ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1894

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME III.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1894

Meccanica. — *Sulle equazioni dell'elasticità negli iperspazii.* Nota di E. Cesàro, presentata dal Socio Beltrami.

« I calcoli accennati dal prof. Beltrami nella Memoria *Sulle equazioni generali dell'elasticità* (1) si possono eseguire con una certa speditezza, non priva di eleganza, anche per uno spazio curvo a quante si vogliano dimensioni, facendo uso della segnatura da noi adoperata nella Nota sulle *Formole di Codazzi negli iperspazii* (2). Prima osserviamo che i coefficienti di allungamento sono dati dalle formole

$$\theta_i = \frac{\partial u_i}{\partial s_i} + \sum \mathcal{G}_{ij}\, u_j\,,$$

in cui le u_i sono le componenti dello spostamento, e le $\mathcal{G}_{ij}$ sono quelle che nella predetta Nota abbiamo chiamate le *curvature geodetiche* dello spazio. La loro espressione è, per $i \gtrless j$,

$$\mathcal{G}_{ij} = \frac{1}{Q_i\, Q_j}\, \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\,, \tag{1}$$

in un sistema qualunque di coordinate curvilinee ortogonali. Per $i = j$ converrà supporre $\mathcal{G}_{ij} = 0$. La dilatazione unitaria è

$$\Theta = \sum \theta_i = \sum \left(\frac{\partial}{\partial s_i} + \mathcal{G}_i \right) u_i\,,$$

rappresentando con $\mathcal{G}_i$ la somma di tutte le $\mathcal{G}$, che hanno il secondo indice uguale ad i. Avremo inoltre da considerare i mutui scorrimenti ω_{ij} degli elementi lineari coordinati, e le doppie componenti ϑ_{ij} della rotazione del mezzo. Le loro espressioni si ricavano dalle formole

$$\frac{1}{2}(\omega_{ij} + \vartheta_{ij}) = \frac{\partial u_i}{\partial s_j} - \mathcal{G}_{ji}\, u_j\,, \quad \frac{1}{2}(\omega_{ij} - \vartheta_{ij}) = \frac{\partial u_j}{\partial s_i} - \mathcal{G}_{ij}\, u_i\,, \tag{2}$$

che si riducono in sostanza ad una sola se si osserva che

$$\omega_{ij} = \omega_{ji} \quad , \quad \vartheta_{ij} = -\vartheta_{ji}\,.$$

Tutte queste formole si potrebbero dimostrare assai semplicemente supponendole stabilite prima in uno spazio lineare, ed applicando poi i metodi *intrinseci* a misurare gli effetti della curvatura dello spazio. Così, per esempio, per trovare le espressioni delle ϑ, che ordinariamente si ottengono con una trasformazione d'integrali multipli, basta immaginare una particella come immersa in uno spazio lineare con una dimensione di più, e calcolare la ro-

(1) Annali di matematica, 1881.

(2) Rend. dell'Acc. di Napoli, 12 Maggio 1894

tazione della normale alla particella, nel moto rigido di questa, mercè le formole fondamentali della Geometria intrinseca degli iperspazii. A questa sola rotazione si debbono, nelle espressioni delle ϑ, le parti lineari nelle u.

« Ciò premesso, quando si assume

$$-\frac{1}{2}(A\Theta^2+B\sum\vartheta_{ij}^2) \tag{3}$$

come sola parte efficace del potenziale per la formazione delle equazioni indefinite, si perviene, col solito procedimento, alle equazioni

$$X_i+A\frac{\partial\Theta}{\partial s_i}+B\sum\left(\frac{\partial}{\partial s_j}+\gamma_j-\gamma_{ij}\right)\vartheta_{ij}+2Ba_i=0\,, \tag{4}$$

prive, nel primo membro, dell'ultimo termine. È questo termine che bisogna calcolare affinchè le (4) siano, a prescindere dalla variazione delle costanti d'isotropia, le equazioni generali dell'elasticità dei mezzi isotropi in qualsiasi spazio o iperspazio curvo. Intanto, seguendo il processo tenuto dal prof. Beltrami per trovare le formole (4) della sua Memoria, si ottengono, invece delle nostre (4), le equazioni

