ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1894

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME III.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1894

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia prima del 21 ottobre 1894.

Meccanica. — *Sulle tensioni in un sistema elastico articolato.* Nota II di F. Siacci.

§ 9

« Consideriamo ora un sistema elastico articolato, nel quale alcuni nodi possano ritenersi come fissi od obbligati a rimanere su linee o superficie fisse, o in generale, abbiano coordinate legate da equazioni, oltre quelle che definiscono le l_{rs}, cioè

$$l^2_{rs} = (x_r - x_s)^2 + (y_r - y_s)^2 + (z_r - z_s)^2 . \tag{30}$$

« Le equazioni di condizione siano

$$A_1 = 0 \, , \; A_2 = 0 \, , \ldots , \; A_k = 0 \, , \tag{31}$$

ove $k < 3n$, ed $A_1 \, A_2 \ldots A_k$ rappresentano funzioni qualunque delle coordinate, o dei lati l_{rs}, tra cui sussistono le equazioni omogenee:

$$\Omega_1 = 0 \, , \ldots , \Omega_m = 0 \, , \left[m = \frac{n(n-1)}{2} - 3n + 6 \right] . \tag{32}$$

« Dall'equazione dei lavori virtuali:

$$d\mathrm{U} - \sum_{rs} \mathrm{T}_{rs} \, dl_{rs} = 0 \, ,$$

(ove U rappresenta la funzione delle forze applicate), considerando $3n - 6$ delle coordinate come funzioni di altrettanti lati scelti ad arbitrio e delle rimanenti sei coordinate, che designeremo come al § 1, con $c_1 c_2 \ldots c_6$, si trae:

$$(33) \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{T}_{rs} = \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial l_{rs}} + \sum\limits_u \omega_u \dfrac{\partial \Omega_u}{\partial l_{rs}} + \sum\limits_v \alpha_v \dfrac{\partial \mathrm{A}_v}{\partial l_{rs}} \\ 0 \;\;= \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial c_j} + \sum\limits_v \alpha_v \dfrac{\partial \mathrm{A}_v}{\partial c_j} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} u = 1, 2 \ldots m \\ v = 1, 2 \ldots k \\ j = 1, 2 \ldots 6 \end{array}\right.$$

« Queste equazioni sono $\dfrac{n(n-1)}{2} + 6$, mentre i moltiplicatori ω sono $\dfrac{n(n-1)}{2} - 3n + 6$, e i moltiplicatori α sono k. Se adunque si eliminano tutti questi moltiplicatori, restano $3n - k$ equazioni, ove tutto sarà noto tranne le tensioni. Sono propriamente queste $3n - k$ equazioni che noi in seguito intenderemo per equazioni o condizioni di equilibrio, qualunque siano d'altronde le quantità che determinano la posizione del sistema.

« Tornano qui opportune alcune dichiarazioni circa le quantità l e c, di cui sono funzioni la U, le A e le Ω. Le Ω non sono funzioni esplicite che delle l; se in esse le l si esprimono per le coordinate, le Ω divengono identicamente nulle. La U e le A nelle (33) sono funzioni esplicite tanto delle l quanto delle sei coordinate c (§ 1). Dunque una di queste (supponiamo sia x_1) entra in U, come nelle A, in due modi: esplicitamente ed implicitamente; implicitamente, perchè tutte le l che fanno capo al nodo 1 sono funzioni di x_1. Noi a scanso d'equivoci, rappresentiamo la stessa quantità in due modi: con c_1 o con x_1 secondochè la consideriamo come quantità esplicita o come implicita: e volendo scrivere la derivata completa di una delle funzioni U o A rispetto ed x_1, per esempio di A_v, scriveremo

$$(34) \qquad \frac{\partial \mathrm{A}_v}{\partial x_1} = \sum_s \frac{\partial \mathrm{A}_v}{\partial l_{1s}} \frac{\partial l_{1s}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathrm{A}_v}{\partial c_1} = \left(\frac{\partial \mathrm{A}_v}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial \mathrm{A}_v}{\partial c_1}.$$

