ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI

1894

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME III.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1894

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia prima del 5 agosto 1894.

Matematica. — *Sulle superficie i cui piani principali hanno costante il rapporto delle distanze da un punto fisso.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

« Il sig. Guichard in una Nota inserita nel T. CXVI, pag. 483 dei Comptes Rendus de l'Académie des sciences di Parigi (1893) ha studiato le superficie i cui due piani principali (cioè i piani condotti per la normale tangenzialmente alle linee di curvatura) sono equidistanti da un punto fisso. Ora queste superficie, come le più generali indicate nel titolo della presente Nota, non sono che un caso particolare delle superficie considerate alla fine della mia Memoria nel T. XVIII, serie 4ª (1890) degli Annali di matematica e caratterizzate dalla proprietà che: il doppio sistema di traiettorie isogonali sotto un certo angolo costante delle linee di curvatura, le divide in parallelogrammi infinitesimi equivalenti.

« Nel caso particolare di Guichard, il detto angolo è di 45°, cioè il sistema di curve bisettrici delle linee di curvatura divide la superficie in rettangoli equivalenti.

§ 1.

« Indichiamo per abbreviare con Φ le superficie dotate della proprietà enunciata nel titolo ed occupiamoci della loro determinazione in coordinate tangenziali.

« Facciamo della superficie supposta Φ l'immagine di Gauss sulla sfera di raggio $=1$ col centro nel punto fisso O e sia

$$ds'^2 = e\,du^2 + g\,dv^2 \tag{1}$$

l'elemento lineare sferico riferito alle immagini u, v delle linee di curvatura di Φ. Se con W indichiamo la distanza (algebrica) del piano tangente a Φ dall'origine O, per le formole di Weingarten relative alle coordinate tangenziali (¹), dovrà essere W una soluzione dell'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial \log\sqrt{e}}{\partial v}\frac{\partial W}{\partial u} + \frac{\partial \log\sqrt{g}}{\partial u}\frac{\partial W}{\partial v} \tag{2}$$

e le coordinate x, y, z del punto di Φ corrispondente al punto (X, Y, Z) della sfera rappresentativa saranno date da

$$\left\{\begin{aligned} x &= WX + \frac{1}{e}\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial W}{\partial u} + \frac{1}{g}\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial W}{\partial v} \\ y &= WY + \frac{1}{e}\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial W}{\partial u} + \frac{1}{g}\frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial W}{\partial v} \\ z &= WZ + \frac{1}{e}\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial W}{\partial u} + \frac{1}{g}\frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial W}{\partial v}\,. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

« Indichiamo poi con W_1, W_2 le distanze del punto fisso O dai due piani principali di Φ; avremo:

$$W_1 = \Sigma x\,\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial X}{\partial u}\,,\quad W_2 = \Sigma x\,\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial X}{\partial v}\,,$$

cioè per le (3)

$$W_1 = \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial W}{\partial u}\,,\qquad W_2 = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial W}{\partial v}\,. \tag{4}$$

« Dalla (2) seguono quindi le formole

$$\frac{\partial W_2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}W_1\,,\qquad \frac{\partial W_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}W_2\,. \tag{5}$$

« Ma si ha per ipotesi

$$W_2 = kW_1$$

(¹) Vedi il Cap. V. delle mie *Lezioni di Geometria differenziale* (Pisa-Spoerri 1894).

con k costante e però

$$(5^*) \qquad \frac{\partial W_1}{\partial u} = \frac{1}{k}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} W_1\,, \qquad \frac{\partial W_1}{\partial v} = k\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} W_1\,,$$

onde la relazione

$$(6) \qquad \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v}\right) = k\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}\right).$$

« Ponendo

$$k = \cot\left(\frac{\sigma}{2}\right),$$

la (6), ovvero l'altra

$$(6^*) \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v}\right) = \cot\left(\frac{\sigma}{2}\right)\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}\right),$$

esprime che il doppio sistema di traiettorie sotto l'angolo $\frac{\sigma}{2}$ delle linee v divide la sfera in parallelogrammi infinitesimi equivalenti. E infatti, riproducendo le considerazioni della mia Memoria citata, abbiamo che le equazioni differenziali di queste traiettorie sono rispettivamente:

$$(7) \qquad \sqrt{e}\,\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma}{2}\right)du + \sqrt{g}\cos\left(\frac{\sigma}{2}\right)dv = 0$$

$$(7^*) \qquad \sqrt{e}\,\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma}{2}\right)du - \sqrt{g}\cos\left(\frac{\sigma}{2}\right)dv = 0.$$

