ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1894

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME III.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1894

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia prima del 1 luglio 1894.

Matematica. — *Sopra alcune trasformazioni delle equazioni della dinamica del punto.* Nota del dott. MICHELE LEONCINI, presentata dal Socio BIANCHI.

« Le trasformazioni delle equazioni della dinamica studiate da Appell [1], e dal Dautheville [2] nel caso di un punto mobile su di una superficie, non richiedono nessuna condizione per le forze agenti, oltre quella di dipendere solamente dalle coordinate del mobile.

« Sotto qualche altra ipotesi, di natura molto generale, sulle dette forze, esistono altre trasformazioni che qui mi propongo di considerare.

« Limitandomi al moto di un punto su di una superficie esamino due casi:

1° Quello in cui le forze ammettono un potenziale;

2° Quello in cui esse sono centrali.

« 1. Consideriamo prima il caso particolare di un punto che si muove in un piano, e siano

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{X} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{Y} \tag{1}$$

(1) American Journal of Mat. Vol. XII, N. 1, Crell's Jour. 1892.

(2) Ann. de l'Éc. norm. sup. T. VII, N. 12, 1890.

le equazioni corrispondenti, con XY funzioni di xy soltanto. Esse, quando vi si operi la trasformazione:

$$x_1 = \varphi(xy) \quad Y_1 = \psi(xy) \quad dt_1 = \lambda(xy)\,dt \tag{2}$$

diventano:

$$\frac{d^2x_1}{dt_1^2} = X_1 \quad \frac{d^2y_1}{dt_1^2} = Y_1 \tag{3}$$

dove

$$X_1 = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right]\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \tag{4}$$

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}X + \frac{\partial\varphi}{\partial y}Y\right]$$

e l'espressione corrispondente per Y_1 si ottiene mutando φ in ψ.

« Volendo che le $X_1\,Y_1$ risultino, qualunque siano le $X\,Y$, funzioni delle sole xy, bisogna nelle (4) annullare i coefficienti di $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\ldots$, e questo porta, come ha mostrato Appell, ad una trasformazione omografica.

« Se però ci limitiamo a considerare forze XY a potenziale U, le (1) ammetteranno l'integrale primo:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2U$$

(la costante arb. inclusa in U) in forza del quale le (4) si potranno scrivere:

$$X_1 = \frac{1}{\lambda^2}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y}\right\} + \frac{2}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)U +$$

$$\frac{1}{\lambda}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right\}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\lambda}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right\}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

e l'analoga per Y_1. Di qui si vede, che $X_1\,Y_1$ verranno a dipendere solo dalle $x_1 y_1$ quando si prendano $\varphi\,\psi\,\lambda$ in modo che venga:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = 0$$

e le analoghe per ψ.

« Segue da queste, che si può scrivere:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \lambda u \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \lambda v \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = \lambda u_1 \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = \lambda v_1\,,$$

se con $u + iv\;\; u_1 + iv_1$ si indicano due funzioni monogene della variabile complessa $x + iy$.

« Eliminando φ e ψ si hanno due relazioni in $\frac{\partial\lambda}{\partial x}\,\frac{\partial\lambda}{\partial y}$, che risolute danno:

$$\frac{1}{2\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{u\frac{\partial v_1}{\partial x} - u_1\frac{\partial v}{\partial x}}{vu_1 - v_1 u} \qquad \frac{1}{2\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \frac{v_1\frac{\partial u}{\partial y} - v\frac{\partial u_1}{\partial y}}{v\,u_1 - v_1 u}\,.$$

« Se in queste facciamo $u_1 = v \ v_1 = -u$, i secondi membri diventano integrabili, e si ha a meno di un fattore costante:

$$\lambda = \frac{1}{u^2 + v^2} \tag{5}$$

e quindi

$$x_1 = \varphi(xy) = \int \frac{udx + vdy}{u^2 + v^2} \qquad y_1 = \psi(xy) = \int \frac{vdx - udy}{u^2 + v^2} \tag{6}$$

