ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IV.

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

si ottiene facilmente

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{K}(ax)\,dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{\mathrm{A}r\,\mathrm{sen}a}{a} \tag{7}$$

e in particolare

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{K}(x)\,dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

« Perciò dalla (6) risulterà

$$\int_0^1 x\,(1-x^2)^{\frac{2r-1}{2}} \mathrm{K}(x)\,dx = \left(\frac{1.3\ldots(2r-1)}{2.4\ldots 2r}\right)^2 \frac{\pi^2}{4} \tag{8}$$

Matematica. — *Sulle equazioni differenziali lineari del 4° ordine, che definiscono curve contenute in superficie algebriche.* Nota di Gino Fano, presentata dal Socio Cremona.

« 1. Dopo aver trattato in due Note precedenti [1] il caso di un' equazione differenziale lineare (omogenea) di ordine qualunque n, tale che un sistema di integrali indipendenti di essa $y_1, y_2, \ldots y_n$ soddisfacciano a un certo numero ($\geq n-2$) di equazioni algebriche rappresentanti complessivamente una *curva* nello spazio S_{n-1} delle coordinate (projettive) omogenee y_i, mi propongo di studiare adesso il caso in cui le stesse equazioni algebriche (che si dovranno supporre in numero $\geq n-3$) rappresentino una *superficie* di quello spazio; il caso cioè in cui la curva Γ definita dall'equazione differenziale proposta [2], pur essendo trascendente [3], è contenuta in *una* superficie algebrica. In questa prima Nota (e in un' altra successiva) mi occuperò soltanto delle equazioni differenziali lineari del 4° ordine ($S_{n-1} \equiv S_3$), supponendo perciò che quattro soluzioni indipendenti y_1, y_2, y_3, y_4 siano legate da una (ed una sola) equazione algebrica. Per le equazioni differenziali di ordine superiore al quarto mi propongo anche di esporre alcune considerazioni generali, che formeranno probabilmente oggetto di una terza Nota.

« Questo caso che qui mi propongo di studiare non è ancora stato trattato sistematicamente (ch' io sappia almeno) in modo completo (nemmeno per le equazioni differenziali di 4° ordine [4]). In Francia, Goursat e Halphen

(1) Cfr. questi Rend., pp. 18-26 e 51-57.

(2) loc. cit., p. 19.

(3) E tale possiamo supporla, perchè, se fosse algebrica, si ricadrebbe nel caso già trattato nelle mie due Note citate.

(4) Per le equazioni differenziali lineari di 3° ordine non si può nemmeno porre la questione analoga, perchè l'esistenza di una sola equazione algebrica fra le soluzioni y_1, y_2, y_3 richiederebbe già che fosse algebrica la stessa curva Γ.

hanno studiato in alcune Note (Compt. Rend. t. XCVII, C, CI; Bull. Soc. Math. de Fr., t. XI) il caso in cui la superficie algebrica contenente la curva Γ è una quadrica, oppure la sviluppabile biquadratica circoscritta a una cubica sghemba; e del primo di questi casi Halphen si è occupato anche più a lungo nella Memoria: *Sur les invariants des équations différentielles linéaires du 4me ordre* (Acta Math., vol. III, p. 325-380). In Germania, Ludw. Schlesinger (Diss. Berlin, 1887) si era proposta la stessa nostra questione (sempre per le equazioni differenziali di quarto ordine) in modo abbastanza generale; ma solo in alcuni casi particolarissimi (quelli stessi trattati dai due matematici francesi, e quello del cono) gli riuscì di giungere a un risultato soddisfacente. (1) Io tratterò invece la questione da un punto di vista completamente geometrico, e mi varrò soprattutto dei risultati sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni projettive in sè stesse, che il Sig. Enriques ha ottenuti nella sua Memoria (e Nota successiva) inserte negli Atti dell' Ist. Veneto, serie 7ª, t. IV e V, e che da me furono completati recentemente colla considerazione delle omografie a punti uniti multipli (cfr. questi Rend., p. 149). Che queste superficie appunto debbano comparire nelle nostre ricerche, è chiaro, perchè le diverse operazioni contenute nel *gruppo monodromico* dell'equazione differenziale proposta daranno altrettante omografie trasformanti in sè stessa la superficie algebrica (unica), in cui la curva Γ (supposta trascendente) deve essere contenuta.

