ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IV.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

Matematica. — *Su un sistema di equazioni a derivate parziali del 2° ordine.* Nota del dott. ONORATO NICCOLETTI, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

« I metodi di Picard e di Riemann per l'integrazione dell'equazione lineare del 2° ordine a caratteristiche reali e distinte si estendono ai sistemi della forma:

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 z_i}{\partial x\,\partial y}+\sum_k a_{ik}\frac{\partial z_k}{\partial x}+\sum_k b_{ik}\frac{\partial z_k}{\partial y}+\sum_k c_{ik}\,z_k=0\quad (i,k=1,2...n)$$

dove i coefficienti a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} soddisfano nel campo che si considera, alle solite condizioni di continuità.

« L'estensione del metodo di Picard delle approssimazioni successive si ottiene subito applicando i criteri fondamentali sviluppati da Picard nella sua Memoria del 1890; basterà quindi enunciarne i risultati. Si può osservare soltanto che il metodo del Picard può essere reso più semplice, dal fatto che le serie di funzioni, che il Picard considera e delle quali dimostra la convergenza solo in un certo rettangolo, convergono invece in tutto il campo dove i coefficienti rimangono finiti e continui, come si ha confrontandole, invece che con una progressione geometrica, con un'altra serie convergente in tutto il piano, affatto analogamente a quello che ha osservato il Lindelöf pel caso di una sola variabile. Posto ciò, abbiamo i due teoremi fondamentali:

« *Teorema* 1°. Se nel campo considerato si descrive una curva C che sia incontrata in un sol punto da ogni parallela agli assi coordinati, esiste uno ed un sol sistema di funzioni $z_1\,z_2\ldots z_n$ integrali delle (1), tali che le loro derivate prime $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z_i}{\partial y}$ prendono lungo la curva C valori dati ad arbitrio, purchè continui, e che di più in un punto della curva C prendono valori assegnati.

« *Teorema* 2°. Se la curva C è invece formata di due tratti rettilinei paralleli agli assi coordinati, esiste uno ed un solo sistema di funzioni $z_1\ldots z_n$ integrali delle (1), che prendono sui due tratti rettilinei delle catene arbitrarie (continue) di valori, i quali si attacchino con continuità nel punto comune ai due tratti rettilinei, e queste funzioni z_i sono allora definite in tutto il rettangolo limitato dai due tratti rettilinei.

« Il metodo delle approssimazioni successive, dimostra soltanto l'esistenza, non l'unicità del sistema integrale. L'unicità risulterà dall'estensione del metodo di Riemann.

« 2. Moltiplichiamo perciò i primi membri delle (1) per n funzioni $u_1\, u_2 \ldots\, u_n$ e quindi sommiamo per tutti i valori dell'indice i. Avremo

$$(2) \qquad \sum_i u_i \frac{\partial^2 z_i}{\partial x\, \partial y} + \sum_{ik} a_{ik}\, u_i \frac{\partial z_k}{\partial x} + \sum_{ik} b_{ik}\, u_i \frac{\partial z_k}{\partial y} + \sum_{ik} c_{ik}\, u_i\, z_k = 0.$$

« Se si cerca di porre il primo membro delle (2) sotto la forma

$$(3) \qquad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial y}$$

dove M ed N sono funzioni lineari omogenee delle z_i, $\frac{\partial z_i}{\partial x}, \frac{\partial z_i}{\partial y}$

$$\mathrm{M} = \sum_i \left(\beta_i \frac{\partial z_i}{\partial y} + \gamma_i\, z_i\right); \qquad \mathrm{N} = \sum_i \left(\alpha_i \frac{\partial z_i}{\partial x} + \delta_i\, z_i\right)$$

si trovano come condizioni necessarie e sufficienti

$$(4) \qquad \alpha_i + \beta_i = u_i\,; \quad \gamma_i + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} = \sum_k a_{ki}\, u_k\,; \quad \delta_i + \frac{\partial \beta_i}{\partial x} = \sum_k b_{ki}\, u_k\,;$$
$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial x} + \frac{\partial \delta_i}{\partial y} = \sum_k c_{ki}\, u_k.$$

