ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IV.

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 marzo 1895.

A. MESSEDAGLIA Vicepresidente

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Di una formola relativa all' integrale ellittico completo di prima specie, contenuta in una precedente Nota, e di altre a quella affini.* Nota di DAVIDE BESSO, presentata dal Socio BELTRAMI.

« Nella Nota *Sopra alcune equazioni differenziali ipergeometriche* (1) ho avvertito che l'equazione differenziale

$$\xi^2(1-\xi)\frac{d^3U}{d\xi^3}+\xi\left(3-\frac{9}{2}\xi\right)\frac{d^2U}{d\xi^2}+\left(1-\frac{13}{4}\xi\right)\frac{dU}{d\xi}-\frac{1}{8}U=0 \qquad \mathrm{I}$$

è soddisfatta da $K^2(k)$, quando si ponga

$$k=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\xi}}{2}},$$

e che è

$$\frac{4}{\pi^2}K^2(k)=1+\left(\frac{1}{2}\right)^3\xi+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3\xi^2+\dots.$$

« Ho poi osservato che la stessa serie è eguale a

$$\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}K(\sqrt{\xi}\ \mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta,$$

e che in conseguenza è

$$\int_0^1\frac{K(ax)}{\sqrt{1-x^2}}dx=K^2\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{2}}\right) \qquad (1).\ (2)$$

(1) Inserita in questi Rendiconti (vol. III, 2.° sem., fasc. 12, serie 5a).

(2) Ivi è scritto, per errore, a^4 in luogo di a^2.

« Alcune altre formole, affini alla (1), sono qui dimostrate.

« I. L'equazione I si può trasformare nella

$$\frac{d}{d\xi}\left[\xi^2(1-\xi)\frac{d^2U}{d\xi^2}+\left(\xi-\frac{3}{2}\xi^2\right)\frac{dU}{d\xi}-\frac{1}{4}\xi U\right]+\frac{1}{8}U=0$$

dalla quale, ponendo $U=K^2(k)$, e rammentando che è

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2K}{d\xi^2}+\left(1-\frac{3}{2}\xi\right)\frac{dK}{d\xi}-\frac{1}{16}K=0,$$

si ricava

$$\int K^2(k)\,d\xi=\xi K^2(k)-16\,\xi^2(1-\xi)\left(\frac{dK}{d\xi}\right)^2+\text{cost.}$$

e in conseguenza

$$\int_0^{a^2}K^2\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\xi}}{2}}\right)d\xi=a^2K^2(c)-4\,[E(c)-(1-c^2)K(c)]^2 \quad (2)$$

ove è

$$c=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{2}}.$$

« 2. Ora posto

$$\varphi(a)=\int_0^a K(t)\sqrt{a^2-t^2}\,dt,$$

si ha, in forza della (1),

$$\varphi'(a)=a\,K^2\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{2}}\right),$$

dalla quale e dalla (2) risulta

$$\int_0^1 K(ax)\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}K^2(c)-\frac{2}{a^2}[E(c)-(1-c^2)K(c)]^2 \quad (3)$$

e in particolare

$$\int_0^1 K(x)\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}K^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\pi^2}{8K^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \quad (3')$$

« 3. L'equazione differenziale

$$x(1-x^2)y''+(1-3x^2)y'-xy=0$$

soddisfatta dalla $K(x)$, si può mettere nella forma

$$\int y\psi\,dx=x(1-x^2)(y\theta'-y'\theta)+\text{cost.} \quad \text{II}$$

in cui θ significa una funzione arbitraria, ed è

$$\psi=x(1-x^2)\theta''+(1-3x^2)\theta'-x\theta.$$

« Colla posizione

$$\theta = x(1-x^2)^\lambda \quad , \quad y = \mathrm{K}(x),$$

si trova

$$\left.\begin{array}{l} 4(\lambda+1)^2 \int_0^a (1-x^2)^{\lambda+1}\mathrm{K}(x)\,dx \\ -(8\lambda^2+8\lambda+3)\int_0^a (1-x^2)^\lambda \mathrm{K}(x)\,dx + 4\lambda^2 \int_0^a (1-x^2)^{\lambda-1}\mathrm{K}(x)\,dx = \\ = 2a(1-a^2)^\lambda \left[((1-(\lambda+1)a^2)\mathrm{K}(a) - \frac{1}{2}\mathrm{E}(a)\right] \end{array}\right\} \quad (4)$$

« Quando si faccia tendere a ad 1 e si ponga

$$\lambda = \frac{2r+1}{2}\,(r \geqq 0) \quad , \quad \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{2r-1}{2}}\mathrm{K}(x)\,dx = \mathrm{W}_r,$$

si ricava dalla (4)

$$(2r+3)^2\,\mathrm{W}_{r+2} - (8r^2+16r+9)\,\mathrm{W}_{r+1} + (2r+1)^2\,\mathrm{W}_r = 0 \text{ (1)} \quad (5)$$

mediante la quale, e i valori di W_0 e W_1 dati dalle (1) (3'), si potrà calcolare la W_r per ogni valore dell'intero positivo r.