« Ora, posto

$$\tau = \int\left\{\operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}du + \cot\left(\frac{\sigma}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}dv\right\},$$

i primi membri delle (7), (7*) ammettono i rispettivi fattori integranti e^{τ}, $e^{-\tau}$; se si pone:

$$\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\int e^{\tau}\left\{\sqrt{e}\,\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma}{2}\right)du + \sqrt{g}\cos\left(\frac{\sigma}{2}\right)dv\right\}$$

$$\beta = \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\int e^{-\tau}\left\{\sqrt{e}\,\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma}{2}\right)du - \sqrt{g}\cos\left(\frac{\sigma}{2}\right)dv\right\},$$

per l'elemento lineare sferico, espresso in coordinate α, β si ha la formola

$$ds'^2 = e^{-2\tau}\,d\alpha^2 + 2\cos\sigma\,d\alpha\,d\beta + e^{2\tau}\,d\beta^2,$$

che dimostra appunto la proprietà enunciata.

§ 2.

« Se l'elemento lineare sferico (1) soddisfa alla condizione (6*), ogni superficie che abbia per immagini delle linee di curvatura le linee u, v godrà di una proprietà affatto analoga, cioè il doppio sistema di traiettorie sotto l'angolo $\frac{\sigma}{2}$ delle linee di curvatura v dividerà la superficie in parallelogrammi infinitesimi equivalenti. E infatti se

$$ds^2 = \mathrm{E}du^2 + \mathrm{G}dv^2$$

è l'elemento lineare della superficie e r_1, r_2 ne sono i raggi principali di curvatura si ha

$$\sqrt{\mathrm{E}} = \sqrt{e}\,.\,r_2 \qquad \sqrt{\mathrm{G}} = \sqrt{g}\,.\,r_1\,.$$

« Le note formole (*Lezioni* pag. 132)

$$\frac{\partial r_2}{\partial v} = (r_1 - r_2)\frac{\partial \log\sqrt{e}}{\partial v}\,, \quad \frac{\partial r_1}{\partial u} = (r_2 - r_1)\frac{\partial \log\sqrt{g}}{\partial u}$$

dimostrano che si ha

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}$$

e però la (6*) è perfettamente equivalente all'altra

$$(8) \qquad \mathrm{tg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\right) = \cot\left(\frac{\sigma}{2}\right)\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\right),$$

onde segue la proprietà sopra enunciata.

« In particolare vediamo che le superficie Φ indicate nel titolo apparterranno alla classe di superficie studiate al § 7 della mia Memoria citata.

« Supponiamo dapprima noto il sistema sferico (u, v) e vediamo come si determineranno le corrispondenti superficie Φ. Basterà per ciò determinare W_1 dalle (5), indi W dalle (4), ciò che si fa con due quadrature mediante le formole

$$(9) \qquad \log \mathrm{W}_1 = \int\left\{\mathrm{tg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\,du + \cot\left(\frac{\sigma}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\,dv\right\}$$

$$(10) \qquad \mathrm{W} = \int \mathrm{W}_1\left\{\sqrt{e}\,du + \cot\left(\frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{g}\,dv\right\},$$

dopo di che la (2) risulta identica. Osserviamo che la superficie Φ così ottenuta è determinata a meno di un'omotetia (dipendente dalla costante moltiplicativa in W_1) e di una trasformazione parallela (dipendente dalla costante additiva in W). Ma, poichè la (6*) non muta cangiando σ in $-\sigma$, ne risulta: Ad ogni sistema ortogonale sferico (u, v), che soddisfi la (6*), appartengono due superficie Φ essenzialmente distinte, determinate ciascuna a meno di un'omotetia e di una trasformazione parallela, che si ottengono con quadrature.

§ 3.