$$X_i=\left(\frac{\partial}{\partial s_i}+\gamma_i\right)\Theta_i-\sum\gamma_{ji}\,\Theta_j+\sum^{(i)}\left(\frac{\partial}{\partial s_j}+\gamma_j+\gamma_{ij}\right)\Omega_{ij}\,, \tag{5}$$

nelle quali le Θ_i e le Ω_{ij} sono le tensioni degli elementi (lineari e superficiali) coordinati. L'indice i posto all'ultimo segno sommatorio serve a ricordare che bisogna escludere dalla corrispondente somma il termine definito dal valore i di j. Le formole (5) sono indipendenti dalla natura geometrica dello spazio come dalla costituzione fisica del mezzo. Quando questa si particolarizza introducendo l'ipotesi dell'isotropia, si ha

$$\Theta_i=-(A-2B)\,\Theta-2B\,\theta_i\quad,\quad\Omega_{ij}=-B\omega_{ij}\,,$$

e le equazioni (5) diventano

$$X_i+A\frac{\partial\Theta}{\partial s_i}-2B\frac{\partial}{\partial s_i}\sum^{(i)}\theta_j+2B\sum\gamma_{ji}(\theta_i-\theta_j)+B\sum^{(i)}\left(\frac{\partial}{\partial s_j}+\gamma_j+\gamma_{ij}\right)\omega_{ij}=0.$$

Ora il paragone con (4) dà subito, osservando le (2),

$$a_i=-\frac{\partial}{\partial s_i}\sum^{(i)}\theta_j+\sum\gamma_{ji}(\theta_i-\theta_j)$$
$$+\sum^{(i)}\left(\frac{\partial}{\partial s_j}+\gamma_j\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial s_i}-\gamma_{ij}\,u_i\right)+\sum\gamma_{ij}\left(\frac{\partial u_i}{\partial s_j}-\gamma_{ji}\,u_j\right). \tag{6}$$

Intanto

$$\frac{\partial}{\partial s_i}\sum^{(i)}\theta_j=\sum^{(i)}\frac{\partial^2 u_j}{\partial s_j\,\partial s_i}+\frac{\partial}{\partial s_i}\sum\left(\gamma_j-\gamma_{ij}\right)u_j\,.$$

D'altra parte, in virtù della nota condizione d'integrabilità

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_i}+\gamma_{ji}\right)\frac{\partial}{\partial s_j}=\left(\frac{\partial}{\partial s_j}+\gamma_{ij}\right)\frac{\partial}{\partial s_i}\,,$$

si ha pure

$$\sum^{(i)} \frac{\partial^2 u_j}{\partial s_j \partial s_i} = \sum^{(i)} \left(\frac{\partial}{\partial s_j} + \mathcal{G}_j \right) \frac{\partial u_j}{\partial s_i}$$

$$+ \mathcal{G}_i \frac{\partial u_i}{\partial s_i} - \sum \mathcal{G}_{ji} \frac{\partial u_j}{\partial s_j} - \sum (\mathcal{G}_j - \mathcal{G}_{ij}) \frac{\partial u_j}{\partial s_i} \; .$$

Quindi

$$\frac{\partial}{\partial s_i} \sum^{(i)} \theta_j = \sum^{(i)} \left(\frac{\partial}{\partial s_j} + \mathcal{G}_j \right) \frac{\partial u_j}{\partial s_i}$$

$$+ \mathcal{G}_i \frac{\partial u_i}{\partial s_i} - \sum \mathcal{G}_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial s_j} + \sum u_j \frac{\partial}{\partial s_i} (\mathcal{G}_j - \mathcal{G}_{ij}) \; .$$

Poi, sostituendo in (6),

$$a_i = \mathcal{G}_i \left(\theta_i - \frac{\partial u_i}{\partial s_i} \right) - \sum \mathcal{G}_{ji} \left(\theta_j - \frac{\partial u_j}{\partial s_j} \right)$$

$$- u_i \sum \left(\frac{\partial \mathcal{G}_{ij}}{\partial s_j} + \mathcal{G}_j \mathcal{G}_{ij} \right) - \sum \left(\frac{\partial}{\partial s_i} (\mathcal{G}_j - \mathcal{G}_{ij}) + \mathcal{G}_{ij} \mathcal{G}_{ji} \right) u_j \, .$$