Se 5) 6) ci danno una trasformazione dipendente da una funzione arbitraria. Si verifica facilmente che anche le forze $X_1 Y_1$ ammettono un potenziale U_1 cioè si ha:

$$X_1 = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \quad Y_1 = \frac{\partial U_1}{\partial y_1} \quad U_1 = (x^2 + y^2)\, U\,.$$

« 2. Passiamo ora al moto su di una superficie qualunque S. Scelto su di essa un sistema di linee coordinate u, v, sia

$$ds^2 = E\, du^2 + 2\, F\, du\, dv + G\, dv^2. \tag{1}$$

il quadrato del suo elemento lineare. L'equazioni del moto di un punto su S si possono scrivere:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2u}{dt^2} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = R_1 \\ &\frac{d^2v}{dt^2} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = R_2 \end{aligned}\right. \tag{2}$$

dove $\begin{Bmatrix} rs \\ t \end{Bmatrix}$ rappresentano i noti simboli di Christoffel calcolati con E F G, ed

$$R_1 = \frac{GQ_1 - FQ_2}{EG - F^2} \qquad R_2 = \frac{-FQ_1 + EQ_2}{EG - F^2} \tag{3}$$

se $Q_1\, Q_2$ sono le componenti secondo $u\, v$ delle forze agenti nel punto.

« Si voglia ora far corrispondere ad ogni moto del punto di S un moto di un punto su di un'altra superficie S_1. Prese su S_1 le linee corrispondenti alle $u\, v$ di S, e che chiameremo anche $u\, v$, sia (4) $ds_1{}^2 = E_1\, du^2 + 2\, F_1\, du\, dv + G_1\, dv^2$ la forma dell'elemento lineare di S_1.

« Mediante la trasformazione $dt_1 = \lambda\,(uv)\; dt$ (A) le (2) si cambiano nelle altre:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2u}{dt_1{}^2} + \left(\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)\left(\frac{du}{dt_1}\right)^2 + 2\left(\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)\frac{du}{dt_1}\frac{dv}{dt_1} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}\left(\frac{dv}{dt_1}\right)^2 = \frac{R_1}{\lambda^2} \\ &\frac{d^2v}{dt_1{}^2} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}\left(\frac{du}{dt_1}\right)^2 + 2\left(\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)\frac{du}{dt_1}\frac{dv}{dt_1} + \left(\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \frac{R_2}{\lambda^2} \end{aligned}\right.$$

« Interpretiamo queste equazioni come quelle del moto del punto di S_1, e t_1 come rappresentante il tempo. Se si indicano con $\begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix}_1$ i simboli di

Christoffel relativi alla forma (4) e con $T_1\,T_2$ le quantità analoghe ad $R_1\,R_2$ avremo:

$$T_1=\frac{R_1}{\lambda^2}+\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}_1-\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)\left(\frac{du}{dt_1}\right)^2+2\left(\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_1-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}-\frac{1}{2\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)\frac{du}{dt_1}\frac{dv}{dt_1}$$
$$+\left(\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}_1-\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\right)\left(\frac{dv}{dt_1}\right)^2$$

$$T_2=\frac{R_2}{\lambda^2}+\left(\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_1-\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\right)\left(\frac{du}{dt_1}\right)^2+2\left(\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_1-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}-\frac{1}{2\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)\frac{du}{dt_1}\frac{dv}{dt_1}$$
$$+\left(\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}_1-\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)\left(\frac{dv}{dt_1}\right)^2$$

« Se si vuole, che qualunque siano le forze $Q_1\,Q_2$, purchè funzioni delle sole uv, le forze agenti sul punto di S_1, e quindi anche $T_1\,T_2$, non vengano a dipendere dalle derivate $\frac{du}{dt_1}\,\frac{dv}{dt_1}$, si hanno i risultati ottenuti dal Dautheville.

