che sono in numero di $\dfrac{n(n-1)}{2}$, senza fare intervenire le relazioni (2). Si tratta di vedere se di queste relazioni possa tener luogo una condizione di massimo o minimo.

« Gioverà a tal uopo esprimere le tensioni in funzione di

$$\frac{n(n-1)}{2} - 3n + 6 = \frac{(n-3)(n-4)}{2} = m$$

variabili indipendenti $\omega_1\, \omega_2 \ldots \omega_m$. Scriviamo senz'altro queste espressioni che si verificano facilmente colla sostituzione nelle (1), e che sono:

$$(4)\qquad T_{rs} = \frac{\partial U}{\partial l_{rs}} + \omega_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial l_{rs}} + \omega_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial l_{rs}} + \cdots + \omega_m \frac{\partial \Omega_m}{\partial l_{rs}},$$

ove U è una funzione delle l_{rs}, che rappresenta il polinomio

$$\sum_r (X_r x_r + Y_r y_r + Z_r z_r), \tag{5}$$

ed

$$\Omega_1 = 0\,, \quad \Omega_2 = 0 \,.\,.\,.\,.\,.\, \Omega_m = 0 \tag{6}$$

sono le relazioni, omogenee, che legano i lati l_{rs}, le quali sono appunto in numero di m e provengono dalla eliminazione delle coordinate dalle equazioni

$$l^2_{rs} = (x_r - x_s)^2 + (y_r - y_s)^2 + (z_r - z_s)^2. \tag{7}$$

« Siccome le coordinate $x\ y\ z$ si possono esprimere in diversi modi in funzione delle l_{rs}, così per fissare le idee si può supporre che scelto ad arbitrio un gruppo di $3n - 6$ equazioni tra le (7), se ne siano ricavate $3n - 6$ coordinate in funzione di altrettante l_{rs} e delle sei coordinate rimanenti, che designeremo con $c_1\, c_2 \ldots c_6$, e che, il sistema essendo libero, potremo anche fare scomparire, ponendole eguali a zero o a valori numerici arbitrari (1). Non si potrebbero ricavare dalle (7) tutte le $3n$ coordinate in funzioni dei lati, poichè il numero dei lati indipendenti è solo $3n - 6$ (2).

« Ciò posto sia F una funzione delle T; vediamo se essa, resa massima o minima compatibilmente colle (1), o colle equivalenti (4), dia le equazioni (2).

« Dovranno verificarsi in primo luogo

$$\sum_{rs} \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} \frac{\partial T_{rs}}{\partial \omega_1} = 0\,, \ldots, \sum_{rs} \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} \frac{\partial T_{rs}}{\partial \omega_m} = 0 \tag{8}$$

che in virtù delle (4) divengono

$$\sum_{rs} \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} \frac{\partial \Omega_1}{\partial l_{rs}} = 0\,, \ldots, \sum_{rs} \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} \frac{\partial \Omega_m}{\partial l_{rs}} = 0\,; \tag{9}$$

ed in secondo luogo queste dovranno equivalere alle (2).

« Esaminiamo alcune soluzioni particolari delle (9).

(1) Giova però avvertire che le c non possono essere sei coordinate qualunque: devono essere sei coordinate, a cui dando valori numerici arbitrari non ne risulti alcuna determinazione della posizione relativa dei punti. Potrebbero quindi essere p. es. $x_1\ y_1\ z_1\ y_2\ z_2\ z_3$, non potrebbero essere $x_1\ y_1\ z_1\ x_2\ y_2\ z_2$.

