

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IV.

1° SEMESTRE



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

dove  $\lambda$  è una funzione data; una tale relazione si può chiamare un'equazione differenziale funzionale. Inversamente, ogni operazione soddisfacente ad un'equazione (8) è della forma MS; infatti dalla (8) risulta

$$S(tg) = (\lambda(x) + x) S(g),$$

posto dunque  $S(1) = \varepsilon(x)$ , viene

$$S(t) = (\lambda(x) + x) \varepsilon(x), \dots S(t^n) = (\lambda(x) + x)^n \varepsilon(x)$$

ed essendo  $g(t)$  una serie di potenze di  $t$ ,

$$S(g) = g(\lambda(x) + x) \varepsilon(x),$$

*c. d. d.*

\* 10. Si può proporre la ricerca delle operazioni funzionali commutabili colla derivazione. Queste operazioni formano evidentemente un gruppo. Sia A una tale operazione; posto  $A(1) = \varepsilon(x)$ , verrà per la proprietà ammessa:

$$DA(1) = \varepsilon'(x) = A(o)$$

e supposta l'operazione A ad un valore e quindi  $A(o) = 0$ , risulta  $\varepsilon(x) = c$ , indicando  $c$  una costante. Ne segue

$$A(t) = cx + c_1,$$

come si vede subito applicando la proprietà  $DA = AD$ , indi

$$A(t^2) = \frac{cx^2}{2} + c_1x + c_2;$$

in generale  $A(t^n)$  sarà un polinomo razionale intero in  $x$ , tale che

$$\frac{dA(t^n)}{dx} = nA(t^{n-1}).$$

\* Tali polinomi sono quelli già studiati dal prof. Appell<sup>(1)</sup>, e pertanto l'operazione  $A(g)$  non è altro che quella che egli definisce nel § 12 della citata sua Memoria. Si ottiene dunque questo risultato, che il gruppo delle operazioni funzionali distributive commutabili colla derivazione è il gruppo delle operazioni di Appell<sup>(2)</sup>.

**Matematica.** — *Sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni proiettive in sè stesse.* Nota di GINO FANO, presentata dal Socio CREMONA.

\* Delle superficie (e in particolare delle superficie algebriche) con infinite trasformazioni proiettive in sè stesse si è occupato il sig. Enriques in una Memoria presentata al R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti

(1) Annales de l'École Normale Sup., S. II, T. IX, 1880.

(2) Cfr. la mia Memoria *Sur certaines opérations* etc. Acta Math., T. X, 1887.

nel luglio del 1893 <sup>(1)</sup>; e poco dopo (settembre-ottobre) esciva anche il 3° volume della *Theorie der Transformationsgruppen* del sig. Lie, nella quale (cfr. pp. 190-198) sono determinate tutte le superficie (dello spazio ordinario) che ammettono un gruppo continuo almeno  $\infty^3$  di trasformazioni projective, ed è anche accennata una via per fare l'analoga determinazione nel caso di un gruppo  $\infty^2$ . — In questa Nota io mi propongo di studiare le superficie algebriche di uno spazio qualunque, che ammettono un gruppo continuo (una o più volte infinito) di trasformazioni projective <sup>(2)</sup>, estendendo le diverse considerazioni anche al caso di omografie con punti uniti multipli, e completando così i risultati importantissimi già ottenuti (per lo spazio ordinario) dal sig. Enriques.

1. Sia  $F$  una superficie algebrica appartenente a uno spazio  $S_r$ , la quale ammetta un gruppo continuo  $\infty^1$  di trasformazioni projective. Questo gruppo si potrà ritenere generato da una determinata trasformazione infinitesima <sup>(3)</sup>, e si comporrà quindi di omografie aventi tutte gli stessi punti uniti (punti che potranno essere in numero finito o infinito, tutti distinti, ovvero anche coincidenti in vario modo) <sup>(4)</sup>. Le *trajettorie* dei singoli punti dello spazio  $S_r$ , e in particolare dei punti della superficie  $F$ , saranno *Curve*  $W$  <sup>(5)</sup>; queste ultime contenute in detta superficie. La projectività (più generale) che ha gli stessi punti uniti del gruppo in discorso, e che fa corrispondere fra loro due punti qualunque  $P$  e  $P'$  dello spazio  $S_r$ , muta anche la trajettoria di uno di questi punti in quella dell'altro <sup>(6)</sup>. Se questi due punti stanno in particolare sulla superficie  $F$ , la stessa projectività (supposto che