« Supponiamo che le forze $Q_1\,Q_2$ ammettano un potenziale P, talchè:

$$Q_1=\frac{\partial P}{\partial u}\qquad Q_2=\frac{\partial P}{\partial v}$$

Le equazioni (2) allora ammetteranno l'integrale della forza viva:

$$E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2=2P$$

(intendendo al solito la costante arbitraria inclusa in P), a cui corrisponderà, nel moto trasformato, l'integrale:

$$\text{(B)}\qquad E\left(\frac{du}{dt_1}\right)^2+2F\frac{du}{dt_1}\frac{dv}{dt_1}+G\left(\frac{dv}{dt_1}\right)^2=\frac{2P}{\lambda^2}.$$

« Se ora vogliamo, che qualunque sia P le $T_1\,T_2$ non vengano a dipendere dalle derivate $\frac{du}{dt_1}\,\frac{dv}{dt_1}$, sarà necessario e sufficiente, in forza dell'integrale trovato, che si abbiano le relazioni:

$$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}_1-\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}=mE,\ \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_1-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}-\frac{1}{2\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial v}=mF,\ \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}_1-\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=mG$$
$$\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_1-\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=nE,\ \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_1-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}-\frac{1}{2\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}=nF,\ \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}_1-\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial v}=nG$$

con $m\,n$ fattori di proporzionalità qualunque.

« Per integrare queste relazioni procediamo nel modo seguente:

« Le due forme $ds^2\,ds_1^2$, essendo definite positive, si potranno mediante un cangiamento simultaneo di variabili ridurre a mancare dei termini in $du\,dv$.

« Supposto che ciò sia stato già fatto, le equazioni precedenti si scrivono:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2E_1}\dfrac{\partial E_1}{\partial u}-\dfrac{1}{2E}\dfrac{\partial E}{\partial u}-\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}=mE,\ \dfrac{1}{E_1}\dfrac{\partial E_1}{\partial v}-\dfrac{1}{E}\dfrac{\partial E}{\partial v}-\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial\lambda}{\partial v}=0,\ -\dfrac{1}{2E_1}\dfrac{\partial G_1}{\partial u}+\dfrac{1}{2E}\dfrac{\partial G}{\partial u}=mG\\[2ex] -\dfrac{1}{2G_1}\dfrac{\partial E_1}{\partial v}+\dfrac{1}{2G}\dfrac{\partial E}{\partial v}=nE,\ \dfrac{1}{G_1}\dfrac{\partial G_1}{\partial u}-\dfrac{1}{G}\dfrac{\partial G}{\partial u}-\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}=0,\ \dfrac{1}{2G_1}\dfrac{\partial G_1}{\partial v}-\dfrac{1}{2G}\dfrac{\partial G}{\partial v}-\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}=nG\end{cases}$$

La seconda e la quarta si integrano immediatamente, e danno:

$$\text{(C)} \qquad E_1 = E\lambda U \qquad G_1 = G\lambda V \ .$$

dove UV indicano due funzioni arbitrarie della sola u e v rispettivamente.

« Eliminando le indeterminate $m\,n$ fra le altre quattro equazioni, si hanno le due:

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{E_1}\frac{\partial E_1}{\partial u}-\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial u}-\frac{2}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}-\frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial u}+\frac{1}{G}\frac{E}{E_1}\frac{\partial G_1}{\partial u}=0\\ &\frac{1}{G_1}\frac{\partial G_1}{\partial v}-\frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial v}-\frac{2}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial v}-\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial v}+\frac{1}{E}\frac{G}{G_1}\frac{\partial E_1}{\partial v}=0\end{aligned}\right.$$

le quali, in forza delle precedenti (C) si possono scrivere:

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial u}+\frac{U'}{V-U}=0 \quad \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial v}+\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{V'}{V-U}=0$$

« Derivando la prima di queste equazioni rispetto a v, la seconda rispetto ad u, e sottraendo si ha:

