ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IV.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

e quindi:

$$\varphi = e^{\frac{1}{n}\int(B_1 - A_1)dx}$$

« Del caso *b*), che dà luogo a considerazioni geometriche interessanti (per quanto semplicissime) sulle curve razionali di uno spazio qualunque, mi riservo occuparmi in altra Nota ».

Fisica-matematica. — *Sopra gli invarianti ortogonali di deformazione.* Nota di Carlo Somigliana, presentata dal Socio Beltrami.

I.

« In alcune *Note fisico-matematiche* pubblicate nei Rendiconti del Circolo matematico di Palermo (T. III, 1889) il prof. Beltrami ha dimostrata l'importanza di certe espressioni, da lui chiamate *invarianti ortogonali di deformazione*, le quali godono la proprietà di mantenersi inalterate di forma per un cambiamento qualsiasi degli assi ortogonali di riferimento, oppure per una rotazione arbitraria intorno ad uno di essi, accompagnata, se vuolsi, da spostamenti che non mutino la direzione di questo asse. Conoscendo queste espressioni infatti si ha il modo di scrivere immediatamente la forma generale del potenziale di elasticità pei corpi isotropi e per quelli isotropi rispetto ad un asse (isotropia incompleta).

« Pei corpi i quali presentano uno o più assi di simmetria elastica, come i cristalli, il potenziale di elasticità risulta, di necessità, formato con espressioni che sono invariabili pel gruppo di sostituzioni che caratterizza la simmetria del corpo; ma finora non è stata fatta la ricerca diretta di queste espressioni, la cui conoscenza presenta gli stessi vantaggi di quella degli invarianti che si possono dire *isotropi*.

« In questa Nota io indico un procedimento assai semplice per la formazione degli invarianti di deformazione corrispondenti ad un asse di simmetria di periodo qualunque, ossia degli invarianti dei gruppi ciclici, che sono i gruppi fondamentali di ogni sorta di simmetria; e trovo che, per ogni valore del periodo n dell'asse, essi possono esprimersi razionalmente mediante otto invarianti linearmente indipendenti, di cui però sei sono tali per qualsiasi rotazione. Io chiamerò questi ultimi invarianti *di rotazione*, e gli altri invarianti *ciclici di periodo n*.

« In una Nota, che ha avuto l'onore dell'inserzione in questi Rendiconti (1), ho dimostrato che la legge di razionalità, per quanto concerne le

(1) Vol. III, 1° sem. 1894.

proprietà elastiche dei cristalli, è una conseguenza delle ipotesi fondamentali della teoria della elasticità. La verità di questa proposizione risulta immediatamente dalla forma degli invarianti ciclici di grado minimo, e si ottiene così una dimostrazione nuova e più semplice della legge suddetta.

« Un'altra deduzione interessante può esser fatta. Alcune recenti esperienze del sig. O. Thomson (1) sembrano aver resa necessaria una estensione della teoria classica della elasticità, che fu proposta pel caso della isotropia dal sig. W. Voigt (2), e che consiste nell'introdurre nella espressione del potenziale anche i termini di terzo ordine rispetto alle componenti di deformazione. Ora si può domandare se, con tale estensione, la legge di razionalità continui ad essere una conseguenza della forma del potenziale. Vedremo che ciò non è, poichè in tal caso è possibile l'esistenza di un asse di periodo *cinque*, distinto da un asse di isotropia.

« La teoria della elasticità, quando si assuma pel potenziale una espressione generale che contenga anche i termini di terzo grado, viene così a perdere il pregio notevole di comprendere tutti e soli i corpi cristallini, quali si presentano in natura e ad abbracciare anche corpi, la cui reale esistenza non sembra finora conforme alla esperienza.

« Questo fatto certamente non autorizza a respingere la proposta estensione, poichè noi possiamo sempre introdurre la legge di razionalità come un dato sperimentale; ma mi pare necessario il tenerne conto, almeno per avere un concetto esatto del valore della nuova teoria rispetto all'antica.

II.