« Cerchiamo ora una funzione F delle T, le cui condizioni di massimo o di minimo compatibilmente coll'equazioni d'equilibrio equivalgano a

$$(35) \qquad \mathrm{T}_{rs} = \varepsilon_{rs} (l_{rs} - \mathrm{L}_{rs}).$$

Se la F dev'essere massima o minima compatibilmente colle equazioni di equilibrio, siccome esse equivalgono alle (33), dovranno verificarsi queste altre:

$$\sum_{rs} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{T}_{rs}} \frac{\partial \mathrm{T}_{rs}}{\partial \omega_u} = 0, \sum_{rs} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{T}_{rs}} \frac{\partial \mathrm{T}_{rs}}{\partial \alpha_v} + \sum_i \tau_j \frac{\partial \mathrm{A}_v}{\partial c_j} = 0,$$

ossia:

$$(36) \qquad \sum_{rs} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{T}_{rs}} \frac{\partial \Omega_u}{\partial l_{rs}} = 0, \quad \sum_{rs} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{T}_{rs}} \frac{\partial \mathrm{A}_v}{\partial l_{rs}} + \sum_j \tau_j \frac{\partial \mathrm{A}_v}{\partial c_j} = 0,$$

ove $\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_6$ sono sei moltiplicatori da determinare dipendenti dalle condizioni (33) scritte in seconda linea.

§ 10.

« Poniamo

(37) $$\frac{\partial F}{\partial T_{rs}} = \delta l_{rs}\,, \quad \imath_j = \delta c_j\,.$$

I primi membri delle (36) divengono $\delta\Omega_1, \ldots \delta\Omega_m$, $\delta A_1 \ldots \delta A_k$, che sono tutti nulli se δl_{rs} e δc_j sono incrementi infinitesimi compatibili con l'equazioni (31) e (32). Ciò noi supponiamo; ed allora se vi sono più nodi fissi $i, i' \ldots$, la loro distanza essendo invariabile, le equazioni (31) importano $\delta l_{ii'} = 0, \ldots$, e quindi

$$\frac{\partial F}{\partial T_{ii'}} = 0\,;$$

ciò significa che la funzione F non contiene le tensioni corrispondenti alle aste congiungenti i punti fissi.

« Ciò posto, le (36) saranno soddisfatte da

(38) $$\frac{\partial F}{\partial T_{rs}} = l_{rs} - L_{rs}\,,$$

se si verificano due condizioni: 1° che gli allungamenti siano infinitamente piccoli; 2° che le lunghezze naturali L_{rs} siano compatibili colle condizioni geometriche del sistema. Quest'ultima condizione significa che, tolte le forze, le tensioni di tutte le aste, tranne quelle, se vi sono, congiungenti i punti fissi, siano tutte nulle, e inoltre che il sistema possa in questo stato appoggiarsi alle superficie, alle linee, e ai punti fissi.

« Date tali condizioni, se le (38) debbono equivalere alle (35) dovrà essere

(39) $$\frac{\partial F}{\partial T_{rs}} = \frac{T_{rs}}{\varepsilon_{rs}}, \text{ onde: } F = \frac{1}{2}\sum_{rs}\frac{T^2_{rs}}{\varepsilon_{rs}} = \textit{minimo}$$ [1]

cioè il teorema stesso che vale pei sistemi liberi, aggiunta però qui la condizione, che il sistema possa senza tensioni essere collocato sugli appoggi dati.

« Se per esempio, quattro nodi del sistema dovessero appoggiarsi ad un piano, e i quattro nodi prima dell'applicazione delle forze non fossero in un piano, il teorema non sussisterebbe.

[1] Nè qui nè in seguito dimostreremo che le funzioni F sono *minime* e non massime, perchè le dimostrazioni sono sempre analoghe a quella del § 2. S'intende poi sempre che il *minimo* ha luogo compatibilmente coll'equazioni d'equilibrio.

§ 11.