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\frac{G}{E}=0\,,$$

da cui si ricava, che *le linee u v formano un sistema isotermo sulla superficie* S. Indicando allora con $U_1\,V_1$ due nuove funzioni qualunque, la prima della sola u, la seconda della sola v, e con μ una funzione qualunque di $u\,v$, potremo porre $E=\mu\,U_1$, $G=\mu\,V_1$, per cui la (1) diviene

$$\text{(1a)} \qquad ds^2=\mu\,(U_1\,du^2+V_1\,dv^2)\,.$$

« Dopo questa posizione, le due equazioni precedenti si integrano immediatamente e danno:

$$\lambda=\frac{V-U}{\mu} \tag{5}$$

Sostituendo questi valori di $E\,G\,\lambda$ nelle espressioni di $E_1\,G_1$, la (4) assumerà la forma

$$\text{(4a)} \qquad ds_1{}^2=(V-U)\,(U_1\,U\,du^2+V_1\,V\,dv^2)\,;$$

cioè « l'elemento lineare della superficie S_2 assumerà la forma di Liouville ». Viceversa è chiaro, che quando gli elementi lineari di S ed S_1 hanno rispettivamente le forme (1a) e (4a) e λ ha la forma data dalla (5), la trasformazione (A) gode della proprietà richiesta.

« Dunque possiamo dire: Se ad ogni movimento su S di un punto soggetto a forze che ammettono un potenziale vogliamo far corrispondere un movimento su S_1 di un punto sotto l'azione di forze dipendenti solo dalla sua posizione, è necessario e sufficiente, che dei due sistemi ortogonali di linee che si corrispondono sulle due superficie, quello della S sia isotermo, quello della S_1 abbia la forma di Liouville, e precisamente siano nella relazione di (1a) e (4a).

« Nel caso particolare che sia $\mu = U_2 - V_2$ e $U = \frac{1}{U_2}$ $V = \frac{1}{V_2}$, le due forme diventano

$$ds^2 = (U_2 - V_2)(U\,du^2 + V\,dv^2) \quad ds_1{}^2 = \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{U_2}\right)\left(\frac{U_1\,du^2}{U_2} + \frac{V_1\,dv^2}{V_2}\right)$$

e le due superficie $S\,S_1$ sono riferite geodeticamente l'una all'altra. Allora è noto (Dautheville), che ad ogni movimento su S sotto l'azione di forze qualunque dipendenti da $u\,v$ soltanto, corrisponde, su S_1 un movimento della medesima natura. Se con $K_1\,K_2$ indichiamo le componenti secondo $u\,v$ della forza agente sul punto mobile di S_1. avremo

$$K_1 = E_1\,T_1 + F_1\,T_2\,.\ K_2 = F_1\,T_1 + G_1\,T_2\,.$$

« Sostituendo i valori trovati di $E_1\,G_1$ $(F_1 = 0)$ e calcolando $T_1\,T_2$, servendosi della relazione (B) si trova dopo qualche riduzione:

$$K_1 = \frac{\partial}{\partial u}\left(P\mu\frac{U}{V - U}\right) \qquad K_2 = \frac{\partial}{\partial v}\left(P\mu\frac{V}{V - U}\right).$$

« Volendo che anche le forze $K_1\,K_2$ ammettano un potenziale, sarà necessario e sufficiente che $P\mu$ sia della forma $U_3 - V_3$ con U_3 funzione dalla sola u, V_2 della sola v, cioè il potenziale delle forze $Q_1\,Q_2$ sia della forma:

$$P = \frac{U_3 - V_3}{\mu},$$

ed allora il potenziale delle forze $K_1\,K_2$ sarà

$$P_1 = \frac{U_3\,U - V_3\,V}{V - U}\,.$$

« 3. Facciamo ora la seconda delle ipotesi enunciate, cioè passiamo al caso in cui le forze X Y agenti sul punto mobile siano centrali. Riprendiamo le formole (1) (2) (3) (4) del *n.* 1 del moto di un punto in un piano. Nella detta ipotesi, le equazioni (1) ammetteranno l'integrale delle aree:

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = \alpha = \text{cost.}$$

e quindi fra le quantità $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2, \frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}, \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$ passerà la relazione:

$$y^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 2xy\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + x^2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \alpha^2\,.$$

« Allora è chiaro, che, affinchè le quantità $X_1\,Y_1$ vengano a dipendere solamente da $x_1\,y_1$, sarà necessario e sufficiente scegliere $\varphi\,\psi\,\lambda$ in modo che sia:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) : \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) : \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = y^2 : -2\,x\,y : x^2$$

e le analoghe per ψ.