Prendendo in particolare $\alpha_i = \beta_i = \frac{1}{2} u_i$, si ha

$$\gamma_i = \sum_k a_{ki}\, u_k - \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial y}\,; \qquad \delta_i = \sum_k b_{ki}\, u_k - \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x}$$

e l'ultima delle (4) dà per le u_i il sistema di equazioni lineari

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 u_i}{\partial x\, \partial y} - \sum_k a_{ki} \frac{\partial u_k}{\partial x} - \sum_k b_{ki} \frac{\partial u_k}{\partial y} + \sum_k \left(c_{ki} - \frac{\partial a_{ki}}{\partial x} - \frac{\partial b_{ki}}{\partial y}\right) u_k = 0$$

e corrispondentemente si hanno per M ed N i valori

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{M} &= \sum_{ik} a_{ki}\, u_k\, z_i + \frac{1}{2} \sum_i \left(u_i \frac{\partial z_i}{\partial y} - z_i \frac{\partial u_i}{\partial y}\right) \\ \mathrm{N} &= \sum_{ik} b_{ki}\, u_k\, z_i + \frac{1}{2} \sum_i \left(u_i \frac{\partial z_i}{\partial x} - z_i \frac{\partial u_i}{\partial x}\right). \end{aligned} \right.$$

« Il sistema (5) si dirà *l'aggiunto* del sistema (1): come è chiaro dal modo di costruzione, la relazione tra i due sistemi (1) e (5) è involutoria; uno dei due sistemi (1) e (5) è l'aggiunto dell'altro.

« 3. Applichiamo queste formule ad una nuova dimostrazione del 1° teorema. Sia perciò A il punto in cui si vogliono calcolare gli integrali z_i e ABC il triangolo curvilineo che si ottiene conducendo dal punto A le parallele AB, AC agli assi x ed y fino ad incontrare la curva C.

« Se le funzioni z_i soddisfano alle (1) e le u_i sono un sistema integrale particolare delle (5), sarà

$$\int_{\mathrm{ACBA}} (\mathrm{M}dy - \mathrm{N}dx) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}} \mathrm{M}dy + \int_{\text{arco CB}} (\mathrm{M}dy - \mathrm{N}dx) - \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} \mathrm{N}dx = 0.$$

Ora per le (6)

$$\int_A^C \mathrm{M}dy = \frac{1}{2}\sum_i (u_i z_i)_C - \frac{1}{2}\sum_i (u_i z_i)_A - \int_A^C \sum_i z_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} - \sum_k a_{ki} u_k\right) dy$$

$$-\int_B^A \mathrm{N}dx = \frac{1}{2}\sum_i (u_i z_i)_B - \frac{1}{2}\sum_i (u_i z_i)_A + \int_B^A \sum_i z_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} - \sum_k b_{ki} u_k\right) dx$$

dove si è indicato in generale con φ_P il valore della funzione φ nel punto P.

« Quindi se le funzioni u_i sono state determinate in modo che sia

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial x} - \sum_k b_{ki} u_k = 0 & \text{lungo il tratto AB} \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial y} - \sum_k a_{ki} u_k = 0 & \text{lungo il tratto AC} \end{cases}$$

(il che è possibile mediante il metodo delle approssimazioni successive) si ha la formula notevolissima

$$(8) \qquad \sum_i (u_i z_i)_A = \frac{1}{2}\left\{\sum_i (u_i z_i)_C + \sum_i (u_i z_i)_B\right\} + \int_{\text{arco CB}} (\mathrm{M}dy - \mathrm{N}dx).$$

Ne segue che se si determinano n sistemi integrali delle (5)

$$(9) \qquad u_{11},\, u_{12} \,\ldots\ldots\, u_{1n}\,;\quad u_{21},\, u_{22} \,\ldots\ldots\, u_{2n}\,;\, \ldots\ldots\,;\, u_{n1}\, u_{n2} \,\ldots\ldots\, u_{nn}$$