« 4. Colla sostituzione

$$\theta = (1-x^2)^\lambda$$

si ricava dalla II

$$\left.\begin{array}{l} (2\lambda+1)^2 \int_0^a x(1-x^2)^\lambda \mathrm{K}(x)\,dx - 4\lambda^2 \int_0^a x(1-x^2)^{\lambda-1}\mathrm{K}(x)\,dx = \\ = (1-a^2)^\lambda\,[\mathrm{E}(a) + ((2\lambda+1)a^2-1)\mathrm{K}(a)] \end{array}\right\} \quad (6)$$

« Ora mediante la serie

$$\mathrm{K}(ax) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 a^2x^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 a^4x^4 + \dots\right\}$$

(1) Moltiplicando per $\sqrt{1-x^2}$ i due membri della nota relazione

$$\mathrm{K}(x) = \frac{1}{1+x}\mathrm{K}(z) \quad ,$$

nella quale è

$$z = \frac{2\sqrt{x}}{1+x} \quad ,$$

si ottiene

$$\sqrt{1-z^2}\,\mathrm{K}(z) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{K}(x).\right)$$

E da questa, rammentando che è

$$\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{K}(x) < \frac{\pi}{2},$$

risulta

$$\lim\left(\sqrt{1-z^2}\,\mathrm{K}(z)\right)_{z=1} = 0.$$

si ottiene facilmente

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{K}(ax)\,dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{\mathrm{A}r\,\mathrm{sen}a}{a} \tag{7}$$

e in particolare

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{K}(x)\,dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

« Perciò dalla (6) risulterà

$$\int_0^1 x\,(1-x^2)^{\frac{2r-1}{2}} \mathrm{K}(x)\,dx = \left(\frac{1.3\ldots(2r-1)}{2.4\ldots 2r}\right)^2 \frac{\pi^2}{4} \tag{8}$$

Matematica. — *Sulle equazioni differenziali lineari del 4° ordine, che definiscono curve contenute in superficie algebriche.* Nota di GINO FANO, presentata dal Socio CREMONA.

« 1. Dopo aver trattato in due Note precedenti (¹) il caso di un' equazione differenziale lineare (omogenea) di ordine qualunque n, tale che un sistema di integrali indipendenti di essa $y_1, y_2, \ldots y_n$ soddisfacciano a un certo numero ($\geq n-2$) di equazioni algebriche rappresentanti complessivamente una *curva* nello spazio S_{n-1} delle coordinate (projettive) omogenee y_i, mi propongo di studiare adesso il caso in cui le stesse equazioni algebriche (che si dovranno supporre in numero $\geq n-3$) rappresentino una *superficie* di quello spazio; il caso cioè in cui la curva Γ definita dall'equazione differenziale proposta (²), pur essendo trascendente (³), è contenuta in *una* superficie algebrica. In questa prima Nota (e in un' altra successiva) mi occuperò soltanto delle equazioni differenziali lineari del 4° ordine ($S_{n-1} \equiv S_3$), supponendo perciò che quattro soluzioni indipendenti y_1, y_2, y_3, y_4 siano legate da una (ed una sola) equazione algebrica. Per le equazioni differenziali di ordine superiore al quarto mi propongo anche di esporre alcune considerazioni generali, che formeranno probabilmente oggetto di una terza Nota.

« Questo caso che qui mi propongo di studiare non è ancora stato trattato sistematicamente (ch' io sappia almeno) in modo completo (nemmeno per le equazioni differenziali di 4° ordine (⁴)). In Francia, Goursat e Halphen

(¹) Cfr. questi Rend., pp. 18-26 e 51-57.

(²) loc. cit., p. 19.

(³) E tale possiamo supporla, perchè, se fosse algebrica, si ricadrebbe nel caso già trattato nelle mie due Note citate.

(⁴) Per le equazioni differenziali lineari di 3° ordine non si può nemmeno porre la questione analoga, perchè l'esistenza di una sola equazione algebrica fra le soluzioni y_1, y_2, y_3 richiederebbe già che fosse algebrica la stessa curva Γ.