« 2. Sia data un' equazione differenziale lineare (omogenea) del 4° ordine:

$$y^{\text{IV}} + A_1 y''' + A_2 y'' + A_3 y' + A_4 y = 0$$

priva di punti singolari essenziali (irregolari), i cui coefficienti si suppongono funzioni algebriche di una variabile indipendente x, e precisamente tutte funzioni razionali di uno stesso ente algebrico (o superficie di Riemann) di genere qualunque. Si supponga inoltre che quattro integrali indipendenti $y_1, \ldots y_4$ di quest' equazione differenziale siano legati da *una* equazione algebrica (omogenea) a coefficienti costanti (di grado superiore al primo); vale a dire che, interpretate le y_i come coordinate (projettive) omogenee di un punto (y) dello spazio ordinario, la curva Γ descritta da questo punto al variare della x sia contenuta in *una* superficie algebrica F.

« Se il gruppo monodromico dell' equazione differenziale proposta è finito (non contiene cioè che un numero finito di operazioni), le y_i saranno anch' esse funzioni *algebriche* della x (senza essere tuttavia, in generale, fun-

(1) Mentre questa nota era in corso di stampa, avendo avuta occasione di sfogliare alcuni volumi delle Memorie di questa illustre Accademia, mi sono accorto che di alcune questioni, fra quelle di cui vado ora occupandomi, è fatto anche cenno, sempre da un punto di vista puramente analitico, in taluni lavori del prof. D. Besso, inserti nei volumi XIV e XIX di dette Mem. (ser. 3ª). Cfr. ad es., per il caso di una curva Γ contenuta in una quadrica, la Memoria a pp. 219-231 del vol. XIX cit.

zioni razionali dello stesso ente algebrico primitivo). Se questo gruppo è infinito, potranno ancora le y_i differire da funzioni algebriche solo per uno stesso fattore comune a tutte (e che dovrà comportarsi moltiplicativamente sopra ogni superficie di Riemann, sulla quale dette funzioni algebriche risultino razionali (1)). *In ogni altro caso la superficie* F *dovrà certo ammettere infinite trasformazioni projettive in sè stessa.*

« Ora, il gruppo di *tutte* le trasformazioni projettive della superficie F in sè stessa è necessariamente *algebrico;* e perciò, se contiene un numero infinito di operazioni, è certamente *continuo,* o *misto.* In quest'ultimo caso esso si comporrà di un numero finito di schiere continue, *una* delle quali sarà di per sè un gruppo (continuo) (2). Ma, se il gruppo monodromico dell'equazione differenziale proposta contiene a sua volta operazioni di un certo numero $k > 1$ di queste schiere (e potranno anche non essere tutte, purchè queste k formino di per sè un gruppo), noi potremo passare dalla superficie di Riemann data ad una seconda in corrispondenza $(k, 1)$ colla prima, sulla quale (seconda) i coefficienti A_i siano ancora funzioni razionali, e, di più, i diversi cammini chiusi corrispondano soltanto a sostituzioni lineari delle y_i, quindi a trasformazioni projettive della superficie F, contenute in quella delle k schiere, che è di per sè un gruppo (continuo) (3). A questa *separazione* delle k schiere

(1) Cfr. anche questi Rend., p. 25. È chiaro però che in questi due casi la curva Γ risulterebbe essa stessa algebrica.

(2) Cfr. Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. I, cap. 18; vol. III, p. 180.