(2) Le equazioni (4) come le (1) si possono ricavare dall'equazione dei lavori virtuali

$$\Sigma (X_r\, dx_r + Y_r\, dy_r + Z_r\, dz_r) - \Sigma\, T_{rs}\, dl_{rs} = 0\,,$$

le (1) coll'esprimere i lati l_{rs} in funzione delle coordinate, le (4) esprimendo le coordinate in funzione dei lati. E se si tien conto delle c, alle (4) si aggiungono queste:

$$\frac{\partial U}{\partial c_1} = 0\,, \quad \frac{\partial U}{\partial c_2} = 0\,, \ldots, \frac{\partial U}{\partial c_6} = 0$$

che equivalgono alle (3). Esprimendo in funzione di $3n - 6$ lati scelti ad arbitrio e che diremo l_p, gli altri lati l_q e le coordinate, se ne ricava

$$\frac{\partial U}{\partial l_p} - T_p - \sum_q T_q \frac{\partial l_q}{\partial l_p} = 0 \text{ ossia } T_p = \frac{\partial U}{\partial l_p} - \sum_q T_q \frac{\partial l_q}{\partial l_p}\,,$$

che è il risultato a cui si giungerebbe risolvendo le (1) rispetto a $3n - 6$ tensioni.

§ 2.

« Le (9) sono soddisfatte ponendo

$$\frac{\partial F}{\partial T_{rs}} = l_{rs}, \tag{10}$$

giacchè, le Ω essendo omogenee, detto μ il grado di una di esse, avremo

$$\sum_{rs} l_{rs} \frac{\partial \Omega}{\partial l_{rs}} = \mu \Omega = 0. \tag{11}$$

« Ora se si vuole che le (9), e per esse le (10), equivalgano alle (2) bisognerà che il valore di $\frac{dF}{dT_{rs}}$ sia $\frac{T_{rs}}{\varepsilon_{rs}} + L_{rs}$, donde

$$F = \frac{1}{2} \sum_{rs} \varepsilon_{rs} \left(\frac{T_{rs}}{\varepsilon_{rs}} + L_{rs} \right)^2. \tag{12}$$

« È facile dimostrare che F è un minimo tra tutte le altre somme analoghe F′, che si possono formare con altre tensioni compatibili colle (1), o colle equivalenti (4). Si ha infatti

$$\begin{aligned} F' &= \frac{1}{2} \sum_{rs} \varepsilon_{rs} \left(\frac{T_{rs}}{\varepsilon_{rs}} + L_{rs} + \frac{T'_{rs} - T_{rs}}{\varepsilon_{rs}} \right)^2 \\ &= F + \frac{1}{2} \sum_{rs} \frac{(T'_{rs} - T_{rs})^2}{\varepsilon_{rs}}, \end{aligned} \tag{13}$$

giacchè la somma dei doppi prodotti è

$$\begin{aligned} \sum_{rs} \left(\frac{T_{rs}}{\varepsilon_{rs}} + L_{rs} \right) (T'_{rs} - T_{rs}) &= \sum_{rs} l_{rs} (T'_{rs} - T_{rs}) \\ &= (\omega'_1 - \omega_1) \sum_{rs} l_{rs} \frac{\partial \Omega_1}{\partial l_{rs}} + \cdots = 0. \end{aligned}$$

« Dunque: *in un sistema elastico articolato ed isolato, in equilibrio sotto l'azione di forze applicate ai vertici, le tensioni rendono minima conciliabilmente colle condizioni d'equilibrio la somma dei quadrati dei lati, moltiplicati pei coefficienti di resistenza* [1].

« È notevole che il valore di F, ossia $\frac{1}{2} \sum_{rs} \varepsilon_{rs} l^2_{rs}$, coincide, salvo una costante, col valore della funzione delle forze la quale, nell'equilibrio, è massima o minima, anzi si ammette come massima se l'equilibrio è stabile. Infatti questa funzione è

$$\begin{aligned} P &= \sum_r (X_r x_r + Y_r y_r + Z_r z_r) - \sum_{rs} \int T_{rs} \, dl_{rs} \\ &= \sum_r (X_r x_r + Y_r y_r + Z_r z_r) - \frac{1}{2} \sum_{rs} \varepsilon_{rs} (l_{rs} - L_{rs})^2, \end{aligned} \tag{14}$$

[1] Non mi consta che questo teorema sia già conosciuto, e così dei teoremi seguenti, tranne quello del § 3 e quello rappresentato dalla formola (29).

e siccome dalle (1) e dalle (2) risulta

$$\sum_r (X_r x_r + Y_r y_r + Z_r z_r) = \sum_{rs} T_{rs} l_{rs} = \sum_{rs} \varepsilon_{rs} (l_{rs} - L_{rs}) l_{rs},$$

così

$$(15) \qquad P = \frac{1}{2} \sum_{rs} \varepsilon_{rs} (l^2_{rs} - L^2_{rs}) = F + \text{Cost.}$$

§ 3.