« La condizione relativa alle lunghezze naturali L_{rs} può essere tolta di mezzo, se noi intendiamo che le $l_{rs} - \delta l_{rs}$ siano non le lunghezze L_{rs}, ma le lunghezze delle aste del medesimo sistema in un'altra posizione d'equilibrio, infinitamente vicina all'attuale, sotto altre forze ma cogli stessi appoggi esterni. Allora le (36) sono soddisfatte dalle (37). Se ora diciamo T_{ors} le tensioni corrispondenti a quella posizione, avremo

$$T_{rs} = T_{ors} + \varepsilon_{rs}\,\delta l_{rs}\,,$$

e quindi le (37) dovendo equivalere a questa, dovrà essere

$$\frac{\partial F}{\partial T_{rs}} = \frac{T_{rs} - T_{ors}}{\varepsilon_{rs}}\,;$$

onde

$$F = \frac{1}{2}\sum_{rs} \frac{(T_{rs} - T_{ors})^2}{\varepsilon_{rs}} = \mathit{minimo}\,, \tag{40}$$

come al § 7. Ed anche qui la funzione F, che rappresenta il lavoro dovuto agl'incrementi delle tensioni nel passaggio da una figura all'altra, è eguale alla somma algebrica dei lavori delle forze esterne ed interne nel passaggio stesso, giacchè questo lavoro è

$$L = \delta U - \frac{1}{2}\sum_{rs} \frac{T^2_{rs} - T^2_{ors}}{\varepsilon_{rs}}$$

e dalle (33) ricavandosi

$$\sum_{rs} T_{rs}\,\delta l_{rs} \quad \text{ossia} \quad \sum_{rs} \frac{T_{rs}\,(T_{rs} - T_{ors})}{\varepsilon_{rs}} = \delta U$$

viene:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{rs} \frac{(T_{rs} - T_{ors})^2}{\varepsilon_{rs}}\,. \tag{41}$$

« Se, tolte tutte le forze, il sistema può essere collocato sugli appoggi si possono prendere per T_{ors} le tensioni del sistema in tale posizione, che in generale non saranno nulle. Se sono nulle si rientra nel teorema precedente [1].

[1] Il quale, come si vede, raramente potrà applicarsi con pieno rigore anche ammesse le deformazioni infinitesime. Applicandolo per approssimazione, si dimostra facilmente che le tensioni che si ottengono in luogo delle vere sono le $T_{rs} - T_{ors}$. Le T_{ors} saranno nella maggior parte dei casi, trascurabili, ma non sempre. Badino in ogni caso gl'ingegneri ai coefficienti di resistenza, ed accolgano colla debita discrezione le parole che il Castigliano scrive nella prefazione del suo libro: « En suivant la nouvelle méthode de calcul qui « permet de resoudre toutes les questions sur l'équilibre des systèmes élastiques sans intro- « duire aucune hypothèse, on a l'avantage de pouvoir adopter un plus grand coefficient « de résistance, car une des causes qui obligent souvent, dans la pratique, à adopter de « petites valeurs pour ce coefficient, c'est l'imperfection des principes sur lesquels on se « base pour évaluer les forces élastiques ».

« In ogni caso si potrà considerare come posizione iniziale questa. Togliendo tutte le forze ed alcune aste, le altre potranno prendere la lunghezza naturale, e nello stesso tempo essere appoggiate. Queste aste ridotte alla lunghezza naturale designamole con L_p, e sono quelle che, tese, avevano le lunghezze l_p. Le lunghezze naturali delle altre designamole con L_q. Ora non togliamo alcun'asta, ma immaginiamo modificate le forze esterne in modo, che mentre tutte le aste soddisfano alle condizioni geometriche, le aste l_p prendano inoltre le lunghezze naturali L_p. Queste avranno allora tensioni nulle. Le lunghezze delle altre si potranno determinare con una costruzione geometrica, e saranno diverse da L_q. Siano $L_q + \Delta L_q$; la loro tensione sarà $\varepsilon_q \Delta L_q$. Così la (40) diviene

(42) $$F = \frac{1}{2} \sum_p \frac{T_p^2}{\varepsilon_p} + \frac{1}{2} \sum_q \frac{(T_q - \varepsilon_q \Delta L_q)^2}{\varepsilon_q} = \mathit{minimo}$$

formola analoga alla (29), ma in questa le aste L_p sono in numero minore di $3n - 6$ [1].

§ 12.