(3) Basta perciò ricordare (cfr. Lie, op. cit., vol. I, p. 321-22) che le operazioni di un gruppo misto G si ottengono moltiplicando quelle del gruppo continuo più ampio G′ in esso contenuto per un certo numero (nel nostro caso k, l'identità inclusa) di altre operazioni (soddisfacenti a determinate condizioni, che qui non starò a ripetere). D'altra parte sappiamo che il gruppo monodromico dell'equazione differenziale proposta ammette un certo numero $2p + m$ di operazioni (sostituzioni lineari) generatrici, che si possono far corrispondere ai $2p$ tagli canonici, ritenuti ad es. uscenti tutti da uno stesso punto, e a certe linee che congiungono quest'ultimo punto coi punti singolari dell'equazione differenziale, supposti in numero di m (e precisamente in questo senso, che un opportuno sistema di integrali y indipendenti, nell'atto di attraversare una di queste linee, invece di variare con continuità, subisca una determinata di quelle sostituzioni lineari). Di queste $2p + m$ operazioni fondamentali, alcune (forse) saranno contenute nel gruppo continuo G′; le altre, e sia H una qualunque di queste, *permuteranno* fra loro in modo determinato le k schiere di G (una delle quali è appunto G′), intendendo che la permutazione sia precisamente tale da sostituire ad ogni schiera quell'altra, che è il prodotto di questa stessa per l'operazione H considerata. Immaginiamo ora altre $k - 1$ superficie di Riemann, tutte identiche a quella data, e ad essa sovrapposte; e ognuna di queste k si faccia corrispondere a una determinata delle k schiere del gruppo G. Di più, immaginiamo di incidere queste stesse superficie lungo le linee h che corrispondono alle operazioni H; e, volta per volta, raccordiamole l'una coll'altra, lungo queste stesse linee, secondo la permutazione che la corrispondente operazione H determina fra le k schiere del gruppo G. Avremo così una nuova superficie di Riemann (complessiva), che rappresenterà certo un ente algebrico *irriduttibile* (se tale era quello primitivo), perchè le operazioni H, combinate in modo opportuno, permettono di passare da una qualunque delle k schiere a ogni

corrisponderà come operazione analitica la risoluzione di un'equazione algebrica di grado k, a coefficienti razionali sulla superficie di Riemann primitiva (e in particolare di un'equazione binomia, quando dal gruppo continuo si può passare a ciascuna delle altre $k-1$ schiera mediante potenze di una stessa operazione del gruppo monodromico) (1).

« Noi potremo dunque supporre, nella ricerca che ci siamo proposta, che il gruppo monodromico della nostra equazione differenziale sia contenuto nel gruppo *continuo* più ampio di trasformazioni projettive della superficie F in sè stessa. Ogni altro caso potrebbe ridursi a questo coll'estendere in modo opportuno il campo di razionalità primitivo (2).

« 3. Supponiamo anzitutto che la superficie F ammetta un gruppo continuo (soltanto) ∞^1 di trasformazioni projettive. Dalla mia Nota cit. (cfr. questi Rend., p. 152) risulta che i diversi casi possibili devono tutti rientrare in uno dei due seguenti:

« 1° Le infinite omografie del gruppo hanno quattro punti doppi (comuni) distinti e indipendenti (senza escludere con ciò che vi possano essere anche infiniti punti doppi);

« 2° L'equazione caratteristica di un'omografia generale del gruppo ha una sola radice quadrupla.

« Nel primo caso è chiaro (data la forma canonica a cui le equazioni del gruppo potranno ridursi) che fra gli integrali dell'equazione differenziale proposta, ve ne saranno quattro (almeno, e indipendenti) puramente moltiplicativi. L'equazione è dunque integrabile con sole quadrature e funzioni

