ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1894

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME III.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1894

Matematica. — *Teoria generale delle corrispondenze projettive e degli aggruppamenti projettivi nelle forme fondamentali a due dimensioni.* Nota del Corrispondente RICCARDO DE PAOLIS [1].

« 1. Tra gli elementi generatori di due forme fondamentali a due dimensioni F_2^1, F_2^2 si può stabilire una corrispondenza projettiva reciproca. Allora ogni elemento A_1 di F_2^1 individua un elemento corrispondente duale di F_1^2, e tutti gli elementi A_2 di F_2^2 che appartengono ad esso e sono della stessa natura di A_1 insieme ad A_1 dànno ∞^1 coppie A_1A_2; tutte le possibili coppie come A_1A_2 sono ∞^3 e costituiscono un aggruppamento $\mathbf{A}p_2$ di 2° ordine projettivo. Se F_2^1, F_2^2 coincidono possiamo considerare aggruppamenti projettivi involutori, che sono stati chiamati sistemi polari.

« Si possono studiare anche aggruppamenti $\mathbf{A}p_n$, che pure diremo projettivi, costituiti da gruppi $\mathbf{G}_n$ di elementi ciascuno di una di n forme $F_2^1,\ldots,F_2^n$, tali che $n-2$ qualunque di questi elementi costituiscano un gruppo $\mathbf{G}_n$, di $\mathbf{A}p_n$, insieme a tutti i gruppi di un aggruppamento projettivo $\mathbf{A}p_2$. Si possono anche studiare i sistemi fondamentali generati da aggruppamenti projettivi $\mathbf{A}p_n$, ecc. ecc.

« Se le n forme F_2^i sono sovrapposte, si possono ottenere aggruppamenti projettivi involutori, *involuzioni* $\mathbf{I}p_{n,n-1}$. Molte delle loro proprietà e di quelle dei loro sistemi fondamentali sono state studiate.

« Per semplicità consideriamo n piani punteggiati sovrapposti ad uno stesso φ_2.

« 2. Data un'involuzione $\mathbf{I}p_{n,n-1}$ e prese n rette $r_1, r_2, \ldots, r_n$ di φ_2, $n-1$ punti $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ dati rispettivamente sulle rette $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$, insieme ai punti della loro retta polare rispetto a $\mathbf{I}p_{n,n-1}$, costituiscono gruppi di $\mathbf{I}p_{n,n-1}$; la retta polare incontra in un punto A_n la r_n, e si hanno così ∞^{n-1} gruppi $\mathbf{G}_n(A_1 \ldots A_n)$. Fissati $n-2$ punti qualunque $A_1, \ldots, A_{n-2}$ di $\mathbf{G}_n$, se A_{n-1} descrive r_{n-1}, A_n descrive r_n e corrisponde ad esso projettivamente; quindi i gruppi A_{n-1} A_n generano un aggruppamento projettivo $\mathbf{A}p_2$. Si vede così che i gruppi G_n generano un aggruppamento projettivo $\mathbf{A}p_n$. Se le n rette coincidono in una r_1, su di essa si ha una involuzione, e n punti *n-pli* per essa. Questi sono *punti n-pli* di $\mathbf{I}p_{n,n-1}$, e generano una linea c_n *di ordine n* incontrata in n punti da una qualunque retta del suo piano, che diremo la *linea n-pla* di $\mathbf{I}p_{n,n-1}$.

« 3. Immaginiamo data una involuzione $\mathbf{I}p_{n,n-1}$ di φ_2 e sia c_n la sua linea *n-pla*. Prendiamo poi due punti O_1, O_2 non appartenenti a c_n e una

[1] [V. la Nota alla fine. C. SEGRE].