« Poniamo nelle (36)

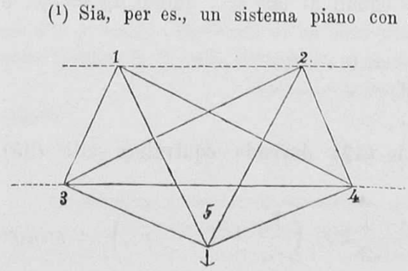
(43) $$\frac{\partial F}{\partial T_{rs}} = l_{rs} - \mu_{rs}\,, \quad \tau_j = c_j - \gamma_j\,,$$

dove

(44) $$\mu_{rs} = \frac{\partial l_{rs}}{\partial x_r}\xi_r + \frac{\partial l_{rs}}{\partial x_s}\xi_s + \frac{\partial l_{rs}}{\partial y_r}\eta_r + \frac{\partial l_{rs}}{\partial y_s}\eta_s + \frac{\partial l_{rs}}{\partial z_r}\zeta_r + \frac{\partial l_{rs}}{\partial z_s}\zeta_s\,,$$

e $\xi\ \eta\ \zeta$ sono $3n$ quantità arbitrarie corrispondenti in un modo qualunque alle coordinate $x\ y\ z$, e dove γ_j è quella di queste quantità arbitrarie che corrisponde alla coordinata c_j. Abbiamo già veduto al § 5 che le (36) del primo gruppo re-

[1] Sia, per es., un sistema piano con 5 vertici 1, 2, 3, 4, 5. I vertici 1 e 2 sieno fissi, e 3 e 4 si appoggino ad una retta parallela ad $\overline{12}$, e distante da essa di r. Le aste sono 9, poichè quella congiungente i punti fissi non c'è, o non si conta. Supponiamo che colle 9 lunghezze naturali non si possa soddisfare alle condizioni geometriche imposte, ma che le aste L_{13} ed L_{24} siano maggiori di r, allora potremo formare una figura, come quella di contro, in cui le quattro aste L_{13} L_{24} L_{15} L_{25} avranno le lunghezze naturali, e delle altre cinque si potranno determinare le lunghezze sulla figura: le loro eccedenze sulle lunghezze naturali saranno le quantità Δ da mettersi nella formola (42).



stano soddisfatte. Mettendo poi l_{rs} sotto una forma simile a quella di μ_{rs}, si trova operando come nel § 4, e ponendo mente alle (34),

$$\begin{aligned}\sum_r \sum_s \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} \frac{\partial A_v}{\partial l_{rs}} + \sum_j \tau_j \frac{\partial A_v}{\partial c_j} = \sum_r \Bigg[\left(\frac{\partial A_v}{\partial x_r}\right)(x_r - \xi_r) + \left(\frac{\partial A_v}{\partial y_r}\right)(y_r - \eta_r) + \\ + \left(\frac{\partial A_v}{\partial z_r}\right)(z_r - \zeta_r)\Bigg] + \sum_j \frac{\partial A_v}{\partial c_j}(c_j - \gamma_j) \\ = \sum_r \left[\frac{\partial A_v}{\partial x_r}(x_r - \xi_r) + \frac{\partial A_v}{\partial y_r}(y_r - \eta_r) + \frac{\partial A_v}{\partial z_r}(z_r - \zeta_r)\right].\end{aligned} \tag{45}$$

Onde le (36) del secondo gruppo saranno soddisfatte, se le $\xi\,\eta\,\zeta$ rendono nulli i secondi membri di queste equazioni.

« Interpretiamo geometricamente tali condizioni. Considerando le $\xi\,\eta\,\zeta$ come coordinate di n punti formanti un poligono σ, e dicendo λ_{rs} il lato di σ che congiunge i punti r ed s, μ_{rs} rappresenta la proiezione su l_{rs} di λ_{rs}. Ora se i vincoli esterni del sistema elastico sono nodi fissi, o superficie o linee fisse su cui alcuni nodi debbano rimanere, ciascuna delle (31) conterrà le coordinate di un solo nodo, e rappresenteranno tutte delle superficie, giacchè se un nodo ha da rimanere sopra una linea fissa, è come dovesse rimanere su due superficie ad un tempo, delle quali quella linea è l'intersezione, e se un nodo è fisso è come se dovesse rimanere su tre superficie. Dicendo dunque i il nodo a cui si riferisce una delle (31), le (45) poste eguali a zero daranno

$$\frac{\partial A_v}{\partial x_i}(x_i - \xi_i) + \frac{\partial A_v}{\partial y_i}(y_i - \eta_i) + \frac{\partial A_v}{\partial z_i}(z_i - \zeta_i) = 0\ , \tag{46}$$