---

altra, sicchè i raccordamenti eseguiti devono anche permettere di passare in modo continuo da uno *strato* qualsiasi ad ogni altro. Le funzioni razionali sulla prima superficie sono tali anche sulla nuova (ritenuto che esse assumano ora uno stesso valore in ogni gruppo di k punti sovrapposti). E infine, un cammino chiuso qualunque di questa nuova superficie, o evita le linee h, e allora corrisponde certo a una sostituzione lineare contenuta nel gruppo G′; oppure ne incontra qualcuna, ma allora deve incontrarle complessivamente un tal numero di volte, che il prodotto delle corrispondenti operazioni H muti in sè stessa almeno una schiera di G (nel senso che questa schiera moltiplicata per quel prodotto, riproduca sè stessa); e quel prodotto dovrà allora anche appartenere a G′. In ogni caso dunque la sostituzione corrispondente al cammino chiuso è contenuta in G′. (Per tali costruzioni di superficie di Riemann, operando su di una superficie data ad arbitrio come se fosse un piano, cfr. Hurwitz, Math. Ann. XXXIX, pag. 51 e seg.).

(1) Più generalmente, il *Gruppo* dell'equazione algebrica che dovremo risolvere coinciderà col gruppo delle permutazioni (o sostituzioni) che le operazioni H considerate nella nota prec. e i diversi loro prodotti determinano sulle k schiere del gruppo G (cfr. anche Vessiot; Ann. Éc. Norm. Sup., 1892, p. 236).

(2) Quest'osservazione, d'altronde semplicissima, ci dispenserà quindi dal cercare volta per volta, se e come i singoli gruppi continui che incontreremo possano venire ampliati (*erweitert*).

esponenziali (le quadrature essendo da eseguirsi su funzioni *razionali* nel campo prestabilito).

« E a questo stesso risultato si giunge anche nel 2° caso. Ad es., se vi è un solo punto unito quadruplo (se cioè la radice quadrupla dell'equazione caratteristica non annulla tutti i subdeterminanti di 3° ordine del determinante che costituisce il 1° membro di essa), le equazioni del gruppo potranno ridursi alla forma:

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= y_1 + \lambda_1 y_2 t + \frac{1}{2}\lambda_1 \lambda_2 y_3 t^2 + \frac{1}{6}\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 y_4 t^3 \\ y_2^{(1)} &= y_2 + \lambda_2 y_3 t + \frac{1}{2}\lambda_2 \lambda_3 y_4 t^2 \\ y_3^{(1)} &= y_3 + \lambda_3 y_4 t \\ y_4^{(1)} &= y_4 \end{aligned}$$

dove le λ sono costanti, e t è il parametro variabile (cfr. Pittarelli, *I gruppi continui projettivi semplicemente infiniti nello spazio ordinario*; Ann. di Mat., ser. 2ª, t. XXII, p. 285).

« Da queste formule si deduce che la y_4 è puramente moltiplicativa [1]; che il rapporto $\frac{y_3}{y_4}$ si comporta additivamente rispetto a tutte le operazioni del gruppo, ed è perciò un integrale Abeliano sulla data superficie di Riemann; e che infine le funzioni:

$$f_1 = \frac{\lambda_2 y_3^2 - 2\lambda_3 y_2 y_4}{y_4^2} \qquad f_2 = \frac{3\lambda_3^2 y_1 y_4^2 - 3\lambda_1 \lambda_3 y_2 y_3 y_4 + \lambda_1 \lambda_2 y_3^3}{y_4^3}$$

si conservano numericamente inalterate rispetto alle operazioni dello stesso gruppo ∞^1, dunque anche rispetto a quelle del *Gruppo di razionalità* dell'equazione differenziale proposta (che è contenuto nel precedente, oppure coincide addirittura con esso [2]), e sono perciò *razionali* sulla stessa superficie di Riemann [3]. E poichè la y_3 non è che il prodotto di y_4 per il rapporto $\frac{y_3}{y_4}$, la y_2 è funzione razionale di y_3, y_4 e f_1, e la y_1 è funzione pure razionale

[1] Non si può escludere infatti che essa si riproduca soltanto a meno di certi fattori, i quali dovranno comparire allora anche in tutte le altre y.