<sup>(1)</sup> E inserta in quegli Atti, t. IV, serie 7<sup>a</sup>. Cfr. anche la Nota sullo stesso argomento inserta nel successivo t. V (1893-94).

<sup>(2)</sup> Rimane quindi implicitamente compreso anche il caso di un gruppo *misto* di trasformazioni projective (di un gruppo costituito cioè da un numero discreto di schiere continue di tali trasformazioni), perchè fra queste schiere certo una (e una sola) sarebbe di per sè un gruppo (continuo) (cfr. Lie, op. cit., vol. III, p. 180; e anche vol. I, cap. 18). Resterebbe solo da vedere quali fra i gruppi continui che a noi si presenteranno potrebbero essere opportunamente ampliati (*erweitert*).

<sup>(3)</sup> Infatti il gruppo delle trasformazioni projective di uno spazio qualunque, che mutano in sè una data superficie contenuta in questo spazio, si compone evidentemente di trasformazioni a due a due inverse, e contiene perciò la trasformazione identica. Se è continuo, esso si potrà dunque generare con trasformazioni infinitesime (cfr. Lie, op. cit., vol. I, p. 75); se è misto, vi sarà, fra le diverse schiere che lo compongono, un gruppo (di trasformazioni a due a due inverse) generabile in questo modo (loc. cit., pp. 315-16).

<sup>(4)</sup> I gruppi continui  $\infty^1$  di trasformazioni projective dello spazio  $S_r$  furono già da tempo ridotti ad alcuni tipi fondamentali, nei casi di  $r=1$  e  $r=2$  (cfr. Lie, op. cit., vol. III; opp. Lie-Scheffers, *Vorlesungen über continuirliche Gruppen...*; Leipzig, 1893). Per  $r=3$ , la riduzione (a 13 tipi) fu data recentemente dal prof. Pittarelli (Ann. di Mat., ser. 2<sup>a</sup>, t. XXII).

<sup>(5)</sup> Cfr. Klein-Lie, *Compt. Rend.*, t. LXX (1870); e *Math. Ann.*, vol. IV, p. 50-84.

<sup>(6)</sup> Cfr. Klein-Lie, *Compt. Rend.*, t. LXX, p. 1226.

muti precisamente P in P') dovrà mutare F in una superficie algebrica contenente la traiettoria di P'. Ma se le diverse traiettorie sono curve trascendenti, se cioè è *trascendente* il gruppo  $\infty^1$  proposto (secondo la denominazione usata dal sig. Enriques: Mem. cit., p. 5) è chiaro che nessuna di queste curve potrà stare su due diverse superficie algebriche; epperò la proiettività considerata dovrà anch'essa mutare F in sè medesima. E poichè i punti P e P' sono affatto arbitrari, se ne trae facilmente che:

« Se una superficie algebrica (appartenente a uno spazio qualsiasi) ammette un gruppo continuo  $\infty^1$  TRASCENDENTE di trasformazioni projective, essa ammetterà anche un intero gruppo transitivo  $\infty^2$  di tali trasformazioni, tutte fra loro permutabili (aventi cioè gli stessi punti uniti di quel gruppo  $\infty^1$ ).

« 2. Nello spazio  $S_3$ , queste superficie sono *superficie W* di Klein-Lie (Compt. Rend., t. LXX). In uno spazio superiore  $S_r$ , sarebbero superficie proiettantisi in queste da ogni  $S_{r-4}$  che sia unito per le  $\infty^2$  omografie. Ma se le traiettorie considerate poc' anzi sono effettivamente trascendenti, queste superficie non potranno essere algebriche che nel solo caso in cui i punti uniti siano tutti distinti (o meglio, formino un gruppo *appartenente* allo spazio  $S_r$  — non contenuto cioè in uno spazio inferiore —) (1).