(il primo indice riferendosi al sistema integrale, il secondo alle funzioni) che soddisfino alle condizioni (7) e che prendano nel punto A valori, il cui determinante sia diverso da zero, avremo le formule

$$(10) \qquad \sum_i (u_{ri} z_i)_A = \frac{1}{2}\left\{\sum_i (u_{ri} z_i)_C + \sum_i (u_{ri} z_i)_B\right\} + \int_{\text{arco CB}} (\mathrm{M}_r dy - \mathrm{N}_r dx)$$

dove

$$\begin{cases} \mathrm{M}_r = \sum_{ik} a_{ki} u_{rk} z_i + \dfrac{1}{2}\sum_i \left(u_{ri}\dfrac{\partial z_i}{\partial y} - z_i \dfrac{\partial u_{ri}}{\partial x}\right) \\ \mathrm{N}_r = \sum_{ik} b_{ki} u_{rk} z_i + \dfrac{1}{2}\sum_i \left(u_{ri}\dfrac{\partial z_i}{\partial x} - z_i \dfrac{\partial u_{ri}}{\partial x}\right) \end{cases}$$

e l' indice r prende tutti i valori da 1 fino ad n.

« E poichè in questa ipotesi i secondi membri delle (10) contengono tutte quantità conosciute e le (10) stesse possono risolversi rispetto alle z_{iA}, otteniamo di nuovo la dimostrazione del 1° teorema già accennato. Di qui risulta anche l'unicità delle funzioni z_i, integrali delle (1), che soddisfano alle condizioni iniziali assegnate.

« Le funzioni u_{rs}, dovendo soddisfare lungo i tratti rettilinei AB, AC alle condizioni (7), sono determinate in modo unico quando ne siano assegnati i valori nel punto A, il cui determinante deve essere diverso da zero. Per un tal sistema di valori iniziali può prendersi il seguente:

$$1,\ 0,\ 0 \dots 0\ ;\quad 0,\ 1,\ 0 \dots 0\ ; \dots\dots\ ; 0,\ 0 \dots 0,\ 1.$$

« Le funzioni u_{rs} corrispondenti si diranno formare *un sistema di soluzioni principali del sistema aggiunto, relative al punto* A. Se le u_{rs} formano un tale sistema, le formule (10) prendono la forma semplice:

$$z_{rA} = \frac{1}{2}\left\{\sum_i (u_{ri}\, z_i)_B + \sum_i (u_{ri}\, z_i)_C\right\} + \int_{\text{arco CB}} (M_r\, dy - N_r\, dx). \tag{10'}$$

« Con ciò l'integrazione del sistema (1) colle condizioni iniziali espresse dal 1° teorema, è ricondotta alla risoluzione di un caso particolare del 2° problema pel sistema aggiunto, alla determinazione cioè delle soluzioni principali, la cui esistenza è provata dal metodo di Picard. A questo caso si può anche ricondurre la risoluzione del 2° problema, quando cioè siano assegnati i valori delle funzioni z_i lungo due tratti rettilinei paralleli agli assi coordinati.

« 4. Supponendo infatti che l'arco CB si riduca a due tratti rettilinei CD, DB paralleli agli assi coordinati x ed y, avremo conservando le notazioni antecedenti

$$z_{iA} = \frac{1}{2}\left\{\sum_\mu (u_{i\mu}\, z_\mu)_C + \sum_\mu (u_{i\mu}\, z_\mu)_B\right\} - \int_C^D N_i\, dx + \int_D^B M_i\, dy.$$