retta r di φ_2. Siano $A_1, \ldots, A_n$ n punti qualunque di r. Sulle rette $O_1 A_1, \ldots, O_1 A_n$ vi sono ∞^{n-1} gruppi $B'_1, \ldots, B'_n$ di $\mathbf{I}p_{n,n-1}$ i quali costituiscono un aggruppamento projettivo. Le rette $O_2 B'_1, \ldots, O_2 B'_n$ hanno n punti $B_1, \ldots, B_n$ comuni con r, e i gruppi $B_1 \ldots B_n$ costituiscono un aggruppamento projettivo $\mathbf{A}p_n$ di r. Tutti i gruppi come $\mathbf{G}_{2n}(A_1 \ldots A_n B_1 \ldots B_n)$ generano un aggruppamento projettivo $\mathbf{A}p_{2n}$. Per dimostrare ciò basta far vedere che $2n - 2$ punti qualunque costituiscono un gruppo G_{2n} con tutti i gruppi di un aggruppamento projettivo $\mathbf{A}p_2$. Siccome i gruppi $A_1 \ldots A_n$ e $B_1 \ldots B_n$ entrano nello stesso modo a costituire G_{2n} basterà far vedere che preso un gruppo come $A_1 \ldots A_n B_3 \ldots B_n$, o $A_2 \ldots A_n B_2 \ldots B_n$, o $A_2 \ldots A_n B_1 B_3 \ldots B_n$, i punti B_1, B_2, o A_1, B_1, o A_1, B_2 che insieme ad esso dànno un gruppo $\mathbf{G}_{2n}$ si corrispondono projettivamente. Nel primo caso la proprietà è già dimostrata, perchè tutti i gruppi $B_1 \ldots B_n$ che insieme ad $A_1 \ldots A_n$ dànno un gruppo $\mathbf{G}_{2n}$, come abbiamo veduto, generano un aggruppamento projettivo. Nel secondo caso, essendo dati i punti $A_2, \ldots, A_n$, $B_2, \ldots, B_n$, sono dati pure i punti $B'_2, \ldots, B'_n$, e siccome tutti i punti B'_1 che insieme a questi costituiscono un gruppo di $\mathbf{I}p_{n,n-1}$ sono tutti quelli di una retta r_1, i punti corrispondenti A_1, B_1 si trovano projettando da O_1, O_2 uno stesso punto di r_1, e quindi si corrispondono projettivamente. Nel terzo caso, essendo dati i punti $A_2, \ldots, A_n$, $B_1, B_3, \ldots, B_n$, sono dati pure i punti $B'_3, \ldots, B'_n$ e le rette $O_1 A_2$, $O_2 B_1$ che devono contenere B'_2 e B'_1; ora questi punti si corrispondono su di esse projettivamente, quindi si corrispondono proiettivamente B_2 e A_1. È adesso dimostrato che i gruppi $\mathbf{G}_{2n}$ generano un aggruppamento projettivo $\mathbf{A}p_{2n}$.

« I $2n$ elementi $2n$-*pli* di $\mathbf{A}p_{2n}$ sono gli n punti comuni a r e c_n e il punto comune a r e alla retta $O_1 O_2$ contato n volte.

« Un punto M di r determina una retta $O_2 M$ la quale ha n punti $N'_1, \ldots, N'_n$ comuni con la linea c_n, le n rette $O_1 N'_1, \ldots, O_1 N'_n$ incontrano r in n punti $N_1, \ldots, N_n$ corrispondenti a M; analogamente a uno dei punti N corrispondono n punti M. Si ha così una corrispondenza $[n, n]$, che è projettiva essendo costruita coll'aggruppamento projettivo $\mathbf{A}p_{2n}$.

« 4. Supponiamo date, in uno stesso piano φ_2, due linee c_n, c_m, di ordine n e m. Prendiamo due punti O_1, O_2 non appartenenti a c_n nè a c_m e una qualunque retta r di φ_2.