« D'altra parte, se il gruppo  $\infty^1$  proposto è *algebrico*, se sono cioè algebriche, quindi *razionali*, le diverse traiettorie, la superficie F conterrà un fascio di curve razionali (senza però che sia necessariamente razionale il fascio). Ma se i punti uniti delle  $\infty^1$  omografie sono in numero finito, essi saranno o ancora tutti distinti (e indipendenti), oppure tutti coincidenti (e le traiettorie saranno in quest'ultimo caso curve normali di ordine  $r$ ); se vi sono infiniti punti, e quindi anche infiniti iperpiani e spazi inferiori uniti, bisognerà ancora che i diversi *spazi di punti uniti* o siano tutti distinti (e perciò indipendenti), oppure a due a due *si appartengano* (ciascuno di essi contenga cioè quelli di dimensione inferiore, e sia contenuto in quelli di dimen-

(1) Infatti, per  $r=3$ , i sigg. Klein e Lie hanno osservato (Compt. Rend., t. LXX, p. 1223) che le equazioni di queste superficie si ottengono collo stabilire un'equazione lineare fra certe funzioni delle coordinate, caratterizzate dal comportarsi additivamente rispetto alle omografie del gruppo  $\infty^2$ , e che sono o funzioni algebriche, o logaritmi di tali funzioni (e precisamente di rapporti fra quelle funzioni lineari che, eguagliate a zero, rappresenterebbero le facce del tetraedro unito). L'equazione risultante non potrà dunque essere algebrica che quando dette funzioni siano o tutte algebriche, o tutte logaritmi. Ma nel primo di questi due casi le traiettorie dei diversi sottogruppi  $\infty^1$  si trovano essere curve algebriche, e precisamente cubiche sghembe, coniche, o rette (cfr. Pittarelli, l. c., § 2, nn. 5, 9, 11, 13), mentre il secondo caso si presenta appunto quando vi sono quattro punti uniti distinti e indipendenti. E se  $r>3$ , dovrà presentarsi il caso analogo per tutte le omografie subordinate nelle forme  $\infty^2$  di iperpiani che hanno per assi i di versi  $S_{r-4}$  uniti, sicchè qui pure si verificherà quanto sopra abbiamo asserito.

sione superiore — e, in particolare, coincida con quelli di eguale dimensione —) (1).

\* Riassumendo dunque, abbiamo: *I soli gruppi continui proiettivi semplicemente infiniti di uno spazio  $S_r$ , che possono trasformare in sè stessa una superficie algebrica appartenente a questo spazio, sono quelli in cui i diversi spazi di punti uniti (o in particolare i diversi punti uniti, se questi sono in numero finito) sono tutti indipendenti (distinti — formano cioè un sistema appartenente ad  $S_r$  —), oppure a due a due si appartengono (sono tutti coincidenti). In quest'ultimo caso il gruppo è certamente algebrico; nel primo caso può essere trascendente, ma allora la superficie ammetterà tutto un gruppo transitivo  $\infty^2$  di omografie permutabili.*

\* Queste superficie con  $\infty^2$  trasformazioni proiettive in sè stesse si potranno proiettare su di ogni  $S_3$ , che sia unito per dette trasformazioni, in superficie di equazione:

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_4} = \text{Cost.}$$

dove  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$ , e i diversi esponenti  $\alpha$  sono proporzionali a numeri interi (e si possono ritenere anzi essi stessi interi). Dette superficie sono anche *razionali* (cfr. Enriques, l. c., pp. 13 e 33).

