ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IV.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 febbraio 1895.

F. Brioschi Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari a derivate parziali d'ordine superiore* (1). Nota III^a del Socio Luigi Bianchi.

« Ai risultati contenuti nelle mie due Note precedenti si può giungere con semplicità e rapidità molto maggiore, come di poi ho osservato, facendo uso di una formola generale relativa agli integrali multipli. E poichè, applicando questa formola, si trattano con grande facilità non solo i casi già precedentemente discussi ma ben anche il caso generale delle equazioni d'ordine n, credo conveniente far conoscere questo nuovo metodo.

I.

« La formola di cui si tratta è una formola di integrazione per parti che si ottiene nel modo seguente.

« Indichiamo con u, v due funzioni delle r variabili indipendenti $x_1, x_2, \dots x_r$ finite e continue insieme alle loro derivate parziali *miste* fino all'ordine r e prendiamo a trasformare con successive integrazioni per parti l'integrale r^{plo}.

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\cdots\cdots\int_{\alpha_r}^{\beta_r} v\,\frac{\partial^r u}{\partial x_1\,\partial x_2 \dots \partial x_r}\,dx_1\,dx_2\dots dx_r\,,$$

dove i limiti (α_1, β_1), $(\alpha_2, \beta_2) \dots (\alpha_r, \beta_r)$ sono costanti. Per esprimere concisamente il risultato faremo uso delle notazioni seguenti. Indichiamo con

$$i_1\ i_2 \dots i_r$$

(1) Vedi Rendiconti del 6 gennaio e 5 febbraio.

una qualunque permutazione degli r indici $1, 2, \dots r$ ed essendo φ una qualunque funzione di $x_1\, x_2 \dots x_r$, col simbolo

$$(\varphi)_{\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_s}}$$

denotiamo la funzione di

$$x_{i_{s+1}}\, x_{i_{s+2}} \dots x_{i_r}$$

che nasce da φ ponendovi

$$x_{i_1} = \alpha_{i_1}\,,\ x_{i_2} = \alpha_{i_2} \dots x_{i_s} = \alpha_{i_s}.$$

Allora la formola generale accennata si scrive:

$$\text{(I)}\quad (uv)_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} + \sum_{i_1} \int_{\alpha_{i_1}}^{\beta_{i_1}} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_{i_1}}\right)_{\alpha_{i_2} \alpha_{i_3} \dots \alpha_{i_n}} +$$

$$+ \sum_{i_1 i_2} \int_{\alpha_{i_1}}^{\beta_{i_1}} \int_{\alpha_{i_2}}^{\beta_{i_2}} \left(v \frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1}\, \partial x_{i_2}}\right)_{\alpha_{i_3} \dots \alpha_{i_n}} dx_{i_1}\, dx_{i_2} + \cdots$$

$$+ \sum_{i_1 \dots i_{r-1}} \int_{\alpha_{i_1}}^{\beta_{i_1}} \int_{\alpha_{i_2}}^{\beta_{i_2}} \cdots \int_{\alpha_{i_{r-1}}}^{\beta_{i_{r-1}}} \left(v \frac{\partial^{r-1} u}{\partial x_{i1} \dots \partial x_{i_{r-1}}}\right)_{\alpha_{ir}} dx_{i_1} \dots dx_{i_{r-1}} +$$

$$+ \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \cdots \int_{\alpha_r}^{\beta_r} v \frac{\partial^r u}{\partial x_1\, \partial x_2 \dots \partial x_r}\, dx_1\, dx_2 \dots dx_r =$$

$$= (uv)_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_r} - \sum_{i_1} \int_{\alpha_{i_1}}^{\beta_i} \left(u \frac{\partial v}{\partial x_{i_1}}\right)_{\beta_{i_2} \dots \beta_{ir}} dx_{i_1} +$$

$$+ \sum_{i_1 i_2} \int_{\alpha_{i_1}}^{\beta_{i_1}} \int_{\alpha_{i_2}}^{\beta_{i_2}} \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial x_{i_1}\, \partial x_{i_2}}\right)_{\beta_{i_3} \dots \beta_{ir}} dx_{i_1}\, dx_{i_2} - \cdots$$

$$+ (-1)^{r-1} \sum_{i_1 i_2 \dots i_{r-1}} \int_{\alpha_{i_1}}^{\beta_{i_1}} \int_{\alpha_{i_2}}^{\beta_{i_2}} \cdots \int_{\alpha_{i_{r-1}}}^{\beta_{i_{r-1}}} \left(u \frac{\partial^{r-1} v}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{r-1}}}\right)_{\beta_r} dx_{i_1} dx_{i_2} \dots x_{i_{r-1}} +$$

$$+ (-1)^r \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \cdots \int_{\alpha_r}^{\beta_r} u \frac{\partial^r v}{\partial x_1\, \partial x_2 \dots \partial x_r}\, dx_1\, dx_2 \dots dx_r.$$

