ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1894

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME III.

2° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1894

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 dicembre 1894.

A. MESSEDAGLIA Vicepresidente

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra alcune equazioni differenziali ipergeometriche.* Nota di DAVIDE BESSO, presentata dal Socio BELTRAMI.

« L'equazione differenziale lineare del terz'ordine soddisfatta dalle forme quadratiche di due integrali fondamentali dell'ipergeometrica del second'ordine

$$x(1-x)\,y''+(f+gx)\,y'+hy=0 \tag{I}$$

è anch'essa, in alcuni casi, ipergeometrica, o riducibile a tale quando la funzione incognita sia moltiplicata pel prodotto di una potenza di x per una potenza di $1-x$. Questi casi sono esaminati nella presente Nota, e ne sono fatte alcune applicazioni.

I.

« 1. Trasformando la I colla sostituzione

$$y=x^{-\frac{1}{2}f}(1-x)^{\frac{1}{2}f_1}\,\mathrm{Y} \tag{1}$$

in cui è

$$f_1=f+g$$

e ponendo

$$a=-\frac{1}{4}g^2-\frac{1}{2}g-h\,,\qquad b=h-f-\frac{1}{2}fg\,,\qquad c=\frac{1}{2}f-\frac{1}{4}f^2$$

$$\mathrm{P}=ax^2+bx+c\,,\qquad \varrho=\frac{\mathrm{P}}{x^2(1-x)^2}$$

essa diviene

$$\mathrm{Y}''+\varrho\mathrm{Y}=0 \tag{I'}$$

« L'equazione differenziale lineare del terz'ordine soddisfatta dai prodotti di due soluzioni della I' è

$$Z''' + 4\varrho Z' + 2\varrho' Z = 0$$

ossia

$$x^3(1-x)^3 Z''' + 4x(1-x)\,PZ' + \Big(4P(2x-1) + 2x(1-x)\,P'\Big)\,Z = 0 \qquad \text{II}$$

e questa colla sostituzione

$$Z = x^{\lambda}\,(1-x)^{\mu}\,U \qquad (2)$$

si trasforma nella

$$x^3(1-x)^3 U''' + 3x^2(1-x)^2\Big(\lambda - (\lambda+\mu)x\Big)U'' + x(1-x)M_2U' + M_3U = 0 \qquad \text{II}'$$

in cui è

$$M_2 = 3\lambda_1\,(1-x)^2 - 6\lambda\mu x\,(1-x) + 3\mu_1 x^2 + 4P$$

$$M_3 = \lambda_2\,(1-x)^3 - 3\lambda_1\,\mu x\,(1-x)^2 + 3\lambda\mu_1\,x^2\,(1-x) - \mu_2\,x^3 + 4P\Big(\lambda - 1 - (\lambda+\mu-2)\,x\Big) + 2P'x\,(1-x)$$

$$\lambda_1 = \lambda(\lambda-1)\,, \quad \mu_1 = \mu(\mu-1)\,. \quad \lambda_2 = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\,, \quad \mu_2 = \mu(\mu-1)(\mu-2).$$

« E dalle (1) (2) risulta che ogni soluzione della II' è eguale al prodotto di

$$x^{-\lambda+f}\,(1-x)^{-\mu-f_1}$$

per una forma quadratica di due integrali fondamentali della I.

« 2. Ora, perchè la II' sia della forma

$$x^2\,(1-x)\,U''' + x\,(B_1 - A_1 x)\,U'' + (B_2 - A_2 x)\,U' - GU = 0 \qquad \text{III}$$

dev'essere M_2 divisibile per $1-x$ ed M_3 divisibile per $x\,(1-x)^2$.