cioè il punto i del poligono σ dee trovarsi sul piano tangente alla superficie A_v nel punto in cui è il nodo i del sistema elastico. E se il nodo i ha da rimanere su una linea fissa, il punto i di σ dovrà essere sulla tangente a quella linea nel punto in cui trovasi attualmente il nodo i; se finalmente il nodo i è fisso, il punto i di σ dee coincidere con esso. Se il sistema è piano, il poligono σ dovrà essere sullo stesso piano; se, infine, vi sono più nodi fissi $i, i' \ldots$ i lati $\lambda_{ii'}$ di σ saranno eguali ai lati $l_{ii'}$: quindi $\mu_{ii'} = l_{ii'}$, e

$$\frac{\partial F}{\partial T_{ii'}} = 0\ .$$

Ciò significa che F non contiene $T_{ii'}$.

« Per tutte le altre tensioni le (43) dovendo equivalere alle (35), avremo

$$\frac{\partial F}{\partial T_{rs}} = \frac{T_{rs}}{\varepsilon_{rs}} + L_{rs} - \mu_{rs}\,,\ \text{ed}\ F = \frac{1}{2}\sum_{rs} \varepsilon_{rs}\left(\frac{T_{rs}}{\varepsilon_{rs}} + L_{rs} - \mu_{rs}\right)^2 = \mathit{minimo} \tag{47}$$

cioè il teorema stesso del § 5, aggiunte le condizioni del poligono σ.

« Se le lunghezze naturali sono eguali alle μ_{rs}, cioè se esse sono le proiezioni dei lati del poligono σ sui lati corrispondenti del sistema elastico, allora ha luogo

$$F = \frac{1}{2} \sum_{rs} \frac{T^2_{rs}}{\varepsilon_{rs}} = minimo$$ (1)

« La soluzione

$$(48) \qquad F = \frac{1}{2} \sum_{rs} \varepsilon_{rs} \left(\frac{T_{rs}}{\varepsilon_{rs}} + L_{rs} \right)^2 = minimo$$

che, come abbiamo veduto al § 2, ha luogo quando il sistema è isolato, e che corrisponde al caso particolare in cui le $\xi\ \eta\ \zeta$ sieno tutte nulle, non regge, in generale, quando esistono appoggi; regge tuttavia, quando le coordinate dei nodi appoggiati soddisfino alle equazioni

$$\frac{\partial A_v}{\partial x_i} x_i + \frac{\partial A_v}{\partial y_i} y_i + \frac{\partial A_v}{\partial z_i} z_i = 0 \ .$$

Ciò si verifica quando i piani tangenti alle superficie A_v passino per l'origine, e siccome l'origine è arbitraria, possiamo dire che la soluzione (48) sussiste quando i piani tangenti alle superficie nei punti ove trovansi i nodi rispettivi, passano tutte per un punto. Avrà dunque sempre luogo, quando i piani tangenti alle superficie non siano più di tre (*distinti*).

« Se, per esempio, il sistema è piano, ed alcuni nodi debbono rimanere su una retta, alcuni sopra un'altra, gli altri essendo liberi, la (48) sussiste.

« Il teorema adunque rappresentato dalla formula (48) può avere appli-

(1) Da n punti fissi nello spazio partono altrettante aste o cordoni rettilinei che fanno capo in un punto P ($\alpha\ \beta\ \gamma$). Applicata a questo capo una forza qualsiasi, esso passa in O ($x_0\ y_0\ z_0$) ad una distanza finita da P. Le tensioni rendono minima la somma $\sum \frac{T^2}{\varepsilon}$ se i punti fissi (di coordinate $x\ y\ z$) si trovano sulla superficie

$$\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^1\right]$$
$$=\left[(x-x_0)(x-\alpha')+(y-y_0)(y-\beta')+(z-z_0)(z-\gamma')\right],$$

ove $\alpha'\ \beta'\ \gamma'$ sono le coordinate di un altro punto Q, che è il punto del poligono σ. Mettendo l'origine in O, ossia ponendo $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, l'equazione della superficie diviene

$$(x^2+y^2+z^2)(2q-2p) = q^2 \ ,$$

essendo

$$p = \alpha\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) + \beta\left(y - \frac{\beta}{2}\right) + \gamma\left(z - \frac{\gamma}{2}\right) \ , \ q = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \ .$$

