ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI

1894

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME III.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1894

fatica c'è una differenza di caratteri, che nessuna formola di struttura può *spiegare*; sarebbe veramente tempo, che i chimici si persuadessero, che con le sole formole di struttura non si può dare ragione della funzione chimica dei composti, perchè da esse non si deve pretendere di più di quello che possono dare. Io accetto perciò assai volentieri le vedute di W. Marckwald (¹), il quale con buon successo si adopera a combattere le formole centriche e diagonali, che non hanno fatto progredire d'un passo la questione intorno all'intima struttura del benzolo e dei composti fenociclici in genere. Anche dalle recenti pubblicazioni di Brühl (²) risulta, che la formola di Kekulé è quella che meno artificiosamente rende ragione dei fatti: è necessario però persuadersi una volta per sempre, che i doppi legami possono avere in differenti composti caratteri diversi ».

Geometria. — *Della equazione di condizione pei parametri dei sistemi di superficie, che appartengono ad un sistema triplo ortogonale.* Nota del prof. G. Ricci, presentata dal Corrispondente E. Padova.

« Il signor Lilienthal, nel fascicolo 4°, ultimamente pubblicato del volume 44° dei *Mathematische Annalen*, partendo dalla teoria generale delle congruenze di linee, ha dato sotto nuova forma la equazione, che esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema di superficie di parametro dato ϱ faccia parte di un sistema triplo ortogonale. Come quella data dal sig. Weingarten nel volume LXXXIII del *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, questa nuova forma ha il vantaggio che per essa scomparisce dalla equazione, di cui si tratta, la irrazionalità, che si presenta naturalmente quando la equazione stessa non è che la espressione diretta della condizione necessaria e sufficiente perchè uno dei due sistemi di linee di curvatura delle superficie ϱ risulti delle traiettorie ortogonali di un altro sistema di superficie.

« La ricordata pubblicazione del sig. Lilienthal mi induce a far conoscere alcuni risultati, a cui sono giunto da molto tempo proseguendo, pel caso speciale di tre variabili, le ricerche generali, che formano l'oggetto della Memoria da me inserita nel Tomo XII della Serie 2ª degli *Annali di Matematica pura ed applicata*.

« Questi risultati non sono che l'estensione di quello citato, dovuto al sig. Weingarten, al problema degli integrali ortogonali di una equazione li-

(¹) Liebigs Annalen 274, pag. 331 e 279, pag. 1.
(²) Berichte, 27, pag. 1065.

neare ed omogenea a derivate parziali di 1° ordine associata ad una forma fondamentale ternaria qualunque. Essi comprendono quindi come caso speciale la trasformazione in coordinate generali della equazione del geometra tedesco: della quale però darò anche una dimostrazione diretta semplicissima fondata sui metodi di calcolo differenziale assoluto. Le convenzioni e notazioni, di cui qui farò uso, sono quelle da me stabilite nel Riassunto di alcuni miei lavori pubblicato nel fascicolo del giugno 1892 del *Bulletin des sciences mathématiques*. Di più ricorderò la convenzione, di cui mi sono valso altre volte e secondo la quale si considerano come identici due indici, che differiscono per un multiplo di tre.

« 1. Se ϱ è una funzione qualunque delle coordinate cartesiane ortogonali x_1, x_2, x_3 dello spazio e si pone

$$1)\qquad \frac{1}{H^2} = \sum_1^3{}_s \left(\frac{d\varrho}{dx_s}\right)^2$$

$$2)\qquad X_r = H\,\frac{d\varrho}{dx_r}$$

$$3)\qquad u_s = \sum_1^3{}_r \frac{dH}{dx_r}\,\frac{dX_r}{dx_s},$$

la equazione

$$W)\qquad \Sigma_s \frac{d\varrho}{dx_s}\left(\frac{du_{s+2}}{dx_{s+1}} - \frac{du_{s+1}}{dx_{s+2}}\right) = 0$$

è quella che esprime, sotto la forma data dal sig. Weingarten, la condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema di superficie di parametro ϱ appartenga ad un sistema triplo ortogonale.

« Se in vece si considerano x_1 x_2 x_3 come coordinate generali dei punti dello spazio ed, assunta come forma fondamentale la espressione corrispondente

$$\varphi = \Sigma_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s = d_s^2$$

del quadrato dell'elemento lineare dello spazio, si pone

$$1')\qquad H = \frac{1}{\Delta_1 \varrho};$$

se, ritenendo per le X_r le espressioni date dalle (2), si fanno ancora le posizioni

$$X_{rs} \equiv D_\varphi(X_r), \qquad H^{(r)} \equiv R^{(\varphi)}\left(\frac{dH}{dx_r}\right)$$

$$3')\qquad u_s = \Sigma_r\, H^{(r)}\, X_{rs}$$

$$u_{st} \equiv D_\varphi(u_s)$$

e si osserva che le espressioni

$$\alpha^{(s)} = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(u_{s+2\;s+1} - u_{s+1\;s+2}\right) = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{du_{s+2}}{dx_{s+1}} - \frac{du_{s+1}}{dx_{s+2}}\right)$$

sono gli elementi di un sistema semplice controvariante, è facile concludere che la funzione

4) $$J = \frac{1}{\sqrt{a}} \Sigma_s X_s \left(\frac{du_{s+2}}{dx_{s+1}} - \frac{du_{s+1}}{dx_{s+2}} \right)$$

è un invariante. E poichè, nella ipotesi che le coordinate generali coincidano colle cartesiane ortogonali, le espressioni (3′) delle u_s coincidono colle (3) ed J non è che il primo membro della equazione (W) moltiplicato per H, se ne conclude che questa equazione, se per le u_s vi si intendono poste le espressioni (3′), è la trasformata in coordinate generali della equazione di Weingarten.