« Per dimostrarla si osservi che per $r=1$, $r=2$ sussiste certamente, come subito si verifica; onde basterà, col solito metodo di induzione, concludere da r ad $r+1$. Perciò supponiamo verificata la (I) e passando al caso di $r+1$ variabili $x_1\, x_2 \ldots x_r\, x_{r+1}$, cangiamovi u in $\dfrac{\partial u}{\partial x_{r+1}}$ e integriamo rispetto a x_{r+1} da α_{r+1} a β_{r+1}. Se in ciascun integrale del 2° membro eseguiamo un' integrazione per parti rapporto a x_{r+1} e all' integrale r^{plo} che allora vi figura:

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\cdots\int_{\alpha_r}^{\beta_r}\left(u\frac{\partial^r v}{\partial x_1\,\partial x_2\ldots\partial x_r}\right)_{\alpha_{r+1}} dx_1\, px_2 \ldots dx_r$$

sostituiamo il valore che si trae dalla (I) stessa, ritroviamo la formola medesima cangiatovi r in $r+1$. Così la nostra formola è dimostrata in generale.

II.

« Consideriamo ora una espressione lineare alle derivate parziali miste d'ordine n della forma

$$\Omega(u)=\frac{\partial^n u}{\partial x_1\,\partial x_2\ldots\partial x_n}+\sum_{i_1} a_{i_1}\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{in}}+\sum_{i_1 i_2} a_{i_1 i_2}\frac{\partial^{n-2}u}{\partial x_{i_3}\ldots\partial x_{i_n}}+\cdots$$
$$+\sum_{i_1 i_2\ldots i_r} a_{i_1 i_2\ldots i_r}\frac{\partial^{n-r}u}{\partial x_{i_{r+1}}\ldots\partial x_{i_x}}+\cdots+a_{12\ldots n}\,u,$$

dove i coefficienti a_{i_1}, $a_{i_1 i_2}\ldots$ sono funzioni finite e continue, nel campo a n dimensioni delle variabili x_1, $x_2 \ldots x_n$ che si considera, insieme alle loro derivate parziali miste [1]. Come nella Nota precedente definiamo come *componenti* di $\Omega(u)$ e indichiamo col simbolo $\Omega^{(u)}_{i_1 i_2\ldots i_r}$ le espressioni che si ottengono da $\Omega(u)$ nel modo seguente. Separiamo in $\Omega(u)$ l'aggregato dei termini che contengono una determinata derivata r^{ma}

$$\frac{\partial^r u}{\partial x_{i_1}\,\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_r}}$$

[1] Propriamente, per ciò che segue, basta che il coefficiente a r indici $a_{i_1 i_2\ldots i_r}$ ammetta le derivate parziali miste rispetto alle variabili $x_{r+1}\ldots x_n$ fino all'ordine $n-r$.

e le sue derivate; sostituendo in questo aggregato a quella derivata r^{ma} la u stessa si avrà l'espressione che indichiamo con $\Omega^{(u)}_{i_1 i_2 \dots i_r}$ e diciamo una componente d'ordine $n-r$ di $\Omega(u)$.

« Introduciamo inoltre l'espressione *aggiunta* $\Phi(v)$ di $\Omega(u)$ definita dalla formola:

$$\Phi(v) = \frac{\partial^n v}{\partial x_1 \, \partial x_2 \dots \partial x_n} - \sum_{i_1} \frac{\partial^{n-1}(a_{i_1} v)}{\partial x_{i_2} \, \partial x_{i_3} \dots \partial x_{i_n}} + \sum_{i_1 i_2} \frac{\partial^{n-2}(a_{i_1 i_2} v)}{\partial x_{i_3} \dots \partial x_{i_n}} + \cdots$$

$$+ (-1)^r \sum_{i_1 i_2 \dots i_r} \frac{\partial^{n-r}(a_{i_1 i_2 i_r} v)}{\partial x_{i_{r+1}} \dots \partial x_{i_n}} + \cdots + (-1)^n a_{12\dots n} v$$

e della $\Phi(v)$ consideriamo altresì le componenti $\Phi^{(v)}_{i_1 i_2 \dots r}$ dei varî ordini.