« Le (9) possono anche essere soddisfatte ponendo

$$(16) \qquad \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} = l_{rs} - L_{rs},$$

quando $l_{rs} - L_{rs}$ si possa considerare come un incremento infinitamente piccolo δl_{rs} di L_{rs}. Allora si ha

$$(17) \qquad \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} = l_{rs} - L_{rs} = \delta l_{rs},$$

e la sostituzione nelle (9) riduce i primi membri di esse a

$$\delta \Omega_1, \quad \delta \Omega_2 \; . \; . \; . \; \delta \Omega_m,$$

che sono nulli sotto la condizione però non solo che gli allungamenti siano infinitamente piccoli, ma che le lunghezze naturali L_{rs} soddisfino, come le l_{rs}, all'equazioni $\Omega_1 = 0 \ldots \Omega_m = 0$, ossia che anche con esse si possa formare un poligono completo. Ciò significa che, tolte tutte le forze, tutte le aste cessino di essere tese o compresse.

« Ciò ammesso, affinchè le (16) coincidano colle (2) dovrà essere $\frac{\partial F}{\partial T_{rs}} = \frac{T_{rs}}{\varepsilon_{rs}}$, ossia

$$(18) \qquad F = \frac{1}{2} \sum \frac{T^2_{rs}}{\varepsilon_{rs}} = \text{minimo.}$$

« Che sia F realmente un minimo, si prova come dianzi.

« E con ciò è dimostrato pel caso di un sistema isolato il principio di elasticità, o teorema del minimo lavoro, il quale può essere enunciato esattamente così:

« *In un sistema elastico articolato ed isolato, in equilibrio sotto l'azione di forze applicate ai vertici, la somma dei quadrati delle tensioni divisi per i coefficienti di resistenza è minima compatibilmente coll'equazioni di equilibrio, quando le deformazioni siano infinitamente piccole, e, tolte le forze, tutte le tensioni siano nulle* [1].

« Anche qui si può dimostrare che il valore minimo di F coincide, salvo una costante, col valore massimo della funzione delle forze, cioè con

$$P = \sum_r (X_r x_r + Y_r y_r + Z_r z_r) - \frac{1}{2} \sum_{rs} \frac{T^2_{rs}}{\varepsilon_{rs}}.$$

[1] Nelle dimostrazioni, che sono state date del teorema, non si è provato, ch'io sappia, che F è realmente un minimo.

« Diciamo, infatti, x'_r, y'_r, z'_r le coordinate del nodo r, prima dell'applicazione delle forze, e poniamo

$$x_r = x' + \delta x_r\,, \quad y_r = y'_r + \delta y_r\,, \quad z_r = z'_r + \delta z_r\,;$$

avremo

$$\mathrm{P} = \sum_r (\mathrm{X}_r x'_r + \mathrm{Y}_r y'_r + \mathrm{Z}_r z'_r) + \sum_r (\mathrm{X}_r \delta x_r + \mathrm{Y}_r \delta y_r + \mathrm{Z}_r \delta z_r) - \frac{1}{2} \sum_{rs} \frac{\mathrm{T}^2_{rs}}{\varepsilon_{rs}}\,.$$

« Ma dalle (1) si trae

$$\sum_r (\mathrm{X}_r \delta x_r + \mathrm{Y}_r \delta y_r + \mathrm{Z}_r \delta z_r) = \sum_{rs} \mathrm{T}_{rs}\, \delta l_{rs} = \sum_{rs} \frac{\mathrm{T}^2_{rs}}{\varepsilon_{rs}}\,,$$

dunque, sostituendo,

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2} \sum_{rs} \frac{\mathrm{T}^2_{rs}}{\varepsilon_{rs}} + \sum_r (\mathrm{X}_r x'_r + \mathrm{Y}_r y'_r + \mathrm{Z}_r z'_r) = \mathrm{F} + \text{cost.}$$

« Il valore di $\mathrm{P} - \sum_r (\mathrm{X}_r x'_r + \mathrm{Y}_r y'_r + \mathrm{Z}_r z'_r)$, ossia di F, rappresenta la somma algebrica dei lavori delle forze esterne ed interne, la quale in pratica è sempre un massimo rispetto ai lavori analoghi corrispondenti a posizioni che non siano d'equilibrio.