« 2. In secondo luogo, mantenendo ferme le altre convenzioni e notazioni del § 1, si supponga la forma fondamentale ternaria φ di natura qualunque e si designi con $\alpha^{(pq)}$ (¹) il sistema doppio controvariante, il cui annullarsi identicamente rappresenta le condizioni necessarie e sufficienti perchè la forma φ sia trasformabile in altra a coefficienti costanti. Posto

$$\xi_q = HX_q = H^2 \varrho_q$$

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \Sigma_{qrs} \alpha^{(qr)} a_{rs} (X_{s+1} \xi_{qs+2} - X_{s+2} \xi_{qs+1}),$$

è facile riconoscere che la espressione J_1 è un invariante. La equazione di condizione perchè il sistema di superficie di parametro ϱ considerato come appartenente allo spazio di elemento lineare $\sqrt{\varphi}$ appartenga ad un sistema triplo ortogonale è espressa dalla equazione

W′) $$J + J_1 = 0.$$

È da notarsi che J_1 si annulla identicamente e quindi questa equazione si riduce a quella di Weingarten non soltanto nel caso, in cui il sistema $\alpha^{(rs)}$ è identicamente nullo, ma anche quando i suoi elementi assumono la forma

$$\alpha^{(rs)} = \mu a^{(rs)} + \nu X^{(r)} X^{(s)},$$

i coefficienti μ e ν essendo qualunque. Questo caso si verifica, per esempio, se $\sqrt{\varphi}$ è l'espressione del quadrato dell'elemento lineare di uno spazio a curvatura costante.

« 3. In fine, assumendo sempre come fondamentale una forma ternaria φ di natura qualunque, si consideri una equazione qualsivoglia della forma

α) $$\Sigma_r X^{(r)} \frac{df}{dx_r} = 0.$$

I suoi coefficienti costituiscono un sistema controvariante e, come è permesso, noi supporremo scelto il coefficiente arbitrario, che essi contengono, in modo che si abbia

$$\Sigma_{rs} a_{rs} X^{(r)} X^{(s)} = 1.$$

(¹) Si veda il Riassunto citato (§ 2, formola (4)).

« Posto

$$X_s \equiv R_\varphi (X^{(s)})$$

manterremo le notazioni dei §§ 2 e 3 e porremo di più

$$2c_{rs} = X_{rs} + X_{sr}$$

$$a \, . \, M = \begin{vmatrix} 0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ X_2 & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ X_3 & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{a}} \Sigma_r \frac{d(\sqrt{a}\, X^{(r)})}{dx_r}$$

$$2\sqrt{a}\, Y^{(s)} = X_{s+1\, s+2} - X_{s+2\, s+1}$$

$$Q = \Sigma_s X_s Y^{(s)}$$

$$2P_r = \Sigma_s X^{(s)} X_{rs} , \qquad P^{(r)} \equiv R^{(\varphi)} (P_r)$$

$$v_r = - 2\Sigma_q P^{(q)} X_{qr} .$$

Sarà facile riconoscere che le funzioni $Y^{(s)}$ sono gli elementi di un sistema controvariante, e le P_r e v_r quelli di due sistemi covarianti; mentre M, N, Q sono invarianti, e l'ultimo di essi eguagliato a zero rappresenta la condizione necessaria e sufficiente perchè, come nei §§ 1 e 2, le X_r siano proporzionali alle derivate di una funzione ϱ rispetto alle x_r.

« Poniamo ancora

$$v_{rs} \equiv D_\varphi (v_r) , \qquad Q_s \equiv \frac{dQ}{dx_s} , \; P_{rs} \equiv D_\varphi (P_r),$$

$$\sqrt{a}\, J' = \Sigma_s X_s (v_{s+2\, s+1} - v_{s+1\, s+2}) + 2\Sigma_s P_s (v_{s+2} X_{s+1} - v_{s+1} X_{s+2}) ,$$

$$\sqrt{a}\, J'_1 = \Sigma_{qr} a_{rs} \alpha^{(qr)} \{ X_{s+1} (X_{qs+2} - 2X_q P_{s+2}) - X_{s+2} (X_{qs+1} - 2X_q P_{s+1}),$$

$$J_2 = \Sigma_s X^{(s)} Q_s , \quad J_3 = \Sigma_{rs} a^{(rs)} P_{rs} , \quad J_4 = \Sigma_{rs} \alpha^{(rs)} (a_{rs} - X_r X_s).$$

La condizione necessaria e sufficiente perchè la equazione (α) ammetta due integrali ortogonali nella varietà di elemento lineare $\sqrt{\varphi}$ sarà rappresentata dalla equazione

$$\text{W}'') \qquad J' + J'_1 - NJ_2 + Q (4M + 2J_3 + J_4) = 0.$$

Se si suppone di nuovo che le X_r siano proporzionali alle derivate di una funzione ϱ rispetto alle x_r e che valgano per esso le espressioni (2) del § 1, si hanno le

$$Q = 0 , \qquad J_2 = 0 ,$$

$$HJ' = J , \qquad J'_1 = HJ_1 ,$$

e la equazione (W'') coincide colla (W') del § 2 ».