« I polinomi M_2 ed M_3 sono divisibili rispettivamente per $1-x$ e per $(1-x)^2$ quando siano soddisfatte le tre equazioni

$$3\mu^2 - 3\mu - 2f_1 - f_1^{\,2} = 0 \qquad (3)$$

$$(\mu - 1)(\mu^2 - 2\mu - f_1^{\,2} - 2f_1) = 0 \qquad (4)$$

$$3\lambda\mu_1 + 3\mu_2 + (2a + b)(4\mu - 2) - (f_1^{\,2} + 2f_1)(\lambda + \mu - 2) = 0 \qquad (5)$$

le quali, escluso il caso di $h = 0$, hanno le soluzioni comuni

a) $\qquad f_1 = f + g = -2, \quad \mu = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \quad h = 2 + g\,;$

b) $\qquad f_1 = -\dfrac{3}{2}\,, \qquad \mu = \dfrac{1}{2}\,;$

c) $\qquad f_1 = -\dfrac{1}{2}\,, \qquad \mu = \dfrac{1}{2}\,.$

« Coi valori a) si ottiene

$$\frac{M_2}{1-x} = (3\lambda_1 - 8 - 6g - g^2) - (3\lambda_1 - 8 - 6g - g^2 + 6\lambda\mu)\,x\,,$$

$$\frac{M_3}{(1-x)^2} = (\lambda-1)(\lambda-g-4)(\lambda+g+2)(1-x) + \Big(g^2 + 6g + 8 - 3\lambda(\lambda-1)\Big)\mu x,$$

e prendendo

$$\lambda = \begin{cases} 1 \\ g+4 \\ -g-2 \end{cases}$$

risulta

$$\frac{M_3}{x(1-x)^2} = \left(g^2+6g+8-3\lambda(\lambda-1)\right)\mu.$$

« Dunque, quando abbiano luogo le due relazioni

$$f+g=-2\,,\qquad h=2+g\,,$$

la II' assume la forma

$$x^2(1-x)\,U'''+x(B_1-A_1x)\,U''+(B_2-A_2x)\,U'-GU=0 \qquad \text{III}$$

in cui è

$$(\alpha)\left\{\begin{array}{ll} A_1=3(\lambda+\mu)\,, & A_2=3\lambda(2\mu+\lambda-1)-(g^2+6g+8)\,,\\ B_1=3\lambda \quad , & B_2=3\lambda(\lambda-1)-(g^2+6g+8)\,,\\ & G=\left(3\lambda(\lambda-1)-(g^2+6g+8)\right)\mu\,,\\ \lambda=\begin{cases}1\\ g+4\\ -g-2\end{cases} & \mu=\begin{cases}0\\1\end{cases}\;; \end{array}\right.$$

ed ogni soluzione dell'ipergeometrica del terz'ordine III sarà eguale al prodotto di

$$x^{-g-2-\lambda}(1-x)^{2-\mu}$$

per una forma quadratica di due integrali fondamentali della I.

« È da osservare che, prendendo $\mu=0$, si ha $G=0$, e che, in conseguenza, la III è soddisfatta da $U=$ costante. Risulta da ciò che la I, ossia la

$$x(1-x)\,y''+(-2-g+gx)\,y'+(g+2)\,y=0$$

ha due soluzioni il cui prodotto è eguale a $x^{\lambda+g+2}(1-x)^{-2}$, epperò essa possiede i due integrali fondamentali

$$(1-x)^{-1}\,,\qquad x^{g+3}(1-x)^{-1}\,,$$

per $g \gtrless -3$; e

$$(1-x)^{-1}\,,\qquad (1-x)^{-1}\log x\,,$$

per $g=-3$.

« 3. Consideriamo ora gli altri casi in cui i polinomi M_2 ed M_3 sono divisibili rispettivamente per $1-x$ e per $(1-x)^2$.

« Coi valori *b*) $\quad f_1=-\frac{3}{2}\,,\ \mu=\frac{1}{2}$, ed attribuendo a λ uno dei valori 1, f, $2-f$, si trova

$$\frac{M_3}{x(1-x)^2} = -\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)(\lambda^2-\lambda-f^2-f-4h)\;,$$

e la II′ avrà la forma III con

$$(\beta)\quad \begin{cases} A_1 = 3\lambda + \dfrac{3}{2}, & A_2 = 3\lambda^2 - 4h - f^2 - f, \\ B_1 = 3\lambda & , B_2 = 3\lambda(\lambda - 1) + 2f - f^2, \\ G = \left(\lambda - \dfrac{1}{2}\right)(\lambda^2 - \lambda - f^2 - f - 4h) . \end{cases} \qquad \lambda = \begin{cases} 1 \\ f \\ 2 - f \end{cases}$$