La superficie è dunque di terz'ordine, contiene un punto doppio in O, ed una retta R ($p = 0$, $q = 0$) perpendicolare al piano OPQ, e che è l'intersezione di due piani, l'uno perpendicolare a OQ e passante per O, l'altro perpendicolare ad OP e passante pel suo punto medio. Tutti i piani $[\lambda(2q-2p) = q]$, che passano per la retta R, tagliano la superficie secondo cerchi $[x^2+y^2+z^2 = \lambda q]$, onde si vede che i punti fissi possono anche stare sopra un cerchio.

cazioni. In queste, ove non siano note le lunghezze naturali, si potranno per esse assumere le lunghezze effettive l, che ne differiscono sempre pochissimo.

« Una soluzione più generale di quella data dalle (43) si presenterebbe ponendo

$$(49) \qquad \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} = l_{rs} - \mu_{rs}\,, \quad \tau_j = c_j - \gamma_j + b_j\,,$$

dando alle μ_{rs} e γ_j lo stesso significato che hanno nelle (43), e le b_j essendo sei quantità da determinare. Le equazioni a cui queste sei quantità dovrebbero soddisfare, sono

$$(50) \quad \frac{\partial A_v}{\partial x_i}(x_i - \xi_i) + \frac{\partial A_v}{\partial y_i}(y_i - \eta_i) + \frac{\partial A_v}{\partial z_j}(z_i - \zeta_i) + \sum_j b_j \frac{\partial A_v}{\partial c_j} = 0$$

Parrebbe da queste equazioni che ove le superficie A non fossero più di sei (*distinte*) le $\xi\,\eta\,\zeta$ potrebbero assumere qualsivoglia valore, e quindi essere anche nulle: e con ciò, si allargherebbe il campo della soluzione (48). Ma per concludere con sicurezza occorrerebbe penetrare più addentro nelle proprietà delle derivate $\dfrac{\partial A_v}{\partial c_j}$.

§ 14.

« La supposizione che esistano punti fissi, o linee fisse, o superficie fisse non è diversa da quella con cui si ammettono corpi rigidi ossia distanze invariabili. Ora se la rigidità non si ammette che come un caso limite, non si possono che al medesimo titolo ammettere superficie, linee e punti fissi. In realtà i punti, le linee o le superficie su cui si appoggiano i nodi, si deformano come le aste, con questa sola differenza che mentre le aste si allungano o si accorciano, gli appoggi si comprimono più o meno secondo la loro elasticità e secondo la pressione, opponendo una resistenza eguale e contraria a questa.

« Siccome i punti e le linee sono incontri di superficie, basterà considerare la pressione su superficie deformabili.

« Ritenendo le deformazioni piccolissime, si può ammettere che la resistenza alla compressione sia proporzionale allo spostamento subito dal nodo, nel passare da un punto della superficie non deformata a un punto della superficie deformata, spostamento che si può contare sulla normale all'una o all'altra delle due superficie, giacchè, per ipotesi le due normali fanno tra loro un angolo piccolissimo.

« Siano $x\,y\,z$ le coordinate del punto M della superficie deformata, ove trovasi un nodo in equilibrio, ed $x_0\,y_0\,z_0$ quelle di un punto esterno M_0 preso sulla normale alla stessa superficie deformata. La distanza $M_0\,M$, che diremo n, sarà

$$n = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

ed i coseni direttori di $M_0 M$ saranno

$$\frac{\partial n}{\partial x}\,,\ \frac{\partial n}{\partial y}\,,\ \frac{\partial n}{\partial z}\,.$$

Sia M′ la posizione del nodo prima dell'applicazione delle forze (sulla superficie non deformata, o fuori), e sieno $x - \delta x$, $y - \delta y$, $z - \delta z$ le sue coordinate. La proiezione di M′M su $M_0 M$ sarà:

$$\frac{\partial n}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial n}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial n}{\partial z}\,\delta z$$

che rappresenteremo con δn. Se M′ trovasi sulla superficie non deformata, la resistenza P della superficie sarà data da

$$P = \varepsilon \delta n$$

essendo ε un coefficiente costante determinato o da determinarsi dall'esperienza. Ma, come si è già notato, quando al sistema articolato non sono applicate forze esterne, non sempre tutti i nodi potranno essere collocati sulle superficie non deformate, onde la precedente equazione non potrà ammettersi che in casi particolari.