[2] A meno che lo stesso *gruppo di razionalità* non contenga più sostituzioni lineari corrispondenti a una medesima trasformazione projettiva del gruppo ∞^1 considerato. Ma quelle sostituzioni lineari si potrebbero allora ottenere applicando prima la trasformazione projettiva corrispondente, e moltiplicando poi ancora tutte le y per uno stesso fattore, il che non altererebbe nemmeno le funzioni f_1 e f_2, essendo esse omogenee (di grado zero).

[3] Le equazioni $f_1 = \text{cost.}$ e $f_2 = \text{cost.}$ rappresentano rispettivamente due fasci di superficie; la prima, di coni quadrici (col vertice comune nel punto $y_2 = y_3 = y_4 = 0$); la seconda, di rigate cubiche di Cayley. Due superficie appartenenti rispettivamente a questi

di y_2, y_3, y_4 e f_2, si conclude che effettivamente tutte quattro le y_i potranno ancora esprimersi con sole quadrature (e funzioni esponenziali).

« Gli altri gruppi ∞^1, in cui l'equazione caratteristica di un'omografia generale ha una sola radice quadrupla, rientrano tutti in quest'ultimo come casi particolari. Se vi è una sola retta di punti uniti, e gli altri due punti doppi coincidono in un punto di questa (¹), si può aggiungere che la superficie F dovrà contenere un fascio razionale di coniche, segato dai piani per una retta.

« In ogni caso poi, se vi sono due rette di punti uniti, distinte o coincidenti (omografia *rigata*, o *rigata speciale* di Segre), la superficie F sarà una rigata colle stesse due rette per direttrici (contenuta cioè nella congruenza lineare determinata da queste stesse direttrici). E se il gruppo si compone di sole omologie (generali o speciali), la superficie F sarà certamente un cono, e verrà quindi mutata in sè stessa da ∞^4 trasformazioni così fatte (più, forse, altre omografie). Di quest'ultimo caso dovremo perciò occuparci più avanti.

« 4. Passiamo al caso in cui la superficie F ammette un gruppo continuo ∞^2 (e non più) di trasformazioni projettive. Queste superficie si dividono in quattro categorie (²):

« 1.° *Superficie* W *di Klein-Lie* (cfr. Compt. Rend., t. LXX, pp. 1222 - 1226);

« 2.° *Rigate (di ordine* ≥ 4*) con due direttrici rettilinee infinitamente vicine*

« 3.° *Superficie contenenti un fascio di coniche, segato dai piani per una retta*;

« 4.° *Superficie di* 6° *ordine a sezioni ellittiche*, rappresentabili sul piano con un sistema di cubiche aventi a comune un flesso e la relativa tangente.

« Nel primo caso non abbiamo che le superficie di grado superiore al secondo, la cui equazione può mettersi sotto la forma:

$$y_1^{\alpha_1}\, y_2^{\alpha_2}\, y_3^{\alpha_3}\, y_4^{\alpha_4} = \text{cost.}$$

---

due fasci hanno sempre a comune la retta $y_3 = y_4 = 0$, da contarsi tre volte; l'intersezione residua è una cubica sghemba (variabile), le cui equazioni (sotto forma parametrica) sarebbero date dalle stesse formule di trasformazione, dove y_1, y_2, y_3, y_4 si supponessero coordinate di un punto arbitrario di essa. Queste ∞^2 cubiche sono infatti le *trajettorie* determinate nello spazio dal nostro gruppo ∞^1; e la superficie F dovrebbe contenere in questo caso un fascio (non necessariamente razionale) di tali curve.

(¹) Omografia [(31)] di Segre (Mem. di quest'Acc., ser. 3ª, vol XIX) e [(100)] di Predella (Ann. di Mat., ser. 2ª, vol. XVII). È questo il caso nº 9 (p. 292) della Mem. cit. di Pittarelli.