Ora potendosi anche scrivere M_i ed N_i sotto la forma

$$\begin{cases} M_i = -\dfrac{1}{2}\sum_\mu \dfrac{\partial}{\partial y}(u_{i\mu}\, z_\mu) + \sum_\mu u_{i\mu}\left(\dfrac{\partial z_\mu}{\partial y} + \sum_\nu a_{\mu\nu}\, z_\nu\right) \\[2ex] N_i = -\dfrac{1}{2}\sum_\mu \dfrac{\partial}{\partial x}(u_{i\mu}\, z_\mu) + \sum_\mu u_{i\mu}\left(\dfrac{\partial z_\mu}{\partial x} + \sum_\nu b_{\mu\nu}\, z_\nu\right) \end{cases}$$

sarà

$$-\int_C^D N_i\, dx = \frac{1}{2}\left\{\sum_\mu (u_{i\mu}\, z_\mu)_D - \sum_\mu (u_{i\mu}\, z_\mu)_C\right\} + \int_D^C \left\{\sum_\mu u_{i\mu}\left(\frac{\partial z_\mu}{\partial x} + \sum_\nu b_{\mu\nu}\, z_\nu\right)\right\} dx$$

$$\int_D^B M_i\, dy = \frac{1}{2}\left\{\sum_\mu (u_{i\mu}\, z_\mu)_D - \sum_\mu (u_{i\mu}\, z_\mu)_B\right\} + \int_D^B \left\{\sum_\mu u_{i\mu}\left(\frac{\partial z_\mu}{\partial y} + \sum_\nu a_{\mu\nu}\, z_\nu\right)\right\} dy$$

e quindi anche

$$z_{iA} = \sum_\mu (u_{i\mu}\, z_\mu)_D - \int_C^D \left\{\sum_\mu u_{i\mu}\left(\frac{\partial z_\mu}{\partial x} + \sum_\nu b_{\mu\nu}\, z_\nu\right)\right\} dx - \tag{11}$$

$$-\int_B^D \left\{\sum_\mu u_{i\mu}\left(\frac{\partial z_\mu}{\partial y} + \sum_\nu a_{\mu\nu}\, z_\nu\right)\right\} dy$$

le quali formole risolvono esplicitamente il secondo problema e dimostrano l'unicità degli integrali anche in questo caso.

« Si deduce di qui una conseguenza interessante. Indichiamo perciò con $(x_0\, y_0)$ le coordinate del punto A, con $(x_1\, y_1)$ quelle del punto D e determiniamo quindi n sistemi integrali delle (1)

$$(12) \qquad z_{11}\,,\, z_{12} \ldots\ldots z_{1n}\,;\; z_{21}\,,\, z_{22} \ldots\ldots z_{2n}\,;\ldots,\ldots\,;\; z_{n1}\, z_{n2} \ldots\ldots z_{nn}\,;$$

(il primo indice riferendosi al sistema integrale, il secondo alle funzioni) le quali siano determinate da condizioni affatto analoghe, rispetto al punto D ed al sistema (1), di quelle a cui soddisfano le soluzioni principali u_{rs} rispetto al punto A e al sistema (5); che sia cioè

$$(13) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z_{hi}}{\partial x} + \sum\limits_{\mu} b_{i\mu}\, z_{h\mu} = 0 & \text{lungo il tratto CD} \\[2ex] \dfrac{\partial z_{hi}}{\partial y} + \sum\limits_{\mu} a_{i\mu}\, z_{h\mu} = 0 & \text{lungo il tratto CB} \end{cases}$$

per tutti i valori degli indici i ed h, e che di più i valori $z_{rs_{\mathrm{D}}}$ delle z_{rs} nel punto D siano uguali ad 1 o a zero, secondochè gli indici r ed s sono uguali o differenti. In tal caso la formula (11) diverrà

$$z_{hi_{\mathrm{A}}} = u_{ih_{\mathrm{D}}}$$

cioè

$$(14) \qquad z_{hi}\,(x_0\,,\, y_0\,;\, x_1\,,\, y_1) = u_{ih}\,(x_1\,,\, y_1\,;\, x_0\,,\, y_0)\,,$$

le due prime lettere indicando le variabili, le due seconde i parametri, cioè le coordinate del punto, rispetto al quale le z_{rs}, u_{sr} sono costruite.