\* Invece sulle superficie con un gruppo algebrico  $\infty^1$  di trasformazioni

(1) Se i punti uniti sono in numero finito (e le traiettorie appartengono perciò allo spazio  $S_r$ ) questo segue dalle note proprietà delle curve razionali con infinite trasformazioni proiettive in sè stesse (cfr. ad es. la mia Nota, *Sopra certe curve razionali...*; questi Rend. p. 51 e seg.). Se invece le traiettorie sono contenute in spazi inferiori  $S_k$  ( $k < r$ ), bisognerà analogamente che in ciascuno di questi  $S_k$  vi siano  $k+1$  punti uniti o tutti distinti (e indipendenti), o tutti coincidenti. Nel primo caso, al variare dello spazio  $S_k$ , varieranno alcuni almeno dei  $k+1$  punti doppi in altrettanti spazi di punti uniti; e il gruppo di questi stessi spazi, compresi eventualmente quei punti fra i  $k+1$  che risultassero fissi, dovrà certo appartenere allo spazio  $S_r$ , perchè, se fosse contenuto in uno spazio inferiore, in questo dovrebbe anche esser contenuta la varietà costituita dagli  $\infty^1$  spazi  $S_k$ , e quindi la superficie  $F$ , la quale invece si è supposta appartenere allo spazio  $S_r$ . Se invece in ogni  $S_k$  i  $k+1$  punti doppi coincidono (le traiettorie sono quindi curve normali di ordine  $k$ ), per le diverse posizioni di quest'unico punto unito (forse variabile da un  $S_k$  all'altro) passerà un sistema di spazi di punti uniti, che a due a due si apparterranno; ma non potrà all'infuori di questi esservene nessun altro, perchè se no la varietà degli  $\infty^1$  spazi  $S_k$  sarebbe contenuta nello spazio conjugato di quest'uno, e non potrebbe quindi la superficie  $F$  appartenere ad  $S_r$ . L'equazione (di grado  $r+1$ ), che si ha eguagliando a zero il determinante caratteristico di un'omografia generale del gruppo, dovrà dunque esser tale che ogni sua radice  $h^{p1a}$  annulli anche i minori di ordine  $r-h+2$  di questo determinante, oppure dovrà avere essa stessa una sola radice  $(r+1)^{p1a}$ . Per la stessa omografia generale, il simbolo di Segre (Mem. di quest'Acc., ser. 3<sup>a</sup>, vol. XIX) sarà costituito o da sole cifre 1, o da cifre qualunque riunite in un sol gruppo; quello di Predella (Ann. di Mat., ser. 2<sup>a</sup>, t. XVII) da cifre qualunque, ma non riunite a gruppi, oppure anche tutte riunite in un sol gruppo.

proiettive le traiettorie saranno curve razionali, su ciascuna delle quali saranno noti razionalmente uno o (ciascuno di) due punti: i punti uniti comuni alle  $\infty^1$  proiettività su di esse. (Anzi, se le collineazioni considerate in  $S_3$  non hanno infiniti punti doppi, questi punti saranno gli stessi per tutte le traiettorie). In forza dei risultati ottenuti dal sig. Noether <sup>(1)</sup>, queste superficie saranno dunque riferibili *birazionalmente* a superficie rigate, o in particolare a cono (se già esse non sono tali) <sup>(2)</sup>. Concludiamo perciò:

« *Le superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo  $\infty^1$  di trasformazioni proiettive sono tutte razionali, rigate, o riferibili a rigate* <sup>(3)</sup>.

« 3. Passiamo alle superficie (algebriche) con un gruppo continuo  $\infty^2$  di trasformazioni proiettive. Anche a queste si applicherà naturalmente il risultato testè ottenuto per le superficie con un gruppo  $\infty^1$  di tali trasformazioni. In particolare dunque, queste superficie saranno certo razionali, se fra le  $\infty^2$  trasformazioni ve ne sono  $\infty^1$  formanti un (sotto)gruppo trascendente. Che se poi i sottogruppi  $\infty^1$  sono tutti algebrici, e il gruppo proposto si suppone *transitivo*, la rigata a cui la superficie potrebbe riferirsi (se già non è tale) conterrebbe, oltre le generatrici, infinite curve razionali, e sarebbe perciò essa stessa razionale. Dunque:

« *Le superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo (due o più volte infinito) di trasformazioni proiettive in sè stesse sono tutte razionali* <sup>(4)</sup>.