« Supponiamo ora che u, v siano funzioni finite e continue delle variabili, insieme alle derivate parziali miste fino alle n^{me}, entro il parallelepipedo a n dimensioni

$$x_1 = \alpha_1\,, \quad x_2 = \alpha_2 \dots x_n = \alpha_n$$
$$x_1 = \beta_1\,, \quad x_2 = \beta_2 \dots x_n = \beta_n\,.$$

« Prendiamo allora a trasformare, coll'aiuto della nostra formola (I), l'integrale n^{plo}

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \cdots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} v \Omega(u) \, dx_1 \, dx_2 \dots dx_n \,,$$

deducendo il valore del termine generale

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \cdots \int_{\alpha_r}^{\beta_r} a_{i_1 i_2 \dots i_{n-r}} v \frac{\partial^r u}{\partial x_{i_1} \, \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_r}} dx_{i_1} \, dx_{i_2} \dots dx_{i_r}$$

appunto dalla (I), ove si cangi v in

$$a_{i_1 i_2 \dots i_{n-r}} \,.\, v.$$

Otterremo così la formola :

$$(\mathrm{II})\qquad \int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\cdots\int_{\alpha_n}^{\beta_n} v\Omega(u)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n+(uv)_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}+$$

$$+\sum_{i_1}\int_{\alpha_{i_1}}^{\beta_{i_1}}(v\Omega_{i_2i_3\ldots i_n}(u))_{\alpha_{i_2}\alpha_{i_3}\ldots\alpha_{i_n}}\,dx_{i_1}+$$

$$+\sum_{i_1i_2}\int_{\alpha_{i_1}}^{\beta_{i_1}}\int_{\alpha_{i_2}}^{\beta_{i_2}}(v\Omega_{i_3\ldots i_n}(u))_{\alpha_{i_3}\ldots\alpha_{i_n}}\,dx_{i_1}dx_{i_2}+\cdots$$

$$+\sum_{i_1i_2\ldots i_{n-1}}\int_{\alpha_{i_1}}^{\beta_{i_1}}\int_{\alpha_{i_2}}^{\beta_{i_2}}\cdots\int_{\alpha_{i_{n-1}}}^{\beta_{i_{n-1}}}(v\Omega_{i_n}(u))_{\alpha_{i_n}}\,dx_{i_1}\ldots dx_{i_{n-1}}=$$

$$=(uv)_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}-\sum_{i_1}\int_{\alpha_{i_1}}^{\beta_{i_1}}(u\Phi_{i_2i_3\ldots i_n}(v))_{\beta_{i_2}\beta_{i_3}\ldots\beta_{i_n}}\,dx_{i_1}+$$

$$+\sum_{i_1i_2}\int_{\alpha_{i_1}}^{\beta_{i_1}}\int_{\alpha_{i_2}}^{\beta_{i_2}}(u\Phi_{i_3\ldots i_n}(v))_{\beta_{i_3}\ldots\beta_{i_n}}\,dx_{i_1}\,da_{i_2}-\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\sum_{i_1i_2\ldots\,n-1}\int_{\alpha_{i_1}}^{\beta_{i_1}}\int_{\alpha_{i_2}}^{\beta_{i_3}}\cdots\int_{\alpha_{i_{n-1}}}^{\beta_{i_{n-1}}}(u\Phi_{i_n}(v))_{\beta_{i_n}}\,dx_{i_1}\,dx_{i_2}\ldots dx_{i_n}+$$

$$+(-1)^n\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\cdots\int_{\alpha_n}^{\beta_n}u\Phi(v)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n\,.$$

III.

« Vogliasi ora trovare la soluzione regolare u della equazione

$$\Omega(u)=\mathrm{F}(x_1,\,x_2\ldots\ldots x_n),$$

(essendo F una funzione data delle x variabili) che sopra ciascuno degli iperpiani coordinati

$$x_{i_1}=\alpha_{i_1}$$

si riduca ad una funzione arbitrariamente data delle rimanenti variabili $x_{i_2}\ldots x_{i_n}$.