« Una di queste equazioni si può scrivere

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y^2}\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2}\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$$

da cui $\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=y^2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{1}{\lambda}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=x^2\frac{\partial z}{\partial x}$, dove z indica una funzione qualunque di xy.

« Sostituendo questi valori nell'altra equazione, si ha per z la relazione:

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\,x\,y\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+2\,x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

che si integra facilmente col metodo delle caratteristiche (¹).

« Il suo integrale generale è: $z=\frac{1}{x}f\left(\frac{y}{x}\right)+f_1\left(\frac{y}{x}\right)$ con $f\,f_1$ funzioni arbitrarie.

« Sostituendo questo valore di z nelle espressioni di $\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ si ha

$$(1)\qquad\left\{\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x}&=\lambda\left\{\left(\frac{y}{x}\right)^2f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x}f_1'\left(\frac{y}{x}\right)\right\}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}&=-\lambda\left\{f\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+yf_1'\left(\frac{y}{x}\right)\right\}\end{aligned}\right.$$

« Facciamo un cangiamento provvisorio di variabili, ponendo:

$$x=\xi\qquad y=\xi\eta;$$

ne viene:

$$(2)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}=-\lambda\eta f(\eta)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=-\lambda\xi\,\{f(\eta)+\eta f'(\eta)+\eta\,\xi f_1'(\eta)\}$$

da cui eliminando φ per mezzo della relazione: $\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}=\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}$, si ha:

$$a)\qquad \frac{1}{2\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}\xi\,\{f+\eta f'+\xi\eta f_1'\}-\frac{1}{2\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\eta}\eta f=-\xi\eta f_1'$$

« Formole perfettamente analoghe si hanno per ψ. Indicando con $p\,p_1$ due funzioni arbitrarie di $\frac{y}{x}$, si può scrivere:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\lambda\left\{\left(\frac{y}{x}\right)^2p'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x}p'_1\left(\frac{y}{x}\right)\right\}$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=-\lambda\left\{p\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}p'\left(\frac{y}{x}\right)+yp'_1\left(\frac{y}{x}\right)\right\}$$

(¹) Darboux, *Leçons* ecc. t. III, p. 264.

e nelle variabili $\xi\eta$ si ha la condizione di integrabilità:

$$(b) \qquad \frac{1}{2\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}\xi\left\{p+\eta p'+\xi\eta p'_1\right\}-\frac{1}{2\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\eta}\eta p=-\xi\eta p'_1$$

Dalla $a)$ $b)$ si ricava

$$\frac{\partial\log\sqrt{\lambda}}{\partial\xi}=-\frac{pf_1'-fp'_1}{pf-fp'+\xi(pf_1'-fp'_1)}$$

ed integrando

$$\sqrt{\lambda}=\frac{\mathrm{F}(\eta)}{pf'-fp'+\xi(pf_1'-fp_1')}$$

con F funzione incognita.

« Ricavendo da questa espressione il valore di $\frac{1}{2\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\eta}$ e sostituendolo in (a) e (b) si ha la relazione:

$$\frac{\mathrm{F}'(\eta)}{\mathrm{F}(\eta)}\left\{pf'-fp'+\xi(pf_1'-fp_1')\right\}\eta-\left\{pf''-fp''+\xi(pf_1'-fp_1')'\right\}\eta=$$
$$=\xi(fp'_1-pf'_1)+\eta\xi(f'p_1'-p'f_1'),$$

la quale è di 1° grado in ξ e si scinde nelle altre:

$$\frac{\mathrm{F}'}{\mathrm{F}}(pf'-fp')=pf''-fp'', \text{ che dà } \mathrm{F}(\eta)=a(pf'-p'f)$$

con a fattore costante e

$$\frac{pf''-fp''}{pf'-fp'}-\frac{pf_1''-fp_1''}{pf_1'-fp_1'}+\frac{1}{\eta}=0\,.$$

A questa relazione devono soddisfare le 4 funzioni ff_1pp_1 di η.