(²) Cfr. Enriques, Mem. cit., p. 44. Nella mia Nota ultima è dimostrato che anche la considerazione delle omografie con punti uniti multipli non conduce a nessun altro caso (cfr. questi Rend., p. 155).

dove le α sono (o almeno si possono ritenere) numeri interi, aventi per somma zero. Quest'unico caso si presenta infatti quando i quattro punti doppi (che risultano comuni alle ∞^2 omografie del gruppo) sono tutti distinti; negli altri casi si ottengono come superficie W algebriche (all'infuori dei piani uniti) soltanto *rigate cubiche di Cayley*, o *quadriche;* dunque superficie che ammettono rispettivamente ∞^3 o ∞^6 trasformazioni projettive (1).

« È chiaro che in questo caso l'equazione differenziale proposta ammetterà ancora (come nel 1° caso del n° prec.) quattro soluzioni indipendenti puramente moltiplicative, e si potrà perciò integrare con sole quadrature (e funzioni esponenziali) (2).

« 5. Nel secondo caso le equazioni del gruppo ∞^2 possono mettersi sotto la forma (cfr. Enriques, l. c., p. 35):

$$y_1^{(1)} = y_1 + \alpha\, y_2 \qquad y_3^{(1)} = \varrho^{p+1}\, y_3$$
$$y_2^{(1)} = \varrho\, y_2 \qquad y_4^{(1)} = \varrho^p\, (y_4 + \alpha\, y_3)$$

dove α e ϱ sono i parametri, e p è una costante (razionale, se il gruppo deve essere (come in questo caso) algebrico, e diversa da 1 e da $\frac{1}{2}$ se la superficie F non deve essere una quadrica, nè una rigata di Cayley).

« La y_2 e la y_3 si comportano dunque moltiplicativamente rispetto a tutte le operazioni del gruppo, e i rapporti $\frac{y_1}{y_2}$ e $\frac{y_4}{y_3}$ subiscono sostituzioni lineari intere (sono dunque integrali di funzioni moltiplicative) (3). L'equazione diffe-

(1) La rigata di Cayley si ottiene quando vi è un solo punto unito quadruplo (cfr. Compt. Rend., t. LXX, p. 1224). In ogni altro caso, l'equazione della corrispondente superficie W (che qui vogliamo sia algebrica) si ottiene ponendo un'equazione lineare tra funzioni algebriche (razionali, intere) delle coordinate (non omogenee), che risultano di grado non superiore al secondo. L'equazione non può dunque rappresentare che una quadrica (o un piano).

(2) È notevole il fatto che questo gruppo continuo ∞^2 può essere *ampliato* in modo semplicissimo, quando due o tre delle α siano eguali fra loro (nel qual caso appunto le y corrispondenti possono venir comunque permutate). Ciò si verifica ad es. per la superficie cubica $y_1^3 - y_2\, y_3\, y_4 = 0$. Il caso in cui la curva Γ è contenuta in una tal superficie (o in una varietà analoga $y_1^p - y_2\, y_3 \cdots y_{p+1} = 0$ di S_p, quando si trattasse di un'equazione differenziale di ordine $p+1$) è stato studiato analiticamente dal signor Wallenberg in una Nota escita alcune settimane or sono (Journ. de Crelle, t. CXIV, 3° fasc.). E il risultato da lui ottenuto è una conseguenza immediata del fatto che il gruppo delle trasformazioni projettive ammesse da questa varietà di S_p si compone (per $p \geq 3$) di un gruppo continuo transitivo ∞^{p-1} coi punti uniti fissi, e delle altre $p! - 1$ schiera, che si ottengono moltiplicando questo gruppo per le sostituzioni lineari corrispondenti alle diverse permutazioni delle $y_2, y_3, \cdots y_{p+1}$.

(3) E tutto questo continuerebbe a sussistere anche se assieme alle $y^{(1)}$ considerate di sopra se ne dovessero considerare (e così potrebbe occorrere) altre, differenti da queste per uno stesso fattore, forse anche variabile. Lo stesso dicasi per i due casi seguenti (cfr. anche la nota (2) a p. 236).

renziale proposta è ancora integrabile per quadrature e funzioni esponenziali, e ammette in particolare due soluzioni distinte puramente moltiplicative.