« Resta ora che determiniamo i sistemi sferici ortogonali (u, v) pei quali la (6*) è soddisfatta. Questo problema trovasi già risoluto nella mia Memoria citata, ma qui ne darò una risoluzione più diretta procedendo nel modo seguente [1]. Combinando l'equazione (6*) coll'altra:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\right)=-\sqrt{eg}\,,$$

la quale esprime che l'elemento lineare (1) appartiene alla sfera, ricaviamo:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\right)&=-\sqrt{eg}\,\operatorname{sen}^2\left(\frac{\sigma}{2}\right)\\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\right)&=-\sqrt{eg}\,\cos^2\left(\frac{\sigma}{2}\right),\end{aligned}\right.$$

onde seguono le altre

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\right)^2+g\,\operatorname{sen}^2\left(\frac{\sigma}{2}\right)\right\}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\right)^2+e\cos^2\left(\frac{\sigma}{2}\right)\right\}=0$$

e però integrando

$$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\right)^2+g\,\operatorname{sen}^2\left(\frac{\sigma}{2}\right)=\mathrm{V}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\right)^2+e\cos^2\left(\frac{\sigma}{2}\right)=\mathrm{U}\,,$$

dove V è funzione di v soltanto ed U di u.

« Ma, cangiando convenientemente i parametri u, v, possiamo fare

$$\mathrm{U}=1 \qquad \mathrm{V}=1$$

[1] Lo stesso metodo conduce a determinare i sistemi analoghi (u, v) sulla *pseudosfera*.

e quindi, indicando con φ, ψ due angoli ausiliarii, potremo porre

$$\sqrt{e}\,.\cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) = \operatorname{sen}\varphi\,, \quad \sqrt{g}\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma}{2}\right) = \operatorname{sen}\psi$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v} = \cos\varphi\,, \qquad \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u} = \cos\psi.$$

« Dopo di ciò gli angoli φ, ψ risulteranno legati dalle relazioni

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial v} &= \cot\left(\frac{\sigma}{2}\right)\operatorname{sen}\psi\,, \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} &= \operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)\operatorname{sen}\varphi\,. \end{aligned}\right.$$

« Viceversa, se φ, ψ soddisfano queste due equazioni, l'elemento lineare

$$ds'^2 = \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{\cos^2\left(\frac{\sigma}{2}\right)}du^2 + \frac{\operatorname{sen}^2\psi}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\sigma}{2}\right)}dv^2$$

appartiene alla sfera di raggio $=1$ e soddisfa alla (6^*).

« Le (11) possono interpretarsi geometricamente, ricorrendo alla teoria delle congruenze pseudosferiche (v. *Lezioni* pag. 426 ss.). E infatti, ove si ponga

$$\varphi = \omega_1 + \omega\,, \qquad \psi = \omega_1 - \omega\,,$$

esse si mutano nelle formole per la trasformazione di Bäcklund. Tenendo conto delle formole date al luogo citato, si vede facilmente che la dipendenza geometrica dei sistemi sferici cercati (u, v) dalle congruenze pseudosferiche è data dal seguente teorema:

« Si consideri una qualunque congruenza pseudosferica e se ne faccia l'immagine sferica; alle assintotiche u, v delle due falde pseudosferiche della superficie focale corrisponderà sulla sfera un sistema ortogonale (u, v) della specie richiesta (¹).

§ 4.

« Prendiamo ora una qualunque superficie Φ i cui piani principali abbiano costante il rapporto delle distanze del punto fisso O. Col centro in O descriviamo una sfera S di raggio arbitrario e costruiamo il sistema ∞^2 di circoli ortogonali contemporaneamente alla sfera S ed alla superficie Φ. Questi

(¹) Cf. la mia Memoria citata nel t. XVIII degli Annali (1890). Qui enuncierò ancora il teorema: Perchè nella immagine sferica di una congruenza W alle linee assintotiche delle due falde focali corrisponda un sistema ortogonale sulla sfera, è necessario e sufficiente che le due falde abbiano in punti corrispondenti eguale curvatura. (Cf. *Lezioni* pag. 313 s. s.).

circoli ammettono una serie ∞^1 di superficie ortogonali (*Lezioni* pag. 325), le quali tutte, come ora dimostreremo, appartengono alla classe di Φ. E infatti i piani di questi circoli passano per il centro O della sfera e, per la proprietà supposta a Φ, hanno quindi inclinazione costante sui piani principali di Φ. Per le proprietà generali dei sistemi tripli ortogonali ne segue che i piani stessi hanno la medesima inclinazione costante sopra i piani principali di una qualunque superficie Φ' ortogonale ai circoli [1].