« Se per O_2 conduciamo in φ_2 una retta $O_2 M$, che incontri r in M, i suoi n punti $N'_1, \ldots, N'_n$ comuni con c_n dànno n rette $O_1 N'_1, \ldots, O_1 N'_n$ che incontrano r in n punti $N_1, \ldots, N_n$. Tra i punti M, N di r esiste (n. 3) una corrispondenza projettiva $[n, n]$. Ogni retta $O_1 P$, condotta in φ_2, incontra r in un punto P e incontra c_m in m punti $Q'_1, \ldots, Q'_m$ i quali dànno m rette $O_2 Q'_1, \ldots, O_2 Q'_m$ che incontrano r in m punti $Q_1, \ldots, Q_m$. Tra i punti P, Q di r esiste una corrispondenza projettiva $[m, m]$. Ora tra

i punti M, Q, e quindi tra le rette O_2M, O_2Q, si può (facendo coincidere N e P) stabilire una corrispondenza projettiva $[mn, mn]$ risultante delle due $[n, n]$, $[m, m]$. I raggi doppi saranno $2mn$. Evidentemente tra questi mn coincidono con O_2O_1, e i rimanenti mn sono quelli che da O_2 vanno ai punti comuni a c_n, c_m.

Due linee di ordine m, n hanno sempre mn punti comuni.

« Bastino questi cenni per provare che i principî stabiliti nelle due prime parti del presente lavoro sono sufficienti per dedurne una teoria geometrica pura delle linee e delle superficie *n-ple* di involuzioni projettive, linee e superficie che sono tutte quelle dette algebriche.

Pisa, 30 dicembre 1887.

Nota di C. Segre. — Le pagine precedenti (a cui ho conservato il titolo originale, sebbene della *teoria generale* a cui si riferiscono contengano solo il principio) costituiscono la 3ª (ed ultima) Parte — fino ad oggi inedita — del manoscritto che, sotto il titolo « *Fondamenti di una teoria, puramente geometrica, delle curve e delle superficie* », il compianto De Paolis presentò a quest'Accademia nel concorso al premio Reale per la Matematica relativo al 1887. Veggansi in proposito la Relazione sul detto concorso in questi Rendiconti t. V (2° sem. 1889), pag. 300, e quella recentissima (che propone un premio postumo al De Paolis) nel presente volume dei Rendiconti, pag. 185; non che i Cenni biografici del De Paolis da me pubblicati nel t. VI (1892) dei Rend.i del Circ.° matem.° di Palermo. — Si sa che, dopo presentato quel lavoro pel concorso, l'Autore si occupò di completarlo e di stamparlo. Ed in fatti le prime due parti di esso furono pubblicate, con vari rimaneggiamenti e con qualche ampliamento: v. rispettivamente la *Teoria dei gruppi geometrici e delle corrispondenze che si possono stabilire tra i loro elementi* (Memorie della Società Italiana delle scienze, t. 7, ser. 3ª, 1890) e *Le corrispondenze projettive nelle forme geometriche fondamentali di 1ª specie* (Memorie della R. Accad. delle scienze di Torino, t. 42, ser. 2ª, 1892). Ma la morte — tanto funesta ed immatura! — impedì all'A. di completare questa 3ª Parte, la quale, per mancanza di tempo, s'era ridotta nel manoscritto a pochi cenni, mentre avrebbe richiesto un ampio sviluppo.

Incaricato dall'egregia Famiglia De Paolis di esaminare alcune carte del nostro compianto collega (nel che fui gentilmente aiutato, fra gli altri, dai signori Ciani, Enriques e Lazzeri), non rinvenni tra esse nulla che si riferisse a questo lavoro. Ho perciò ristampata qui quella 3ª Parte tal quale essa si trova nel manoscritto conservato dall'Accademia: persuaso che essa possa servire a dar qualche idea del metodo con cui l'A. intendeva di applicare i risultati delle Parti precedenti e specialmente della 2ª, relativa agli aggruppamenti projettivi nelle forme di 1ª specie, allo studio degli aggruppamenti projettivi di specie superiore, e quindi delle curve e superficie algebriche. — Di mutamenti rispetto al mscr. non ho fatto altro che: correggere poche sviste materiali; introdurre una nuova numerazione dei paragrafi, invece di continuar quella delle Parti precedenti; ed adottare — come ha fatto l'A. nella 2ª delle suddette Memorie stampate — i simboli **A**p, **I**p per indicare gli aggruppamenti *projettivi* e le involuzioni *projettive*, in luogo di **A** ed **I** che si trovano nel mscr. —