« Coi valori c) $f_1 = -\frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{2}$, si trovano ancora gli stessi valori per λ, e si giunge alla III in cui è

$$(\gamma)\quad \begin{cases} A_1 = 3\lambda + \dfrac{3}{2}, & A_2 = 3\lambda^2 - 4h - f^2 + f, \\ B_1 = 3\lambda & , B_2 = 3\lambda(\lambda - 1) + 2f - f^2, \\ G = \left(\lambda - \dfrac{1}{2}\right)(\lambda^2 - \lambda - f^2 + f - 4h) . \end{cases} \qquad \lambda = \begin{cases} 1 \\ f \\ 2 - f, \end{cases}$$

« Dunque: Se $f + g$ è eguale a $-\frac{3}{2}$, ogni soluzione della III, le cui costanti sono date dalle (β), è eguale al prodotto di $x^{f-\lambda}(1 - x)$ per una forma quadratica di due integrali fondamentali della I.

« E se $f + g$ è uguale a $-\frac{1}{2}$, ogni soluzione della III, quando le sue costanti abbiano i valori (γ), è eguale al prodotto di $x^{f-\lambda}$ per una forma quadratica di due integrali fondamentali della I.

« Segue da ciò:

1) I prodotti di due soluzioni della

$$x(1 - x)\, y'' + \left(f - \left(f + \frac{3}{2}\right) x\right) y' + hy = 0 ,$$

moltiplicati per $1 - x$, sono le soluzioni dell'ipergeometrica del terz'ordine.

$$x^2(1 - x)\, U''' + x\left(3f - \left(\frac{3}{2} + 3f\right) x\right) U'' +$$

$$+ \left(2f^2 - f - (2f^2 - f - 4h)x\right) U' - (f + 2h)(1 - 2f)\, U = 0 .$$

2) I prodotti di due soluzioni della

$$x(1 - x)\, y'' + \left(f - \left(f + \frac{1}{2}\right) x\right) y' + hy = 0$$

sono le soluzioni della

$$x^2(1 - x)\, U''' + x\left(3f - \left(3f + \frac{3}{2}\right) x\right) U'' +$$

$$+ \left(2f^2 - f - (2f^2 + f - 4h)\, x\right) U' - 2h(1 - 2f)\, U = 0$$

« 4. Se nella I si effettua la sostituzione $x = 1 - t$, essa diviene

$$t(1-t)\frac{d^2y}{dt^2} + (-f - g + gt)\frac{dy}{dt} + hy = 0$$

« E dal teorema dimostrato al N. 3 risulta:

1) I prodotti di due soluzioni della

$$x(1-x)y'' + \left(\frac{3}{2} + gx\right)y' + hy = 0\,,$$

moltiplicati per x, sono le soluzioni della

$$t^2(1-t)\frac{d^3U}{dt^3} + t(B_1 - A_1 t)\frac{d^2U}{dt^2} + (B_2 - A_2 t)\frac{dU}{dt} - GU = 0 \qquad \text{III}'$$

in cui è

$$A_1 = -3g - 3\,,\quad A_2 = 2g^2 + 7g - 4h + 6\,,$$

$$B_1 = -3g - \frac{9}{2}\,,\quad B_2 = 2g^2 + 7g + 6 \qquad G = (4h - 2g - 3)(g+2)\,.$$