§ 4.

« Le equazioni (9) sono soddisfatte in generale dalle (16) quando le L_{rs} soddisfino a queste condizioni

$$\sum_{rs} \mathrm{L}_{rs} \frac{\partial \Omega_1}{\partial l_{rs}} = 0\,, \; \ldots\,, \; \sum_{rs} \mathrm{L}_{rs} \frac{\partial \Omega_m}{\partial l_{rs}} = 0\,,$$

e ad esse soddisfano quando possano mettersi sotto la forma:

$$(19) \qquad \mathrm{L}_{rs} = \frac{\partial l_{rs}}{\partial x_r} \xi_r + \frac{\partial l_{rs}}{\partial x_s} \xi_s + \frac{\partial l_{rs}}{\partial y_r} \eta_r + \frac{\partial l_{rs}}{\partial y_s} \eta_s + \frac{\partial l_{rs}}{\partial z_r} \zeta_r + \frac{\partial l_{rs}}{\partial z_s} \zeta_s\,,$$

essendo le ξ η ζ quantità arbitrarie. Ed infatti allora si ha

$$\begin{aligned} \sum_r \sum_s \mathrm{L}_{rs} \frac{\partial \Omega_1}{\partial l_{rs}} &= \sum_r \xi_r \sum_s \frac{\partial \Omega_1}{\partial l_{rs}} \frac{\partial l_{rs}}{\partial x_r} + \sum_s \xi_s \sum_r \frac{\partial \Omega_1}{\partial l_{rs}} \frac{\partial l_{rs}}{\partial x_s} + \cdots \\ &= \sum_r \xi_r \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_r} \qquad + \sum_s \xi_s \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_s} \qquad + \cdots \end{aligned}$$

Ora ogni termine di questa somma è nullo, poichè le Ω, quando le l_{rs} si esprimono colle coordinate, divengono identicamente nulle, e perciò si ha identicamente

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_r} = 0\,, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x_s} = 0\,, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y_r} = 0 \ldots.$$

« Anche in questo caso, si verifica adunque che

$$\mathrm{F} = \frac{1}{2} \sum_{rs} \frac{\mathrm{T}^2_{rs}}{\varepsilon_{rs}}$$

è minima compatibilmente coll'equazioni d'equilibrio, ed in questo caso non è necessario che colle L_{rs} possa formarsi un poligono completo di n punti.

« Alle (19) si può dare questa interpretazione geometrica. Se si considerano le $3n$ quantità $\xi\ \eta\ \zeta$ come coordinate di n punti e si dicono λ_{rs} i lati del poligono di essi, è evidente che L_{rs} rappresenta la proiezione di λ_{rs} sul lato l_{rs} del poligono elastico dato. Quindi il teorema, che comprende come caso particolare il precedente:

« *In un sistema elastico articolato isolato, in equilibrio sotto l'azione di forze applicate ai vertici, la somma dei quadrati delle tensioni delle aste, divisi per i coefficienti di resistenza, è minima compatibilmente coll'equazioni di equilibrio, quando le lunghezze naturali delle aste siano le proiezioni sulle aste tese, dei lati di un poligono completo formato con n punti qualunque* (1).

§ 5.