Mi permetto di aggiungere qui poche parole intorno a quelli fra gli altri manoscritti inediti del De Paolis che, come dissi, io fui incaricato di esaminare. Fra essi non ne trovai alcuno che fosse pronto per la stampa, o che (secondo me) l'A. dopo qualche ritocco avrebbe

volentieri pubblicato. Ho perciò rinunziato ad occuparmi della loro pubblicazione. A vero dire, uno di essi, col titolo « *Sulla Jacobiana di quattro superficie* » e con la data del 1885, ha tutti i caratteri esterni di un mscr. da stampare. Il suo scopo è di determinare la multiplicità che la Jacobiana di quattro superficie ha lungo una curva che sia multipla rispettivamente secondo i_1, i_2, i_3, i_4, (≥ 0) per queste; e trova che essa è *in generale* $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 - 2$, ma diventa $i_1 - 1$ se tre delle i, p. e. $i_2 . i_3$, i_4, sono nulle, e diventa $4i - 1$ se le quattro superficie hanno lo stesso ordine e la stessa multiplicità i lungo la curva. Il metodo adoperato consiste nel condurre per la curva una superficie razionale (un monoide); l'intersezione di questa con la detta Jacobiana vien rappresentata da un'equazione fra i parametri della superficie razionale, da cui si dovrà staccare il fattore rappresentante la curva data tante volte quanta è la multiplicità cercata di questa curva per la Jacobiana. Questo concetto, diverso da quelli usati prima da altri per problemi siffatti, sembra ingegnoso e semplice. Ma il procedimento con cui viene attuato nel mscr. non mi pare soddisfacente: e questa credo sia la causa per cui l'A. rinunziò poi alla pubblicazione.

Altre carte si riferiscono all'*esagrammo di Pascal*, che tentano di studiare ricorrendo ad una figura stereometrica. Poco prima — scrive l'A. — il Cremona ed il Caporali avevano dedotte le principali proprietà dell'esagrammo da figure che si presentano nelle superficie cubiche e nella superficie di Kummer. Egli invece si propone di dedurle considerando la conica come sezione piana di un iperboloide: pei 6 vertici dell'esagono passano due sestuple $p_1 \dots p_6$, $q_1 \dots q_6$ di generatrici dell'iperboloide; le coppie di rette $p_r q_s$ $(r \neq s)$ determinano altri 30 punti π_{rs} e 30 piani Π_{rs}; le coppie di punti come $\pi_{rs}\, \pi_{sr}$ determinano 15 rette; ecc. ecc.: e così nasce una figura stereometrica le cui proprietà sono strettamente legate a quelle dell'esagrammo. Però la deduzione di queste ultime non viene spinta abbastanza in là; e nemmeno si può dire che si faccia molto semplicemente.

Infine meritano menzione alcuni studî su quistioni relative a sistemi lineari di curve piane, fra cui principalmente le seguenti: 1° Dati ν sistemi lineari projettivi di curve $C', \dots, C^\nu$, d'ordine $n_1, \dots, n_\nu$, ognuno dei quali sia $\infty^{\nu+\tau}$ ove $\tau = 0, 1, \dots, \nu - 2$, se x, y sono due punti tali che i sistemi omologhi (nella detta projettività) $\infty^{\nu-2}$ di curve $C', \dots, C^{\tau+2}$, i quali passano per x, passino pure per y insieme coi sistemi omologhi $\infty^{\nu-2}$ di curve $C^{\tau+3}, \dots, C^\nu$, tra i punti x, y del piano si avrà una corrispondenza (α_x, α_y), essendo

$$\alpha_x = \sum_1^{\tau+2} n_\rho n_\sigma - \sum_1^{\tau+2} S r_{\rho b}\, r_{\sigma b} - \frac{(\tau+1)(\tau+2)}{2}$$

$$\alpha_y = \sum_1^{\nu} n_\rho n_\sigma - \sum_1^{\nu} S r_{\rho b}\, r_{\sigma b} - \frac{(\tau+1)(\tau+2)}{2},$$