« L'esistenza di una tale soluzione risulta subito, come più volte abbiamo ripetuto in queste Note, dall'applicare il metodo di Picard delle approssimazioni successive. La formola (B) dà poi il modo di estendere alle n variabili il metodo di Riemann e in particolare di dimostrare così l'unicità della soluzione domandata.

« Perciò, volendo calcolare il valore di questa soluzione u in un punto qualsiasi $(\beta_1\,\beta_2 \dots \beta_n)$, si cominci dal determinare la *soluzione principale relativa al punto* $(\beta_1\,\beta_2 \dots \beta_n)$ della equazione aggiunta

$$\Phi\,(v) = 0,$$

cioè la soluzione regolare di questa equazione che viene definita dalle condizioni seguenti:

essa deve soddisfare sugli iperpiani coordinati

$$x_{i_1} = \beta_{i_1}$$

alla rispettiva componente d'ordine $n-1$

$$\Phi_{i_1}\,(v) = 0,$$

sopra gli S_{n-2} coordinati

$$x_{i_1} = \beta_{i_1} \quad x_{i_2} = \beta_{i_2}$$

alle rispettive componenti di ordine $n-2$

$$\Phi_{i_1\,i_2}\,(v) = 0$$

e in generale sopra gli S_{n-r} coordinati

$$x_{i_1} = \beta_{i_1} \dots x_{i_r} = \beta_{i_r}$$

alla componente d'ordine $n-r$

$$\Phi_{i_1\,i_2 \dots i_r}\,(v) = 0,$$

in fine sopra gli assi (S_1) coordinati alle rispettive componenti di 1° ordine

$$\Phi_{i_2\,i_3 \dots i_n}\,(v) = 0\,;$$

da ultimo deve assumere il valore *uno* nel punto $(\beta_1\beta_2 \dots \beta_n)$ (1).

« Supposto noto questo *moltiplicatore principale* v e sostituendolo nella (II) avremo immediatamente

$$\text{(III)}\quad (u)_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n} = (uv)_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} + \int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\dots\int_{\alpha_n}^{\beta_n} v\mathrm{F}(x_1 x_2 \dots x_n)\,dx_1\,dx_2 \dots dx_n + \dots$$

$$+ \sum_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} \int_{\alpha_{i_1}}^{\beta_{i_1}} \int_{\alpha_{i_2}}^{\beta_{i_{n-1}}} \dots \int_{\alpha_{i_{n-1}}}^{\beta_{i_{n-1}}} (v\,\Omega_{i_n}(u))_{\alpha_{i_n}}\,dx_{i_1}\,dx_{i_2} \dots dx_{i_{n-1}} + \dots$$

$$+ \sum_{i_1 i_2} \int_{\alpha_{i_1}}^{\beta_{i_1}} \int_{\alpha_{i_2}}^{\beta_{i_1}} (v\,\Omega_{i_3}{}^{(u)}{}_{\dots i_n})_{\alpha_{i_3}\dots\alpha_{i_n}}\,dx_{i_1}\,dx_{i_2} + \sum_{i_1} \int_{\alpha_{i_1}}^{\beta_i} (v\Omega_{i_2}{}^{(u)}{}_{i_3 \dots i_n})\,dx_{i_1}\,.$$

(1) Si osserverà che, per la simmetria di queste condizioni, la soluzione principale di $\Phi(v) = 0$ è altresì soluzione principale di tutte le componenti $\Phi_{i_1 i_2 \dots i_r}(v) = 0$ nel rispettivo spazio coordinato S_{n-r}.

« Questa formola ci fa conoscere appunto il valore di u in $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n)$ in funzione dei valori che u assume sugli iperpiani coordinati. Ne risulta che se $u = 0$ sugli iperpiani coordinati, sarà

$$(u)_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_1}^{\beta_2} \dots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} v \mathrm{F}(x_1 x_2 \dots x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

e però se $\mathrm{F} = 0$ sarà dovunque $u = 0$, onde: Una soluzione regolare di $\Omega(u) = \mathrm{F}$ è perfettamente individuata dai valori che u assume sugli iperpiani coordinati uscenti da un punto.