« Le equazioni (9) sono, dopo le cose dette, evidentemente soddisfatte, se poniamo più generalmente

$$\frac{\partial F}{\partial T_{rs}} = l_{rs} - \mu_{rs}\,, \tag{20}$$

essendo

$$\mu_{rs} = \frac{\partial l_{rs}}{\partial x_r}\,\xi_r + \frac{\partial l_{rs}}{\partial x_s}\,\xi_s + \frac{\partial l_{rs}}{\partial y_r}\,\eta_r + \frac{\partial l_{rs}}{\partial y_s}\,\eta_s + \frac{\partial l_{rs}}{\partial x_r}\,\zeta_r + \frac{\partial l_{rs}}{\partial z_s}\,\zeta_s\,, \tag{21}$$

ove le $\xi\ \eta\ \zeta$ sono $3n$ quantità arbitrarie.

« Se vuolsi che le (20) coincidano colle (2) dovrà verificarsi

$$\frac{\partial F}{\partial T_{rs}} = \frac{T_{rs}}{\varepsilon_{rs}} + L_{rs} - \mu_{rs} \tag{22}$$

onde

$$F = \frac{1}{2}\sum_{rs} \varepsilon_{rs}\left(\frac{T_{rs}}{\varepsilon_{rs}} + L_{rs} - \mu_{rs}\right)^2 \tag{23}$$

« E si verificherà anche per questa funzione come per le altre una equazione analoga alla (13), cioè essa sarà minima.

(1) Immaginiamo, per fare un esempio molto semplice, sei aste aventi coefficienti di resistenza diversi od eguali, delle quali, allo stato naturale, quattro abbiano la lunghezza 10, e due la lunghezza 14. Con esse non si può formare un quadrangolo piano. Ma lasciando in disparte una delle più lunghe potremo colle altre cinque formare la figura di un rombo piano, e poi introdurre la sesta a forza mantenendo la figura piana; le sei aste si saranno così parte allungate e parte accorciate, secondo i loro coefficienti di resistenza.

Supponiamo infine che mediante forze applicate ai vertici, il sistema prenda la figura di un rettangolo di cui due lati opposti abbiano la lunghezza 9, altri due la lunghezza 12, e le diagonali per conseguenza la lunghezza 15. Le tensioni in questo caso soddisfano al teorema, perchè le lunghezze naturali sono le proiezioni sulle aste tese dei lati e delle diagonali di un quadrato.

« Si ha inoltre dalla (23)

$$F = \frac{1}{2} \sum_{rs} \varepsilon_{rs} \left(\frac{T_{rs}}{\varepsilon_{rs}} + L_{rs} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{rs} \varepsilon_{rs} \mu_{rs}^2 - \sum_{rs} \mu_{rs} (T_{rs} + \varepsilon_{rs} L_{rs}).$$

Ma detta P la funzione delle forze abbiamo già dimostrato che la prima somma è $P + \frac{1}{2} \sum_{rs} \varepsilon_{rs} L^2_{rs}$, e dalle (1) avendosi

$$(24) \qquad \sum_r (X_r \xi_r + Y_r \eta_r + Z_r \zeta_r) = \sum_{rs} \mu_{rs} T_{rs},$$

risulta

$$(25) \qquad F = P + \frac{1}{2} \sum_{rs} \varepsilon_{rs} (L_{rs} - \mu_{rs})^2 - \sum_r (X_r \xi_r + Y_r \eta_r + Z_r \zeta_r).$$

§ 6.

« Le quantità arbitrarie $\xi\ \eta\ z$ sono $3n$, ma con esse non si possono formare che $3n - 6$ arbitrarie tra le μ_{rs}; le altre risultano funzioni di queste. Infatti le μ_{rs} sono le proiezioni dei lati di un poligono σ (i cui vertici hanno per coordinate le $\xi\ \eta\ \zeta$) sui lati del poligono elastico. Ora siccome tra i lati di σ esistono $\frac{n(n-1)}{2} - 3n + 6$ relazioni, così anche tra le loro proiezioni esisterà un egual numero di relazioni, cioè date $3n - 6$ di quelle proiezioni, tutte le altre restano determinate.