Così è dimostrato che a_i è una forma lineare delle u:

$$a_i = \sum a_{ij} u_j$$

Raccogliendo i termini che moltiplicano u_j si ottiene

$$a_{ij} = (\mathcal{G}_i - \mathcal{G}_{ji}) \mathcal{G}_{ij} - \frac{\partial}{\partial s_i} (\mathcal{G}_j - \mathcal{G}_{ij}) - \sum \mathcal{G}_{ki} \mathcal{G}_{kj} \tag{7}$$

per $i \gtrless j$. Invece

$$a_{ii} = - \frac{\partial \mathcal{G}_i}{\partial s_i} - \sum \left(\frac{\partial \mathcal{G}_{ij}}{\partial s_j} + \mathcal{G}_j \mathcal{G}_{ij} + \mathcal{G}_{ij}^2 \right) . \tag{8}$$

La formola (1) permetterebbe ora di esprimere i coefficienti a mediante le funzioni Q; ma è più conveniente introdurre le *curvature normali* $\mathfrak{N}$ e le *torsioni geodetiche* $\mathfrak{T}$, tenendo presenti i gruppi (γ) e (δ) delle formole generali di Codazzi, dimostrate nel citato lavoro. La formola (8) si può scrivere nel seguente modo:

$$a_{ii} = - \sum \left(\frac{\partial \mathcal{G}_{ij}}{\partial s_j} + \frac{\partial \mathcal{G}_{ji}}{\partial s_i} + \mathcal{G}_{ij}^2 + \mathcal{G}_{ij}^2 \right) - \sum (\mathcal{G}_j - \mathcal{G}_{ij}) \mathcal{G}_{ij} \; .$$

La seconda somma è uguale a

$$\sum_j \sum_k^{(i)} \mathcal{G}_{kj} \mathcal{G}_{ij} = \sum_k^{(i)} \sum_j \mathcal{G}_{kj} \mathcal{G}_{ij} = \sum_j^{(i)} \sum_k \mathcal{G}_{ik} \mathcal{G}_{jk} \; .$$

Dunque

$$a_{ii} = - \sum^{(i)} \left(\frac{\partial \mathcal{G}_{ij}}{\partial s_j} + \frac{\partial \mathcal{G}_{ji}}{\partial s_i} + \mathcal{G}_{ij}^2 + \mathcal{G}_{ij}^2 + \sum \mathcal{G}_{ik} \mathcal{G}_{jk} \right) ,$$

ovvero, per le (γ),

$$a_{ii} = \sum (\mathfrak{N}_i \mathfrak{N}_j - \mathfrak{T}_{ij}^2) \ , \tag{9}$$

senza escludere esplicitamente alcun valore di j, purchè $\mathfrak{T}_{ii}$ si consideri come uguale a $-\mathfrak{N}_i$. Similmente alle (7) si può dare la forma

$$a_{ij} = \mathcal{G}_{ij} \sum^{(j)} \mathcal{G}_{ki} - \frac{\partial}{\partial s_i} \sum^{(i)} \mathcal{G}_{kj} - \sum \mathcal{G}_{ki} \mathcal{G}_{kj}$$
$$= - \sum^{(i,j)} \left(\frac{\partial \mathcal{G}_{kj}}{\partial s_i} + (\mathcal{G}_{kj} - \mathcal{G}_{ij}) \mathcal{G}_{kj} \right) ,$$

cioè, in virtù delle (δ),

$$a_{ij} = - \sum (\mathfrak{N}_k \mathfrak{T}_{ij} + \mathfrak{T}_{ik} \mathfrak{T}_{jk}) \ . \tag{10}$$

Questa formola mostra che $a_{ij} = a_{ji}$. Si è dunque condotti a considerare la forma quadratica

$$\mathrm{U} = \frac{1}{2} \sum a_{ij} u_i u_j \ , \tag{11}$$

le cui derivate parziali prime sono appunto le a_i. Per esempio, nel caso d'uno spazio a due dimensioni, si ha, chiamando α la curvatura totale,

$$a_{11} = a_{22} = \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 - \mathfrak{T}^2 = \alpha \ , \quad a_{12} = 0 \ ;$$

quindi $\mathrm{U} = \frac{\alpha}{2}(u_1^2 + u_2^2)$, e le equazioni (4) diventano

$$\begin{cases} \mathrm{X}_1 + \mathrm{A} \dfrac{\partial \Theta}{\partial s_1} - \mathrm{B} \dfrac{\partial \vartheta}{\partial s_2} + 2\mathrm{B} \alpha u_1 = 0 \ , \\[2ex] \mathrm{X}_2 + \mathrm{A} \dfrac{\partial \Theta}{\partial s_2} + \mathrm{B} \dfrac{\partial \vartheta}{\partial s_1} + 2\mathrm{B} \alpha u_2 = 0 \ . \end{cases}$$

Esse restano inalterate nelle deformazioni della superficie, supposta flessibile ma inestendibile.