2) I prodotti di due soluzioni della

$$x(1-x)y'' + \left(\frac{1}{2} + gx\right)y' + hy = 0$$

sono le soluzioni della III', in cui è

$$A_1 = -3g \qquad ,\ A_2 = 2g^2 + g - 4h\,,$$

$$B_1 = -3g - \frac{3}{2}\,,\ B_2 = 2g^2 + 3g + 1\,,\ G = 4h(g+1)\,.$$

« 5. Se la I. si trasforma colla sostituzione $4x(1-x) = \xi$, e nell'ipotesi che sia

$$g + 2f = 0\,,$$

si ottiene la

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2y}{d\xi^2} + (f' + g'\xi)\frac{dy}{d\xi} + h'y = 0\,,$$

con

$$f' = f\,,\ f' + g' = -\frac{1}{2}\,,\ h' = \frac{1}{4}h\,.$$

« Risulta da ciò, e da quanto è stato dimostrato al N. 3, che, nell'ipotesi fatta, i prodotti di due soluzioni della I sono le soluzioni della

$$\xi^2(1-\xi)\frac{d^3U}{d\xi^3} + \xi(B_1 - A_1\xi)\frac{d^2U}{d\xi^2} + (B_2 - A_2\xi)\frac{dU}{d\xi} - GU = 0 \qquad \text{III}''$$

in cui è

$$A_1 = 3f + \frac{3}{2}\,,\ A_2 = 2f^2 + f - h\,,$$

$$B_1 = 3f \qquad ,\ B_2 = 2f^2 - f \qquad ,\ G = h\left(\frac{1}{2} - f\right).$$

II.

« 6. L'integrale ellittico completo di prima specie di modulo k, e quello corrispondente al modulo complementare, sono, come è noto, due integrali fondamentali della

$$k(1-k^2)\frac{d^2y}{dk^2}-(1-3k^2)\frac{dy}{dk}-ky=0\ ,$$

la quale, colla sostituzione $x=k^2$, si trasforma nell'ipergeometrica

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+(1-2x)\frac{dy}{dx}-\frac{1}{4}y=0\ .$$

« Questa appartiene alla classe considerata al N. 5, e, in conseguenza, i prodotti di due sue soluzioni sono le soluzioni della III″ in cui è

$$A_1=\frac{9}{2}\ ,\ B_1=3\ ,\ A_2=\frac{13}{4}\ ,\ B_2=1\ ,\ G=\frac{1}{8}\ ,$$
$$\xi=4x(1-x)=4k^2(1-k^2)\ .$$

« Ora quest'ipergeometrica del terz'ordine è soddisfatta, per mod. $\xi \leqq 1$ dalla

$$F\begin{pmatrix} a_1\,,\,a_2\,,\,a_3\,, \\ b_1\,,\,b_2\,,\,\xi \end{pmatrix}$$

in cui le a sono le radici della

$$a^3+(3-A_1)a^2+(A_2+2-A_1)a-G=0\ ,$$

e le b sono le radici della

$$b^2+(1-B_1)b+B_2=0\ .$$

« Perciò, indicando con C_1, C_2, C_3 altrettante costanti, sarà

$$F\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\,, \\ 1\,,\,1\,,\,\xi \end{pmatrix}=C_1K^2+C_2KK_1+C_3K_1^2$$

con

$$k^2=\frac{1\mp\sqrt{1-\xi}}{2}$$

« Ma, quando ξ tende a zero, il primo membro ha per limite 1, e, prendendo il segno superiore nella formola di k^2, K tende a $\frac{\pi}{2}$, mentre K_1 tende all'infinito; in conseguenza dev'essere

$$C_2=C_3=0\ ,\ C_1=\frac{4}{\pi^2}\ ,$$

e la precedente relazione diviene

$$F\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\,, \\ 1\,,\,1\,,\,\xi \end{pmatrix}=\frac{\pi^2}{4}K^2\ ,$$

ossia

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)^3\xi+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3\xi^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3\xi^3+\dots=$$
$$\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2k^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2k^6+\dots\right]^2$$

ove le variabili ξ e k sono legate dalla

$$k^2=\frac{1-\sqrt{1-\xi}}{2}.$$

« 7. Il sig Laguerre ha trovata la formola

$$\int_0^1\int_0^1\frac{dx\,dy}{(1-\xi^2x^2y^2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}=\frac{\pi}{2}\,\mathrm{K}(\xi)$$

per mod. $\xi<1$, sviluppando in serie la frazione $\dfrac{1}{1-\xi^2x^2y^2}$, e integrando poi ciascun termine [1].