« Ciò posto, scegliamo ad arbitrio $3n - 6$ lunghezze naturali, e designamo con L_p una di esse, con L_q una delle altre; poniamo $3n - 6$ delle μ_{rs} eguali alle L_p, e indichiamo con μ_q una qualunque delle rimanenti, che saranno per le cose dette funzioni delle L_p. La (23) diviene

$$(26) \qquad F = \frac{1}{2} \sum_p \frac{T_p^2}{\varepsilon_p} + \frac{1}{2} \sum_q \varepsilon_q \left(\frac{T_q}{\varepsilon_q} + L_q - \mu_q \right)^2 = \text{minimo}.$$

§ 7.

« Possiamo sempre supporre che il sistema abbia assunto la figura attuale di equilibrio, partendo da un'altra figura infinitamente prossima, nella quale era pure in equilibrio sotto altre forze. Se $l_{rs} - \delta l_{rs}$ era la distanza dei nodi r ed s nella figura iniziale, la tensione corrispondente sarà stata

$$\varepsilon_{rs} (l_{rs} - \delta l_{rs} - L_{rs}) = T_{ors}.$$

Le coordinate del sistema nella figura iniziale siano

$$x_r - \delta x_r, \quad y_r - \delta y_r, \quad z_r - \delta z_r;$$

e siccome le $\xi_r\ \eta_r\ \zeta_r$ sono arbitrarie, poniamole eguali a queste quantità: verrà

$$\mu_{rs} = l_{rs} - \delta l_{rs}$$

e ne risulterà dalla (23),

$$F = \frac{1}{2} \sum_{rs} \frac{(T_{rs} - T_{ors})^2}{\varepsilon_{rs}} = \text{minimo}. \tag{27}$$

« Questa espressione rappresenta il lavoro dovuto agli incrementi delle tensioni, poichè

$$\frac{1}{2} \frac{(T_{rs} - T_{ors})^2}{\varepsilon_{rs}} = \int (T_{rs} - T_{ors})\, dl_{rs}\,.$$

« Dunque: *nella deformazione di un sistema elastico, che da una figura d'equilibrio sotto certe forze passi ad un'altra sotto altre forze, il lavoro dovuto all'incremento delle tensioni è minimo compatibilmente colle condizioni d'equilibrio relative alla seconda posizione.*

« Dalla (25) si trae inoltre

$$\begin{aligned} F &= P + \frac{1}{2} \sum_{rs} \frac{T^2_{ors}}{\varepsilon_{rs}} - \sum_r (X_r \xi_r + Y_r \eta_r + Z_r \zeta_r) \\ &= \sum_r (X_r\, \delta x_r + Y_r\, \delta y_r + Z_r\, \delta z_r) - \frac{1}{2} \sum_{rs} \left(\frac{T^2_{rs} - T^2_{ors}}{\varepsilon_{rs}} \right). \end{aligned} \tag{28}$$

« Il secondo membro rappresenta la somma algebrica dei lavori delle forze esterne ed interne nella deformazione. Dunque: *la somma dei lavori delle forze esterne ed interne nella deformazione di un sistema che passa da una figura d'equilibrio ad un'altra è eguale al lavoro dovuto agl'incrementi delle tensioni.*

§ 8.

« Se le lunghezze naturali sono atte alla composizione di un poligono, possiamo prendere per figura iniziale quella così composta, ed allora le tensioni iniziali sono nulle, e si ricade nel teorema del § 3. Se le lunghezze naturali invece sono qualunque, possiamo assumere come figura iniziale quella dovuta a forze, che mantengano $3n - 6$ aste allo stato naturale: queste aste che designamo con L_p, avranno tensioni nulle, la altre avranno, per distensioni o compressioni subìte, lunghezze differenti dalle naturali L_q; queste lunghezze che si potranno determinare con una costruzione geometrica, siano $L_q + \Delta L_q$, le tensioni corrispondenti saranno $\varepsilon_q \Delta L_q$. Sostituendo in (27), avremo

$$\frac{1}{2} \sum_p \frac{T_p{}^2}{\varepsilon_p} + \frac{1}{2} \sum_q \frac{(T_q - \varepsilon_q \Delta L_q)^2}{\varepsilon_q} = \text{minimo} \tag{29}$$

« Se poi si vogliono le tensioni in un sistema, le cui aste non abbiano la lunghezza naturale, e che non sia sollecitato da forze esterne, varrà la stessa (29), compatibilmente colle (1), nelle quali si porrà $X_r = Y_r = Z_r = 0$.