« L'uguaglianza (14) dà il teorema seguente:

« Una qualunque delle soluzioni principali $u_{ih}(x, y\,;\, x_0\,,\, y_0)$ del sistema (5) aggiunto del sistema (1) può riguardarsi altresì come funzione delle coordinate x_0, y_0 del punto rispetto al quale è stata costruita; allora essa è la soluzione principale z_{hi} del sistema primitivo (1), relativa al punto di coordinate x ed y; in altri termini, la definizione delle u_{ih} non cambia, permutando i due sistemi (1) e (5), le variabili x ed y colle x_0, y_0, i primi con i secondi indici.

« Ne segue che la determinazione delle soluzioni principali u_{ih} o z_{hi} porterà con sè l'integrazione del sistema (1) e (5) insieme e quindi in particolare:

« L'integrazione di un sistema e del suo aggiunto sono due problemi equivalenti.

« 5. Consideriamo infine l'esempio

$$(15) \qquad \frac{\partial^2 z_i}{\partial x\, \partial y} = \sum_k c_{ik}\, z_k$$

dove le c_{ik} sono costanti arbitrarie. Il sistema (15) è aggiunto di sè stesso: si riesce di più a determinare per esso le soluzioni principali per mezzo di sviluppi in serie convergenti dovunque a distanza finita.

« Possiamo supporre infatti che il punto, rispetto al quale si vogliano calcolare le soluzioni principali, sia l'origine delle coordinate. Le condizioni (7) diventano allora

$$\frac{\partial u_{hi}}{\partial x} = 0 \quad \text{per} \quad y = 0\,; \qquad \frac{\partial u_{hi}}{\partial y} = 0 \quad \text{per} \quad x = 0$$

e quindi le soluzioni principali u_{hi} sono costanti lungo gli assi coordinati e precisamente uguali ad uno o a zero, secondochè gli indici h ed i sono uguali o differenti. Posto ciò, indicando con $u_{hi}^{(0)}$ i valori iniziali delle u_{hi}, applicando il metodo delle approssimazioni successive, oppure anche direttamente cercando di determinare le soluzioni principali mediante serie di potenze del prodotto $\tau = xy$ delle variabili, si ha

$$(16) \qquad u_{hi} = u_{hi}^{(0)} + c_{ih}\,\tau + \sum_k c_{ik}\,c_{kh}\,\frac{\tau^2}{1^2.\,2^2} + \sum_{kl} c_{ik}\,c_{kl}\,c_{lh}\,\frac{\tau^3}{1^2.\,2^2.\,3^2} + \cdots\cdots$$
$$+ \cdots + \sum_{klm..p} c_{ik}\,c_{kl}\,c_{lm}\ldots c_{ph}\,\frac{\tau^n}{1^2.\,2^2\ldots n^2} + \cdots\cdots$$

dove le costanti $u_{hi}^{(0)}$ sono uguali ad 1 o a zero, secondochè gli indici i e h sono uguali o disuguali: e quindi si hanno appunto le soluzioni principali u_{hi} espresse in serie di potenze di τ che convergono per qualunque valore finito di τ.

« Se in particolare si prendono tutte le c_{ik} uguali tra loro, uguali ad 1, e si pone $\omega = n\tau$, le (16) divengono

$$u_{hi} = u_{hi}^{(0)} + \frac{1}{n}\left\{\frac{\omega}{1} + \frac{\omega^2}{1^2.\,2^2} + \cdots\cdots + \frac{\omega^n}{1^2.\,2^2.\ldots n^2} + \cdots\cdots\right\}$$

e quindi tutte le u_{hi} si esprimono mediante la J_0 di Bessel ».

Matematica. — *Di una formola relativa all' integrale ellittico completo di prima specie, contenuta in una precedente Nota, e di altre a quella affini.* Nota di Davide Besso, presentata dal Socio Beltrami.

Matematica. — *Sulle equazioni differenziali lineari del 4° ordine, che definiscono curve contenute in superficie algebriche.* Nota di Gino Fano, presentata dal Socio Cremona.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.