« Nel 3° caso le equazioni del gruppo possono mettersi sotto la forma:

$$y_1^{(1)} = y_1 + 2\alpha y_2 + \alpha^2 y_3 \qquad y_3^{(1)} = \varrho^2 y_3$$
$$y_2^{(1)} = \varrho (y_2 + \alpha y_3) \qquad y_4^{(1)} = \varrho^p y_4$$

dove ancora α e ϱ sono i parametri, e p è una costante arbitraria (nel nostro caso razionale). La y_3 e la y_4 si comportano dunque moltiplicativamente; il rapporto $\frac{y_2}{y_3}$ subisce soltanto delle sostituzioni lineari intere, e infine la funzione $y_1 y_3 - y_2^2$ si comporta anch'essa moltiplicativamente ([1]). Tutte quattro le y si potranno dunque esprimere con sole quadrature e funzioni esponenziali.

« Nel 4° caso infine, le equazioni del gruppo ∞^2 si possono mettere sotto la forma (cfr. Enriques, Atti Ist. Ven., ser. 7ª, t. V, p. 3 della Nota cit.):

$$y_1^{(1)} = \alpha^3 y_1 + 3\alpha^2 \beta y_2 + 3\alpha\beta^2 y_3 + \beta^3 y_4 \qquad y_3^{(1)} = \alpha y_3 + \beta y_4$$
$$y_2^{(1)} = \alpha^2 y_2 + 2\alpha\beta y_3 + \beta^2 y_4 \qquad y_4^{(1)} = y_4$$

sicchè y_4 è ancora funzione moltiplicativa, $\frac{y_3}{y_4}$ è l'integrale di una tale funzione, e le due funzioni:

$$y_3^2 - y_2 y_4 \quad \text{e} \quad y_1^2 y_4^2 - 6 y_1 y_2 y_3 y_4 + 4 y_1 y_3^3 + 4 y_2^3 y_4 - 3 y_2^2 y_3^2$$

sono esse pure moltiplicative. Le y si possono dunque esprimere anche in quest'ultimo caso con sole quadrature e funzioni esponenziali, più (per y_1) un'estrazione di radice quadrata ([2]).

« Anche se la superficie F ammette ∞^2 trasformazioni projettive in sè stessa, l'integrazione dell'equazione differenziale proposta non richiede dunque operazioni più elevate delle *quadrature*. Di queste però ne possono occorrere, e ne occorreranno anzi in generale (almeno nei tre ultimi casi), *due successive*, la prima essendo da eseguirsi su di una funzione razionale. In un'altra Nota vedremo come ciò sia d'accordo colla *composizione* dei diversi gruppi ∞^2 che a noi si sono presentati, e passeremo poi al caso in cui la superficie F ammette ∞^3 o più trasformazioni projettive ».

(1) Le omografie di questo gruppo ∞^2 mutano infatti in sè stesso il cono $y_1 y_3 - y_2^2 = 0$. Questo cono ha il vertice nel punto $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, contiene come generatrice fissa la retta $y_2 = y_3 = 0$, e è toccato lungo questa generatrice dal piano fisso $y_3 = 0$. Di più, anche la sezione piana determinata nel cono dal piano $y_4 = 0$ è mutata in sè stessa da tutte le omografie del gruppo (cfr. Enriques, Mem. cit., pp. 23, 40).

(2) Quest'ultimo gruppo ∞^2 si compone delle omografie che mutano in sè stessa una cubica sghemba con un punto unito (fisso) ($y_2 = y_3 = y_4 = 0$) su di essa; e le due ultime funzioni, che abbiamo detto essere *moltiplicative*, eguagliate a zero, rappresentano rispettivamente il cono quadrico che projetta la cubica da questo punto unito, e la sviluppabile biquadratica circoscritta alla stessa curva. È chiaro perciò che dette funzioni dovranno appunto riprodursi, dopo una qualunque trasformazione del gruppo, a meno di certi fattori.