« Suppongasi ora che nella (III) u sia la soluzione principale di $\Omega(u) = 0$ relativa al punto $(\alpha_2 \alpha_2 \dots \alpha_n)$; la (III) diventa allora

$$(u)_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} = (v)_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$$

e ci dà il *teorema di reciprocità* di Darboux esteso alle n variabili.

« Ne segue che: I due problemi di integrare l'equazione $\Omega(v) = 0$ o la sua aggiunta $\Phi(v) = 0$ si equivalgono perfettamente.

IV.

« La formola generale (I) si applica egualmente ai sistemi di equazioni simultanee precisamente come nel caso del 2° ordine considerato nella Nota del dott. Niccoletti.

« Essendo $u_1, u_2 \dots u_m$, m funzioni delle n variabili $x_1, x_2 \dots x_n$ consideriamo m espressioni lineari $\Omega^{(r)}$ della forma

$$\Omega^{(r)}(u_1 u_2 \dots u_m) = \frac{\partial^n u_r}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=m} \left\{ \sum_{i_1} a_{i_1}{}^{(k)} \frac{\partial^{n-1} u_k}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}} + \sum_{i_1 i_2} a_{i_1}{}^{(k)}{}_{i_2} \frac{\partial^{n-2} u_k}{\partial x_{i_3} \dots \partial x_{i_n}} + \dots + a^{(k)}_{12\dots n} u_k \right\}$$

e supponiamo di volere integrare il sistema

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{cases} \Omega^{(1)}(u_1 u_2 \dots u_m) = \mathrm{F}_1(x_1 x_2 \dots x_n) \\ \Omega^{(2)}(u_1 u_2 \dots u_m) = \mathrm{F}_2(x_1 x_2 \dots x_n) \\ \Omega^{(m)}(u_1 u_2 \dots u_m) = \mathrm{F}_m(x_1 x_2 \dots x_n), \end{cases}$$

essendo le F funzioni assegnate di $x_1 x_2 \dots x_n$, colla condizione che le soluzioni regolari $u_1 u_2 \dots u_m$ assumano ciascuna sopra ciascuno degli iperpiani coordinati

$$x_r = \alpha_r$$

valori dati ad arbitrio. Definiamo perciò le componenti dei varî ordini delle $\Omega^{(r)}$ separando in $\Omega^{(r)}(u_1 u_2 \dots u_m)$ l'aggregato dei termini che contengono le derivate s^m

$$\frac{\partial^s u_k}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_s}} \quad (k = 1, 2, \dots m)$$

essendo $i_1 i_2 \dots i_s$ indici fissi fra $1, 2 \dots n$ e le loro derivate, e sostituendo poi a ciascuna di quelle derivate s^{me} la u_k corrispondente; l'espressione che così otteniamo sarà la componente

$$\Omega^{(r)}_{i_1 i_2 \dots i_s}.$$

Similmente definiamo le espressioni aggiunte

$$\Phi^{(r)}(v_1 v_2 \dots v_m)$$

e le loro componenti

$$\Phi^{(r)}_{i_1 i_2 \dots i_s}(v_1 v_2 \dots v_m)$$

Il sistema di *moltiplicatori principali* $v_1 v_2 \dots v_m$ relativo al punto $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n)$ sarà definito dal dover soddisfare in tutto lo spazio al sistema aggiunto

$$\Phi^{(r)}(v_1 v_2 \dots v_m) = 0$$

e sopra gli spazî coordinati S_{n-3} uscenti da $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n)$ alle rispettive componenti

$$\Phi^{(r)}_{i_1 i_2 \dots i_s}(v_1 v_2 \dots v_m) = 0 \; (s = 1, 2, \dots n-1),$$

in fine di assumere in $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n)$ un sistema prefissato di valori non tutti nulli. Per determinare la soluzione del dato sistema (A) colle assegnate condizioni ai limiti si dedurrà dalla (I) una formola che è la generalizzazione della (III) e da questa si ottiene cangiandovi u, v, F rispettivamente in u_r, v_r, F_r e sommando da $r = 1$ a $r = m$. Così sarà nota in $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n)$ la somma

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_m v_m$$

e basterà scegliere m sistemi di moltiplicatori principali il cui determinante in $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n)$ sia diverso da zero per calcolarne linearmente $u_1 u_2 \dots u_m$.

V.

« Un complemento di qualche interesse al metodo di Riemann è dato dalle osservazioni seguenti.