« Ne risulta che, nota una superficie Φ, possiamo dedurne infinite altre nuove e propriamente una doppia infinità colla costruzione seguente:

« Col centro in O si descriva una sfera S di raggio arbitrario e si conducano i circoli normali contemporaneamente alla sfera S ed alla superficie Φ. Tutte le superficie Φ' ortogonali ai circoli appartengono alla classe stessa di Φ.

« Conformemente ai teoremi generali sui sistemi ciclici, queste nuove superficie Φ' si ottengono senza alcun calcolo d'integrazione, giacchè una di esse, la superficie Φ, è già nota e la sfera S è doppiamente normale ai circoli. Si può anche osservare che trasformando per raggi vettori reciproci la Φ rispetto alla sfera S si ottiene una superficie Φ' dalla serie e però:

« Ogni superficie Φ per un'inversione di centro O si cangia in una superficie della classe stessa.

« Pel caso particolare $\sigma = \frac{\pi}{2}$ quest'ultimo teorema è dato anche da Guichard (l. c.). In fine è da notarsi che possiamo ridurre la sfera S al suo centro O, nel qual caso i circoli considerati sono condotti pel punto fisso O normalmente alla superficie Φ.

§ 5.

« Le semplici formole date al § 1 si prestano ad altre applicazioni, e noi qui ci proponiamo di risolvere con esse un problema analogo a quello trattato superiormente e cioè: Trovare le superficie per le quali un punto fisso O dello spazio ha costante il rapporto delle distanze dal piano tangente e da uno dei piani principali.

« Supponiamo p. e. nelle formole del § 1

$$W_1 = kW \quad (k \text{ costante}),$$

e però

$$\frac{\partial W}{\partial u} = k\sqrt{e}\, W. \tag{12}$$

[1] Ciò risulta subito dalle formole a pag. 464 delle *Lezioni*. E infatti, essendo le traiettorie ortogonali delle superficie Φ' ($\rho_3 = \text{cost}^{\text{te}}$.) curve piane, si ha

$$\frac{1}{T} = 0$$

quindi ω_3 è indipendente da ρ_3 e però una costante assoluta, tale essendo pel particolare valore di ρ_3 che corrisponde alla Φ.

« Introducendo questo valore di $\frac{\partial W}{\partial u}$ nella (2), troviamo subito

$$\frac{1}{\sqrt{eg}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}=k; \tag{13}$$

questa esprime che la curvatura geodetica delle linee sferiche u è costante, cioè che queste linee sono circoli minori di egual raggio. Ne segue che le superficie cercate hanno le linee di curvatura u piane e i loro piani tagliano sotto il medesimo angolo la superficie.

« Inversamente, preso sulla sfera un sistema ortogonale (u, v) di cui le u siano circoli minori di egual raggio, basterà secondo le (12), (13) porre

$$W = V\sqrt{g},$$

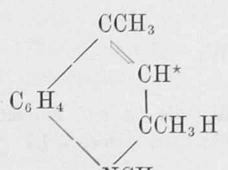
dove V è funzione arbitraria di v, e la superficie così definita in coordinate tangenziali godrà della proprietà richiesta.

« Le superficie ora considerate stanno in una notevole relazione colle superficie Φ e si presentano insieme ad esse nella teoria dei sistemi tripli ortogonali. Presa infatti una superficie Φ, se si fa uscire da un suo punto P, normalmente a Φ, una curva C nel piano condotto per O e per la normale in P alla superficie, ne risulta individuato un sistema triplo ortogonale in cui le superficie di una serie sono altrettante superficie Φ aventi per traiettorie ortogonali delle curve piane, i cui piani passano pel punto fisso O (1).

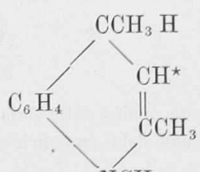
« Le superficie delle altre due serie appartengono allora alla classe considerata nel presente paragrafo ».

Chimica. — *Sulla costituzione delle idrochinoline, considerazioni ed esperienze intorno alla struttura dei nuclei azotati.* Nota del Socio G. Ciamician e di G. Boeris.

« Le ricerche eseguite in questi ultimi anni dal dott. Ferratini hanno dimostrato in modo non dubbio, che la base ottenuta da E. Fischer nella metilazione degli indoli è realmente una diidrochinolina trimetilata. Il Ferratini ha provato inoltre, che questo interessante composto, cui spetta una delle due seguenti formole:



oppure



,

(1) Cf. *Lezioni* pag. 477.