<sup>(1)</sup> Cfr. la Mem.: *Ueber Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzen* (Math. Ann., vol. III, p. 161-227).

<sup>(2)</sup> Ad es., se le traiettorie sono curve razionali normali, e le  $\infty^1$  proiettività su di esse hanno i due punti doppi coincidenti, basterà costruire una rigata le cui generatrici siano riferibili biunivocamente al sistema delle stesse traiettorie (il che è possibile in infiniti modi), e proiettare poi ciascuna traiettoria sulla generatrice corrispondente da uno spazio osculatore di opportuna dimensione nell'unico punto unito.

<sup>(3)</sup> Per lo spazio ordinario, e nel caso di omografie coi punti uniti distinti, questo stesso risultato era stato ottenuto appunto dal sig. Enriques (Mem. cit., pp. 13-15).

<sup>(4)</sup> Le superficie di uno spazio qualunque  $S_n$  con gruppo *intransitivo*, due o più volte infinito, di trasformazioni proiettive contengono come traiettorie un sistema  $\infty^1$  di curve razionali normali, appartenenti, come è facile riconoscere, a spazi inferiori (perchè le omografie di un sottogruppo  $\infty^1$  generico devono avere certo infiniti punti doppi, quindi anche infiniti iperpiani uniti, nei quali le singole traiettorie dovranno esser contenute). Nello spazio  $S_3$  queste superficie si riducono ai soli cono (i quali ammettono un gruppo  $\infty^4$  di omologie, gruppo che è appunto intransitivo) e alle quadriche (che ammettono due gruppi intransitivi  $\infty^3$  di trasformazioni proiettive, ciascuno dei quali muta in sè stesse tutte le generatrici di un dato sistema — va da sè però che questi due sono contenuti in uno stesso gruppo più ampio ( $\infty^3$  e transitivo —). Nello spazio  $S_4$  vi è ad es. la rigata cubica, che ammette un gruppo intransitivo  $\infty^3$  di omografie aventi in generale il simbolo [(11)(111)] secondo Segre, ovvero [12] secondo Predella; e così via. E dalle rigate si possono anche ottenere altre superficie che ammettono un gruppo intransitivo di omografie.

- Fermiamoci ora sul caso di sole  $\infty^2$  trasformazioni projective. Se i punti uniti di queste omografie sono tutti fissi (le omografie quindi fra loro permutabili) avremo, nello spazio ordinario, la superficie  $W$  di Klein-Lie; negli spazi superiori, superficie di cui queste possono considerarsi come proiezioni. Ma abbiamo già veduto (cfr. la 1<sup>a</sup> nota al n. 2) che, fra le possibili disposizioni dei punti uniti, non vi sono che alcuni casi determinati, in cui queste superficie possono essere algebriche (1).

- Se invece qualcuno dei punti uniti (che supporremo per il momento in numero finito) è variabile, esso descriverà una certa linea, trasformata in sè stessa dalle  $\infty^2$  omografie del gruppo proposto (quindi una retta, o una curva razionale normale di ordine  $\leq r^{(2)}$  — supposto che si tratti di superficie appartenente a uno spazio  $S_r$ —); e quel punto sarà in ogni sua posizione unito per le omografie di un sottogruppo  $\infty^1$  contenuto nel gruppo proposto. Ma, se questo sottogruppo è trascendente, la superficie considerata, supposta algebrica, dovrà ammettere tutto un gruppo  $\infty^2$  di omografie permutabili, con quegli stessi punti uniti; complessivamente dunque, infiniti gruppi  $\infty^2$  formanti una serie continua, e perciò almeno  $\infty^3$  trasformazioni projective. Volendo dunque restare nel caso di sole  $\infty^2$  omografie, ciascuno di quei sottogruppi  $\infty^1$  dovrà essere algebrico, e avrà perciò i punti uniti o tutti distinti, o tutti coincidenti. Ma anche quest'ultimo caso è da escludersi, perchè uno almeno dei punti uniti deve essere fisso (e allora si ricadrebbe nel caso dei punti uniti fissi, tutti coincidenti); rimane dunque il solo caso dei punti uniti distinti.