« Possiamo però sempre ammettere che il sistema prima della posizione d'equilibrio, che consideriamo, si trovasse in altra posizione pure d'equilibrio, sotto altre forze, ma appoggiato alle stesse superficie, deformate o no. Se diciamo P_0 la resistenza o pressione nella posizione precedente, e P la resistenza o pressione nella posizione attuale, avremo

$$P = P_0 + \varepsilon \delta n\ ,$$

dove δn è sempre la proiezione sulla normale n della distanza tra le due posizioni del nodo

« L'equazione dei lavori virtuali è

$$\delta U - \sum_{rs} T_{rs}\, dl_{rs} - \sum_{rv} P_{rv}\, dn_{rv} = 0$$

ove P_{rv} è la resistenza di una superficie S_v su cui si appoggia il nodo r e dn_{rv} è uno spostamento virtuale contato normalmente alla superficie S_v , come dl_{rs} è l'allungamento dell'asta l_{rs} proveniente dagli spostamenti virtuali dei nodi r ed s , e δU è l'incremento della funzione delle forze applicate dovuto a tutti gli spostamenti virtuali. Per maggior generalità ed uniformità noi supponiamo tutti i nodi appoggiati, ma è chiaro che per i nodi non appoggiati basterà porre le relative P uguali a zero. Altrettanto dicasi delle T: quando due nodi non sono congiunti, ossia un' asta non c'è, la relativa T è nulla.

« Se consideriamo le l_{rs} e le n_{rv} come funzioni delle coordinate, le equazioni d'equilibrio sono

$$(51)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_r} &= \sum_s T_{rs} \frac{dl_{rs}}{\partial x_r} + \sum_v P_{rv} \frac{\partial n_{rv}}{\partial x_r} \\ \frac{\partial U}{\partial y_r} &= \sum_s T_{rs} \frac{dl_{rs}}{\partial y_r} + \sum_v P_{rv} \frac{\partial n_{rv}}{\partial y_r} \\ \frac{\partial U}{\partial z_r} &= \sum_s T_{rs} \frac{dl_{rs}}{\partial z_r} + \sum_v P_{rv} \frac{\partial n_{rv}}{\partial z_r} \end{aligned} \right.$$

La posizione d'equilibrio del sistema è conosciuta e quindi in queste $3n$ equazioni tutto è noto, tranne le tensioni che sono $\frac{n(n-1)}{2}$ e le resistenze che sono k. Onde le T e le P si potranno considerare come funzioni di

$$\frac{n(n-1)}{2} - 3n + k$$

quantità indeterminate.

« Abbiamo già veduto, come $3n - 6$ delle coordinate $x\,y\,z$ si possono considerare come funzioni dei lati l, e delle sei coordinate rimanenti $c_1\,c_2 \ldots c_6$. Quindi le normali n si possono considerare come funzioni delle stesse quantità, o in altri termini che tra le n, le l e le c sussistono k relazioni che indicheremo con

$$N_1 = 0\,,\ N_2 = 0\,, \ldots,\ N_k = 0\,,$$

mentre seguiteremo ad indicare le relazioni tra le l con

$$\Omega_1 = 0\,,\ \Omega_2 = 0\,, \ldots,\ \Omega_m = 0$$

Ciò posto, dall'equazione dei momenti virtuali, avremo

$$(52)\quad \left\{ \begin{aligned} T_{rs} &= \frac{\partial U}{\partial l_{rs}} + \sum_v \alpha_v \frac{\partial N_v}{\partial l_{rs}} + \sum_u \omega_u \frac{\partial \Omega_u}{\partial l_{rs}} \\ P_{rv} &= \sum_v \alpha_v \frac{\partial N_v}{\partial n_{rv}} \\ 0 &= \frac{\partial U}{\partial c_j} + \sum_v \alpha_v \frac{\partial N_v}{\partial c_j} \end{aligned} \right.$$

Queste equazioni sono equivalenti alle equazioni d'equilibrio (51).