« In modo analogo si può dimostrare che è, per mod $\xi<1$, ed anche per mod $\xi=1$,

$$\mathrm{J}=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{dx\,dy\,dz}{(1-\xi^2x^2y^2z^2)\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}}=$$
$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\sum_0^\infty\left(\frac{1.3...(2n-1)}{2.4....2n}\right)^3\xi^{2n},$$

dalla quale, e dalla relazione poc'anzi ottenuta, risulta

$$\mathrm{J}=\frac{\pi}{2}\,\mathrm{K}^2,$$

con

$$k^2=\frac{1-\sqrt{1-\xi^2}}{2}.$$

« Osservo anche che la serie trovata al n. 6 si deduce dalla

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\lambda^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\lambda^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\lambda^6+\dots=\frac{2}{\pi}\,\mathrm{K}(\lambda)$$

ponendovi $\lambda=\sqrt{\xi}\,\mathrm{sen}\,\theta$ e integrando, rispetto a θ, da 0 a $\dfrac{\pi}{2}$, vale a dire che è

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)^3\xi+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3\xi^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3\xi^3+\dots=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{K}(\lambda)\,d\theta.$$

« Sarà in conseguenza

$$\int_0^1\frac{\mathrm{K}(ax)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\mathrm{K}^2\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a^4}}{2}}\right).$$

[1] Hermite, *Cours professé à la faculté des sciences de Paris*, 3me édition 1887, pag. 85 e seg.

« 8. L'equazione considerata al n. 6

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+(1-2x)\frac{dy}{dx}-\frac{1}{4}y=0,$$

ossia la

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2y}{d\xi^2}+\left(1-\frac{3}{2}\xi\right)\frac{dy}{d\xi}-\frac{1}{16}y=0,$$

in cui essa si trasforma colla sostituzione $4x(1-x)=\xi$, è un caso particolare della

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2y}{d\xi^2}+\left(1-\frac{3}{2}\xi\right)\frac{dy}{d\xi}+\frac{1}{4}n(n+1)y=0 \qquad (a)$$

la quale, per n intero e positivo, posto $\xi=1-z^2$, è soddisfatta dalla funzione sferica $P_n(z)$.

« Ora, dal teorema dimostrato al n. 3, risulta che i prodotti di due soluzioni della (a) sono le soluzioni della

$$\xi^2(1-\xi)\frac{d^3U}{d\xi^3}+\xi\left(3-\frac{9}{2}\xi\right)\frac{d^2U}{d\xi^2}+\Big(1-\big(3-n(n+1)\big)\xi\Big)\frac{dU}{d\xi}+$$
$$+\frac{1}{2}n(n+1)U=0,$$

la quale è soddisfatta, per mod $\xi<1$, dalla serie

$$1-\frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{1^3}\xi+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{(1.2)^3}\xi^2-$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{(1.2.3)^3}\xi^3+\cdots,$$

che, per n intero e positivo, si riduce ad un polinomio del grado n^{mo}.

« Osservando poi che la (a), con n intero e positivo, possiede i due integrali fondamentali

$$P_n(z) \quad \text{e} \quad P_n(z)\log\frac{1+z}{1-z}+R_{n-1}(z),$$

in cui $R_{n-1}(z)$ significa una funzione intera del grado $(n-1)^{mo}$ (1), il secondo dei quali tende all' infinito quando ξ tende a zero, e che è $P_n(1)=1$, si conchiude

$$P_n^2(z)=1-\frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{1^3}\xi+$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{(1.2)^3}\xi^2-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{1.2....2n}{(1.2...n)^3}\xi^n$$

ove le variabili sono legate dalla $z^2=1-\xi$ (2) ».

(1) Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen*. Zweite Auflage. Erster Band, pag. 96.

(2) Integrando i due membri di quest'eguaglianza da 0 ad 1, ed applicando la formola di Legendre

$$\int_0^1 P_n^2(z)\,dz=\frac{1}{2n+1},$$

si ottiene

$$1-\frac{1}{3}\frac{n(n+1)}{1^2}+\frac{1}{5}\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{(1.2)^2}-\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{1.2...2n}{(1.2...n)^2}=\frac{1}{2n+1}.$$