ove le $r_{\rho b}$ indicano le multiplicità che il sistema lineare C^ρ ha nei punti base b (che possono esser comuni anche a più sistemi, ed ai quali vanno estese le somme indicate con S). Studio di questa corrispondenza: linee che corrispondono alle rette; punti fondamentali; linee fondamentali; ecc. Curva unita, ossia luogo dei punti per ciascun dei quali passano ν curve omologhe dei ν sistemi in guisa però che le $C', \dots, C^{\tau+2}$ vi si tocchino: è d'ordine

$$(\tau+2) \sum_1^{\nu} n_\rho + (\tau+1) \sum_1^{\tau+2} n_\rho - 3\,\frac{(\tau+1)(\tau+2)}{2},$$

con determinate multiplicità nei punti base. — 2° Dati ν sistemi lineari projettivi di curve $C', \dots, C^\nu$, di dimensione $\nu + \tau - 1$, ove $\tau = 0, 1, \dots, \nu - 2$, se x, y indicano due punti tali che i sistemi omologhi $\infty^{\nu-3}$ di curve $C', \dots, C^{\tau+2}$, i quali passano per x, pas-

sino pure per y insieme coi sistemi omologhi $\infty^{\nu-3}$ di curve $C^{\tau+3}, \ldots, C^{\nu}$, i luoghi di x e di y sono due curve di ordini

$$\sum_1^{\tau+2} n_\rho \left\{ \sum_1^{\nu} n_\rho n_\sigma - \sum_1^{\nu} S r_{\rho b} r_{\sigma b} - \frac{\tau(\tau+1)}{2} \right\} - \frac{(\tau+1)(\tau+2)}{2} \sum_1^{\nu} n_\rho + \frac{\tau(\tau+1)(\tau+2)}{2},$$

$$\sum_1^{\nu} n_\rho \left\{ \sum_1^{\tau+2} n_\rho n_\sigma - \sum_1^{\tau+2} S r_{\rho b} r_{\sigma b} - \frac{(\tau+1)(\tau+2)}{2} \right\} - \frac{\tau(\tau+1)}{2} \sum_1^{\tau+2} n_\rho + \frac{\tau(\tau+1)(\tau+2)}{2};$$

caratteri di queste curve, ecc. — 3° Con gli stessi dati dei due problemi precedenti, solo con la riduzione dei ν sistemi lineari projettivi alla dimensione $\nu + \tau - 2$, si ha un numero finito, che vien determinato, di coppie di punti x, y simili a quelle dei problemi precedenti.

Matematica. — *Le assintotiche delle rigate algebriche di genere qualunque che fanno parte di una congruenza lineare.* Nota di Giulio Pittarelli presentata dal Socio Cremona.

N. 1. *Direttrici distinte.*

« Fu trovato nella prima Nota inserita a pag. 111 di questi Rendiconti, che posta l'eq^e^. algebrica

1) $$\Phi\left(\overset{m}{\mu}, \overset{n}{\nu}\right) = 0$$

quella della superficie è

$$\Phi\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_4}\right) = 0$$

mentre poi le eq^i^. delle generatrici sono

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \mu, \quad \frac{x_3}{x_4} = \frac{\varphi_3}{\varphi_4} = \nu,$$

e quella 9) delle assintotiche A_k

$$Ff^2 - kGg^2 = 0$$

può scriversi, per le segnature adoperate in 10) della Nota predetta

$$\frac{d\mu}{dv} \varphi_2^2 f^2 - k \frac{d\nu}{dv} \varphi_4^2 g^2 = 0,$$

ed anche posto f e g in luogo di $\varphi_2 f$ e $\varphi_4 g$

2) $$\frac{d\mu}{dv} f^2 - k \frac{d\nu}{dv} g^2 = 0;$$

mentre per i punti di Φ si hanno le

3) $$x_1 = f\mu, \; x_2 = f, \; x_3 = g\nu, \; x_4 = g.$$