« Se della equazione $\Omega(u)=0$ conosciamo la soluzione principale relativa ad ogni punto dello spazio, potremo per quanto precede trovarne l'integrale generale colle n funzioni arbitrarie di $n-1$ variabili ciascuna. Questo è ad esempio il caso della equazione

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}=u$$

considerato nella mia prima Nota.

« Supponiamo invece di sapere determinare soltanto la soluzione principale di $\Omega(u)=0$ relativa ad ogni punto dell'iperpiano $x_n=\alpha_n$: allora del moltiplicatore principale relativo a qualsiasi punto dello spazio $(\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n)$ sapremo determinare, pel teorema di reciprocità, i valori che assume sull'iperpiano $x_n=\alpha_n$. Se ci limitiamo adunque a ricercare quelle soluzioni di $\Omega(u)=0$ che si annullano sugli altri iperpiani coordinati

$$x_1 \pm \alpha_1\,,\; x_2=\alpha_2\,,\; x_{n-1}=\alpha_{n-1}$$

la formola (III) ci darà evidentemente:

$$(u)_{\beta_1\beta_1\ldots\beta_n}=\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_1}^{\beta}\ldots\int_{\alpha_{n-1}}^{\beta_{n-1}} v\,\Omega_n(u)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_{n-1}$$

e avremo un integrale della proposta con una funzione arbitraria di $n-1$ variabili assegnando ad arbitrio i valori di u sull'iperpiano $x_n=\alpha_n$.

« Come esempio, consideriamo l'equazione

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}-p x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}-q u=0 \tag{1}$$

con $p\,,q$ costanti. Possiamo facilmente determinarne la soluzione principale relativa ad un punto qualunque dell'iperpiano $x_1=0$. E invero se poniamo

$$t=x_1(x_2-\alpha_2)\ldots(x_n-\alpha_n)\,,$$

essendo $\alpha_2\,,\alpha_3\ldots\alpha_n$ costanti qualunque, potremo determinare una trascendente intera in t:

$$\mathrm{J}(t)=1+\sum_{r=1}^{r=\infty} c_r\, t^r\,, \tag{2}$$

che coincida colla soluzione principale della (1) relativa al punto $(0, \alpha_2, \dots \alpha_n)$. Poichè infatti nel caso attuale essa deve ridursi $= 1$ sopra ciascuno degli iperpiani coordinati uscenti dal punto $(0, \alpha_2 \dots \alpha_n)$, basterà determinare nella serie (2) i coefficienti c_r dalla relazione ricorrente

$$r^n c_r = \{ p(r-1) + q \} c_{r-1},$$

onde

$$c_r = \frac{q(q+p)(q+2p)\dots(q+(q-1)p)}{2^n 3^n \dots r^n}.$$

« La serie

$$J(t) = 1 + \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{q(q+p)(q+2p)\dots(q+(r-1)p)}{2^n 3^n \dots r^n} t^r$$

converge effettivamente in tutto il piano. Si osserverà che nel caso $n=2$ l'equazione (1) è il tipo a cui può ridursi la equazione più generale a invarianti costanti

$$h = q - p \qquad k = q.$$

« Particolarmente notevole è il caso $q = -p$ ovvero $h = 2k$ ove la equazione può integrarsi col metodo di Laplace. In tal caso la soluzione principale relativa ad un punto qualsiasi $(\alpha_1 \alpha_2)$ è data dalla formola

$$u = e^{p\alpha_1(x_2-\alpha_2)} \{ 1 - p(x_1 - \alpha_1)(x_2 - \alpha_2) \}.$$

« Dopo l'equazione $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$, è questo, per quanto io so, il caso più semplice in cui la determinazione della soluzione principale riesce completamente ».

Matematica. — *Sulle operazioni funzionali distributive.* Nota del Corrispondente S. Pincherle.

« Molte fra le più importanti operazioni che, eseguite sopra una funzione analitica di una variabile, danno pure come risultato una funzione analitica, godono della proprietà distributiva; se cioè A ci rappresenta una tale operazione ed $A(\varphi)$ il risultato che si ottiene eseguendola sopra alla funzione φ, si ha, indicando con ψ una seconda funzione

(1) $$A(\varphi + \psi) = A(\varphi) + A(\psi)$$

cui va unita l'uguaglianza

$$A(c\varphi) = cA(\varphi),$$