« È facile ora prevedere la forma di una funzione delle T e delle P le cui condizioni di massimo o minimo equivalgano all'equazioni che danno le tensioni delle aste in funzione degli allungamenti, e le resistenze degli appoggi in funzione delle compressioni. Le condizioni di massimo o minimo di F saranno:

$$(53)\quad \sum_{rs} \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} \frac{\partial \Omega_u}{\partial l_{rs}} = 0 \qquad \sum_{rs} \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} \frac{\partial N_v}{\partial l_{rs}} + \sum_v \frac{\partial F}{\partial P_{rv}} \frac{\partial N_v}{\partial n_{iv}} + \sum_j \tau_j \frac{\partial N_v}{\partial c_j} = 0\,.$$

« Se ora poniamo

$$(54)\qquad \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} = \delta l_{rs}\,,\ \frac{\partial F}{\partial P_{rv}} = \delta n_{rv}\,,\ \tau_j = \delta c_j$$

ed intendiamo che δl_{rs}, δn_{rv}, e δc_j siano gl'incrementi di l_{rs}, n_{rv}, c_j nel passaggio alla posizione attuale da un'altra in cui erano soddisfatte tutte le condizioni geometriche, le equazioni (53) sono soddisfatte. E siccome quell'equazioni vogliamo che equivalgano a

$$(55)\qquad T_{rs} = T_{ors} + \varepsilon_{rs}\,\delta l_{rs}\ ,\ P_{rv} = P_{orv} + \varepsilon_{rv}\,\delta n_{rv}$$

avremo

$$(56)\qquad F = \frac{1}{2}\sum_{rs}\frac{(T_{rs} - T_{ors})^2}{\varepsilon_{rs}} + \frac{1}{2}\sum_{rv}\frac{(P_{rv} - P_{orv})^2}{\varepsilon_{rv}} = minimo$$

« Dunque: *nel passaggio di un sistema elastico articolato ed appoggiato da una posizione d'equilibrio ad un'altra, la somma dei lavori di deformazione dovuto agl'incrementi delle tensioni delle aste, e delle compressioni degli appoggi, è minima compatibilmente colle condizioni d'equilibrio relative alla seconda posizione.*

« Se tolte le forze, il sistema resta senza tensioni ed appoggiato, la (56) diviene

$$(57)\qquad F = \frac{1}{2}\sum_{rs}\frac{T^2_{rs}}{\varepsilon_{rs}} + \frac{1}{2}\sum_{rv}\frac{P^2_{rv}}{\varepsilon_{rv}}\,.$$

Se invece, tolte le forze, queste condizioni non si verificano, si opererà come al § 11, cioè si prenderà per posizione iniziale quella, in cui alcune aste siano alla lunghezza naturale L_p ed appoggiate senza deformazione degli appoggi, si determineranno geometricamente le lunghezze $L_q + \varDelta L_q$ delle altre aste perchè vengano a toccare gli appoggi, e si avrà

$$F = \frac{1}{2}\sum_{p}\frac{T_p^{\,2}}{\varepsilon_p} + \frac{1}{2}\sum_{q}\frac{(T_q - \varepsilon_q \varDelta L_q)^2}{\varepsilon_q} + \frac{1}{2}\sum_{rv}\frac{P^2_{rv}}{\varepsilon_{rv}}\ (^1)$$

(1) Il Castigliano nell'opera citata dopo avere notato a p. 46 che un corpo qualsiasi può considerarsi come un sistema articolato in cui tengano il luogo delle aste, le attrazioni e le ripulsioni tra le molecole che compongono il corpo, estende (a p. 52) l'enunciato del teorema del minimo lavoro nel seguente modo: « *Le forces élastiques qui ont lieu* « *entre les couples moléculaires après la déformation du corps ou du système, sont celles* « *qui rendent un* minimum *le travail de déformation, eu égard aux équations de condi-* « *tions qui expriment qu'il y a équilibre entre ces forces autour de chaque molécule* ». Dopo quanto è stato osservato, è chiaro che questo teorema, che l'autore chiama « très important » va modificato, giacchè, com'è qui enunciato, si verificherebbe nella sola ipotesi che due molecole formanti una coppia in un corpo a cui non siano applicate forze esterne, si trovino alla distanza stessa, in cui si troverebbero se fossero isolate. Non so se vi siano corpi solidi in cui questa ipotesi sia ammissibile.