- Nessuna difficoltà poi nel caso in cui vi siano, per ogni trasformazione del gruppo, infiniti punti uniti (omografie assiali, ecc.). Se i punti uniti variabili sono isolati, si può ripetere ancora lo stesso ragionamento. Se invece vi è un  $S_k$  di punti uniti variabile, esso descriverà una serie razionale  $\infty^1$  di  $S_k$ , sulla quale le  $\infty^2$  omografie del gruppo opereranno come sui punti di una curva. Vi dovrà dunque essere un  $S_k$  unito fisso, comune alle  $\infty^2$  trasformazioni, e distinto perciò (in un'omografia generale) da quello

applicando ad esse trasformazioni *birazionali*, le quali mutino il gruppo di omografie relativo alla rigata in un gruppo di omografie dello spazio a cui appartiene la nuova superficie (e per questo è necessario e sufficiente che le omografie considerate nel primo spazio mutino in sè stesso il sistema lineare di curve segato sulla rigata dalle varietà che corrispondono agli iperpiani del secondo spazio).

(1) È notevole, nello spazio ordinario, il caso di un solo punto unito (quadruplo); troviamo allora la rigata cubica colle due direttrici rettilinee infinitamente vicine (cfr. Klein-Lie, Compt. Rend., t. LXX, p. 1224). Sappiamo però che questa superficie (rigata di Cayley) ammette tutto un gruppo  $\infty^2$  di trasformazioni projective (cfr. Lie, op. cit., vol. III, p. 196; Enriques, Atti Ist. Ven., ser. 7<sup>a</sup>, t. V).

(2) E su questa retta o curva razionale vi dovrà sempre essere anche un punto unito fisso, comune cioè a tutte le  $\infty^2$  omografie (cfr. Enriques, Mem. cit., p. 18).



variabile; e ciò richiede appunto (i sottogruppi  $\infty^1$  dovendo qui pure essere algebrici) che il sistema di tutti i punti uniti appartenga allo spazio  $S_r$  (cfr. n. 2).

« Concludiamo dunque: *Se una superficie algebrica appartenente a uno spazio qualsiasi ammette un gruppo  $\infty^2$  (e non più) di trasformazioni proiettive a punti uniti variabili (ovvero anche: se ammette un gruppo  $\infty^2$  di trasformazioni proiettive, e non è una superficie  $W$  o una delle superficie analoghe negli spazi superiori), un'omografia generale di questo gruppo dovrà sempre avere i punti doppi tutti distinti (o, più generalmente, il gruppo costituito da questi punti doppi, in numero finito o infinito, dovrà sempre appartenere allo stesso spazio della superficie proposta).*

« Il solo caso possibile è dunque l'analogo di quello che il sig. Enriques ha già trattato per  $r=3$ , e non sarebbe difficile estendere le sue considerazioni a uno spazio superiore qualsiasi (vi sarebbe solo, naturalmente, un numero corrispondentemente maggiore di casi da esaminare) (1). Per  $r=3$  quindi, tutte le superficie algebriche con (sole)  $\infty^2$  trasformazioni proiettive rientrano nelle categorie seguenti (Mem. cit., p. 44):

a) *Superficie di Klein-Lie;*

b) *Rigate (di ordine  $\geq 4$ ) con due direttrici rettilinee infinitamente vicine;*

c) *Superficie contenenti un fascio di coniche, segate dai piani per una retta;*

d) *Superficie di 6° ordine a sezioni ellittiche, rappresentabili sul piano con un sistema lineare di cubiche aventi a comune un flesso e la relativa tangente.*

« 4. Le superficie dello spazio ordinario con  $\infty^3$  o più trasformazioni proiettive sono state già determinate tutte nell'op. cit. del sig. Lie e nella Memoria del sig. Enriques (compresa la Nota successiva cit.). Astrazione fatta dal piano e dai conici (che ammettono tutti almeno  $\infty^4$  trasformazioni omologiche), non vi sono che le tre superficie seguenti:

a) *Sviluppabile (di 4° ordine) circoscritta a una cubica sghemba;*

b) *Rigata cubica di Cayley;*

entrambe con  $\infty^3$  trasformazioni proiettive; e infine:

(1) Bisognerebbe però limitarsi, per il momento, alle sole superficie algebriche, mentre le ricerche del sig. Enriques, nel caso di almeno  $\infty^2$  trasformazioni proiettive, comprendono anche le superficie trascendenti. Però il gruppo  $\infty^2$  di omografie che si considera deve sempre avere qualche punto unito fisso, e da questo punto (o dal sistema di questi punti) la superficie proposta si potrà proiettare in altra di uno spazio inferiore, che ammetterà pure  $\infty^2$  trasformazioni proiettive. E questa considerazione, che qui non intendo sviluppare, ma che certo deve riescire assai utile, permetterebbe di comprendere nella ricerca anche le superficie trascendenti (prendendo le mosse dai casi già noti nello spazio ordinario).



c) *La quadrica (superficie di 2° ordine)*, con  $\infty^6$  trasformazioni proiettive in sè stessa.

• Per uno spazio qualunque  $S_3$ , la ricerca analoga riuscirebbe piuttosto lunga, essendo molti i casi che possono presentarsi. Così p. e. è chiaro, che le diverse superficie rappresentabili sul piano col sistema lineare di tutte le curve di un dato ordine qualsiasi, devono ammettere tutte un gruppo continuo  $\infty^8$  di trasformazioni proiettive.

• Abbiamo veduto però (cfr. n. 3) che ogni superficie algebrica, la quale ammetta un gruppo continuo transitivo di trasformazioni proiettive, si può rappresentare sul piano; e in questa rappresentazione le sue sezioni piane daranno luogo a un sistema lineare di curve algebriche, che verrà trasformato in sè stesso da un certo gruppo continuo di trasformazioni *Cremoniane*. Inversamente, ogni sistema lineare almeno  $\infty^3$  di curve algebriche piane, che sia unito rispetto a un gruppo continuo di trasformazioni Cremoniane, potrà assumersi come rappresentante di una superficie algebrica (razionale) con un gruppo continuo di trasformazioni proiettive in sè stessa.

• Il sig. Enriques ha dimostrato (1) che i gruppi continui di trasformazioni Cremoniane (dipendenti da un numero finito di parametri) possono ridursi birazionalmente a uno dei *tipi* seguenti:

1°) Gruppo  $\infty^8$  delle omografie, e suoi sottogruppi;

2°) Gruppo  $\infty^6$  delle trasformazioni quadratiche che mutano in sè due fasci di raggi (ovvero: gruppo delle inversioni rispetto ai cerchi del piano), e suoi sottogruppi;

3°) Gruppo  $\infty^{n+5}$  (con  $n$  arbitrario) delle trasformazioni di Jonquière (d'ordine  $n$ ) che mutano in sè il sistema lineare  $\infty^{n+1}$  delle curve d'ordine  $n$  con un punto base  $(n-1)^{plo}$  e le  $n-1$  tangenti fisse, e suoi sottogruppi.

• Possiamo dunque dire, in generale, che ogni gruppo continuo transitivo di trasformazioni proiettive, il quale muti in sè stessa una superficie algebrica, deve essere SIMILE a un gruppo di omografie nel piano, oppure a un gruppo di omografie che muta in sè stessa una quadrica dello spazio  $S_3$ , o un cono razionale normale di uno spazio qualsiasi.

• Fra questi gruppi, quelli che rientrano nei primi due casi sono già stati tutti assegnati e più volte studiati. Del gruppo 3°) (gruppo  $\infty^{n+5}$  di trasformazioni di Jonquière) lo stesso sig. Enriques ha assegnata la *composizione* in una Nota successiva (2), dimostrando in particolare ch'esso contiene *tre* (e tre soli) sottogruppi eccezionali (di cui uno  $\infty^{n+2}$  composto di sole omologie, e un altro  $\infty^{n+1}$  composto di sole omologie speciali) \*.

(1) Cfr. questi Rend., vol. II, 1° sem., p. 468.

(2) Ibid., p. 532.