La formola (29) però dev' essere modificata quando il sistema ha vincoli esterni ([1]) ».

([1]) Il Castigliano nel suo libro *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications* (Turin, 1879) attribuisce a sè (p. 35) la prima dimostrazione rigorosa del teorema che egli chiama *del minimo lavoro*; ma, nel suo libro almeno, non lo enuncia (p. 30) e non lo dimostra che pel caso di un sistema isolato, cioè senza appoggi, quantunque nei casi pratici i sistemi siano sempre appoggiati; e neppure per quel caso egli dimostra che il lavoro sia *minimo*, quantunque questa parola formi la caratteristica della nuova denominazione da lui data a un teorema, che ne aveva già un'altra. E così egli stabilisce a pag. 39 un teorema analogo a quello rappresentato dalla (29) senza però avvertire com'esso vada modificato quando il sistema ha vincoli esterni, come accade sempre nelle applicazioni. Tuttavia l'opera del Castigliano è degna di studio e di seria attenzione. Il Castigliano si serve molto nelle sue dimostrazioni del teorema detto delle derivate del lavoro. Siccome questo teorema tende ad introdursi nell'insegnamento nelle nostre Scuole degl' Ingegneri, non è forse inutile qualche osservazione su di esso. Il teorema è così enunciato dal Castigliano:

« *Si l'on exprime le travail de déformation d'un système articulé en fonction* des « déplacements rélatifs *des forces extérieures appliquées à ses sommets, on obtient une* « *formule, dont les derivées, par rapport à ces déplacements, donnent la valeur des forces* « *correspondantes.*

« *Si l'on exprime, au contraire, le travail de déformation d'un système articulé* « *en fonction des forces extérieures, on obtient une formule, dont les derivées, par rap-* « *port à ces forces, donnent* les déplacements relatifs *de leurs points d'application* ».

Per spostamenti relativi s'intendono le proiezioni degli spostamenti sulle forze, ed il lavoro di deformazione è

$$L = \sum_{rs} \int T_{rs}\, dl_{rs} = \sum_{rs} \int \frac{T_{rs}\, dT_{rs}}{\varepsilon_{rs}}.$$

La prima parte del teorema deriva immediatamente dall'equazione seguente che si ricava dalle (1)

$$(a) \qquad \sum_r (X_r\, dx_r + Y_r\, dy_r + Z_r\, dz_r) = \sum_{rs} T_{rs}\, dl_{rs},$$

onde

$$(b) \qquad dL = \sum_r R_r\, d\varrho_r, \quad \frac{\partial L}{\partial \varrho_r} = R_r,$$

detta R_r la risultante di X_r Y_r Z_r e ϱ_r lo spostamento relativo di essa.

Se poi si mettono al posto di dx_r dy_r dz_r le proiezioni Δx_r Δy_r Δz_r dello spostamento ϱ_r, supposto piccolissimo, sugli assi, la (a), trascurando quantità di second'ordine, diviene

$$(c) \qquad \sum_r (X_r\, \Delta x_r + Y_r\, \Delta y_r + Z_r\, \Delta z_r) = \sum_{rs} T_{rs}\, \Delta l_{rs},$$

essendo Δl_{rs} l'allungamento subìto da l_{rs} a partire dalla figura iniziale. Ponendo $\frac{T_{rs}}{\varepsilon_{rs}}$ in luogo di Δl_{rs}, si ha

$$\sum_{rs} \frac{T_{rs}^2}{\varepsilon_{rs}} = \sum_r R_r \varrho_r, \quad \text{ossia} \quad 2L = \sum_r R_r\, \varrho_r.$$

Differenziando questa, e sottraendone la (b) si ottiene

$$dL = \sum_r \varrho_r\, dR_r, \quad \frac{\partial L}{\partial R_r} = \varrho_r.$$

Questa è, in sostanza, la dimostrazione del Castigliano.