« Alle equazioni (4) saremmo egualmente pervenuti assumendo come parte efficace del potenziale l'espressione (3) aumentata di 2BU. Ciò si può esprimere dicendo che la curvatura dello spazio produce una *perdita di energia* elastica, come se una parte di questa energia venisse spesa dal corpo a vincere le difficoltà che incontra per deformarsi in uno spazio non lineare. Può tuttavia accadere che sia $\mathrm{U} < 0$, ed allora l'energia elastica è invece più intensa di quella che si avrebbe in uno spazio lineare, come se la forma dello spazio fosse tale da agevolare piuttostochè contrariare le deformazioni elastiche. In altri termini, se immaginiamo lo spazio irrigidito nella sua essenza geometrica, e d'altra parte supponiamo la materia dotata d'una specie d'*inerzia*, in virtù della quale essa tenda sempre a deformarsi come se si trovasse in uno spazio lineare, possiamo dire che contro tale tendenza reagisce lo spazio con forze che ammettono il potenziale 2BU.

« Notevoli fra gli spazii che favoriscono le deformazioni elastiche sono quelli che hanno nulla la prima curvatura media. Solo in tali spazii può esistere un *sistema assintotico* ortogonale. Assumendo questo come sistema di riferimento, sono nulle tutte le curvature $\mathfrak{M}$, e dalle formole (9) e (10) si ha

$$a_{ij} = -\sum \mathfrak{T}_{ik}\mathfrak{T}_{jk}\,,$$

quindi

$$U = -\frac{1}{2}\sum (\mathfrak{T}_{1k}u_1 + \mathfrak{T}_{2k}u_2 + \mathfrak{T}_{3k}u_3 + \ldots)^2\,.$$

« Abbiamo visto che, sopra una superficie, la perdita di energia è proporzionale al quadrato dello spostamento ed alla curvatura totale della superficie nel punto che si considera. Per uno spazio qualunque avviene qualche cosa di analogo. Immaginiamo infatti che lo spazio sia riferito al suo *sistema di curvatura*. Sono allora nulle tutte le torsioni $\mathfrak{T}$, e dalle (10) si ha $a_{ij} = 0$. Dalle (9) si vede che a_{ii} è la somma delle curvature totali di tutte le superficie coordinate che contengono la linea q_i. Ora, rappresentando con u_{ij} la projezione dello spostamento sulla superficie $q_i q_j$, e con α_{ij} la curvatura totale di questa, l'eguaglianza (11) diventa

$$U = \frac{1}{2}\sum \alpha_{ij}u_{ij}^2\,.$$

La perdita di energia elastica in uno spazio ad n dimensioni è dunque uguale alla somma delle perdite dovute alle $\frac{1}{2}n(n-1)$ superficie di curvatura ».

Elettricità. — *Sul ritardo della polarizzazione nei dielettrici* (1). Nota di Riccardo Arnò, presentata dal Socio G. Ferraris.

« Ewing e Miss Klaassen (2) hanno dimostrato: 1° che il lavoro w consumato per l'isteresi magnetica nel ferro si può rappresentare, in funzione dell'induzione magnetica b, per mezzo di una relazione della forma

$$w = kb^\varepsilon,$$

ove ε e k hanno valori che variano col variare dei limiti di b; 2° che le variazioni dell'esponente ε corrispondono ai passaggi dall'uno all'altro dei successivi stati nel processo della magnetizzazione, e che precisamente i valori relativamente elevati di ε corrispondono agli stati iniziale e finale, ove la permeabilità magnetica è piccola, mentre in corrispondenza degli stati inter-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Elettrotecnica del R. Museo industriale italiano in Torino.

(2) *The Electrician* 13 aprile 1894, p. 668: *Magnetic qualities of iron.*