« Se in essa facciamo $p_1'=f_1'$, diviene immediatamente integrabile, e dà:

$$p_1'=f_1'=b\eta(pf'-fp') \text{ con } b \text{ fattore costante.}$$

Fatto questo, si ha subito il valore di λ

$$\lambda=\frac{a^2}{\{1+b\xi\eta(p-f)\}^2}=\frac{a^2}{\{1+by(p-f)\}^2} \tag{3}$$

Allora le (2) diventano integrabili, e danno dopo qualche riduzione;

$$\varphi=\frac{1}{b(p-f)}\left\{\frac{a^2f}{1+by(p-f)}-p\right\} \tag{4}$$

Analogamente

$$\psi=\frac{1}{b(p-f)}\left\{\frac{a^2p}{1+by(p-f)}-f\right\} \tag{5}$$

« Le formole (3) (4) (5) danno una trasformazione, che gode delle proprietà richieste, e che dipende da due funzioni arbitrarie.

« Troviamo ora le componenti $\mathrm{X}_1\,\mathrm{Y}_1$ della forza agente sul punto nel moto trasformato. Le forze XY sone centrali; supposto il centro nella origine delle coordinate, possiamo porre

$$\mathrm{X}=\mathrm{F}x \qquad \mathrm{Y}=\mathrm{F}y\,,$$

e si avrà tenendo conto delle formole trovate

$$X_1 = \frac{1}{a^2} \{ 1 + by(p-f) \}^2 \left\{ \alpha^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{y}{x}\right) + b \frac{y}{x^2}(pf' - p'f) \right) - \mathrm{F} y f\left(\frac{y}{x}\right) \right\}$$

$$Y_1 = \frac{1}{a^2} \{ 1 + by(p-f) \}^2 \left\{ \alpha^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x^2} p'\left(\frac{y}{x}\right) + b \frac{y}{x^2}(pf' - p'f) \right) - \mathrm{F} y p\left(\frac{y}{x}\right) \right\}$$

« Si potrebbe ancora vedere in qual caso anche queste forze saranno centrali ».

Matematica. — *Sulla superficie del 5° ordine con 5 punti tripli ed una cubica doppia.* Nota di A. Del Re, presentata dal Socio Cremona.

« In questa 3ª Nota sulla superficie del 5° ordine con 5 punti tripli ed una cubica doppia, io mi propongo di aggiungere, a quelle già sviluppate in due Note precedenti (1), altre proprietà. Queste riguardano la costruzione della superficie, in cinque diversi modi, col mezzo di forme proiettive; la formazione di cinque connessi punto-piano (1, 2) di ciascuno dei quali si presenta come superficie fondamentale; la formazione, in due modi diversi, dell'equazione della superficie, e la ricerca degli invarianti assoluti proiettivi. In ultimo indico la costruzione delle omografie che cangiano l'una nell'altra due superficie siffatte, quando è soddisfatta l'uguaglianza fra detti invarianti.

« Siccome, per non fare inutili ripetizioni, mi occorre spesso di citare formule, e risultati, già stabiliti nelle suddette Note, indicherò queste rispettivamente con N I, N II.

§ I.

« 1. I cinque connessi punto-piano (1, 2) a cui ho fatto cenno al principio del § VI (n. 16) della N II, e di ciascuno dei quali la superficie può essere riguardata come fondamentale, si ottengono nel modo seguente, dal quale abbiamo anche altri modi di costruzione della superficie per forme proiettive.

« Fissiamo una qualunque delle 5 distinte reti di quadriche, di cui si è discorso al n. 13, N II, e sia, p. es., la $\lambda f^{(i)} + \mu\varphi^{(i)} + \nu\psi = 0$ ivi considerata. Le quadriche polari delle rette m di A_i rispetto al fascio $\lambda f^{(i)} + \mu\varphi^{(i)} = 0$ formano una rete particolare, la cui base si compone della polare b_i rispetto a questo fascio, e dei 4 punti A_k, A_l, A_m, A_n. Le quadriche di questa rete, e le rette m, sono fra loro riferite proiettivamente, ed i punti M, M', fuori

(1) Cfr. questi Rend. vol. II, 2° sem., serie 5ª, fasc. 4 e 5.