« La sostituzione che serve a trasformare le sei componenti di deformazione, quando gli assi coordinati subiscono una rotazione di un angolo $\frac{2\pi}{n}$ intorno all'asse delle z, si può scrivere, come ho mostrato nella Nota sopra citata, nella forma seguente

$$\begin{array}{lll} & x_x - y_y = (x'_x - y'_y)\cos\frac{4\pi}{n} - x'_y \operatorname{sen}\frac{4\pi}{n} & y_z = y'_z \cos\frac{2\pi}{n} + z'_x \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} \\ (1) & x_y = (x'_x - y'_y)\operatorname{sen}\frac{4\pi}{n} + x'_y \cos\frac{4\pi}{n} & z_x = -y'_z \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + z'_x \cos\frac{2\pi}{n} \\ & x_x + y_y = x'_x + y'_y & z_z = z'_z \end{array}$$

per cui se, per semplicità, si pone

$$\begin{array}{llll} (2) & x_x - y_y = x & x_y = y & x_x + y_z = z \\ & y_z = u & z_x = v & z_z = w \end{array}$$

quelle formole si riassumono nelle seguenti

$$x + iy = e^{\frac{4\pi}{n}}(x' + iy') \qquad u + iv = e^{\frac{-2\pi}{n}}(u' + iv')$$
$$z = z' \qquad w = w'$$

(1) Wied. Ann. Bd. 44, 1891.

(2) Nachrichten v. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1893 e 1894.

ove $i = \sqrt{-1}$. Ora se una funzione razionale intera f delle sei componenti di deformazione rimane invariata di forma quando si fa la sostituzione (1), e si immaginano in essa sostituite le variabili x, y, z, u, v, w alle primitive, dovrà essere identicamente

$$f(x, y, z, u, v, w) = f(x', y', z', u', v', w')$$

quando si tenga conto delle (2). Ora notiamo che, essendo z e w già invarianti per se stesse, basterà, per la ricerca delle espressioni invariabili, che ci occupiamo di quelle che dipendono da x, y, u, v. Poniamo per questo

$$x + iy = Z \qquad u + iv = W$$
$$x - iy = Z_1 \qquad u - iv = W_1$$

e le (2) si potranno scrivere

$$(3) \qquad \begin{aligned} Z &= e^{\frac{4\pi}{n}i} Z' & W &= e^{-\frac{2\pi}{n}i} W' \\ Z_1 &= e^{-\frac{4\pi}{n}i} Z_1' & W_1 &= e^{\frac{2\pi}{n}i} W'_1 \end{aligned}$$

« Qualunque invariante $f(x, y, u, v)$ potrà essere trasformato in una funzione di Z, Z_1, W, W_1, per cui la quistione si riduce a trovare le espressioni razionali intere $F(Z, Z_1, W, W_1)$, per le quali in forza delle (3), si ha

$$(4) \qquad F(Z, Z_1, W, W_1) = F(Z', Z_1', W_1'. W_1')$$

« Ora la forma generale di queste espressioni è

$$(5) \qquad F = \Sigma . A_{pqrs} Z^p Z_1^q W^r W_1^s$$

ove le A_{pqrs} sono costanti; per le (3) avremo poi

$$F = \Sigma . A_{pqrs} Z'^p Z_1'^q W'^r W_1'^s e^{\frac{2\pi}{n}i(2p-2q-r+s)}$$

e affinchè sia vera la relazione (4), tutti gli esponenziali dovranno avere il valore *uno*, ossia si dovrà avere

$$(6) \qquad \frac{2p - 2q - r + s}{n} = \text{numero intero.}$$

Reciprocamente, quando queste condizioni sono soddisfatte, ciascuno dei termini che compongono il secondo membro della (5) è per sè stesso un invariante. Dunque il problema della determinazione degli invarianti ciclici, di un dato periodo n, si riduce alla quistione aritmetica di trovare tutte le soluzioni intere dell'equazione (6).

« Indichiamo con k, λ, μ, ν quattro numeri interi arbitrarî, e poniamo

$$(7) \qquad \begin{aligned} p &= kn + \lambda + \mu & r &= kn + 2\lambda + \nu \\ q &= \mu & s &= \nu \end{aligned}$$

« Di qui si ha

$$2p - 2q - r + s = kn$$
$$-p + q + r - s = \lambda$$

la prima delle quali relazioni ci dice che, scelti arbitrariamente i numeri k, λ, μ, ν, le (7) danno sempre una soluzione dell'equazione (6); e la seconda, insieme alle altre $\mu = q$, $\nu = s$, ci dimostra reciprocamente che, data una soluzione della (6), è sempre possibile determinare i numeri λ, μ, ν in modo che essa venga rappresentata dalle (7). Dunque queste formole ci danno la soluzione generale della equazione proposta.

« Esse però ci danno, oltre le soluzioni positive anche le negative; queste conducono ad invarianti fratti, i quali però risultano sempre il quoziente di due invarianti interi, come si vedrà da ciò che segue, e quindi non danno alcun risultato nuovo. A noi basta del resto conoscere gli invarianti interi e quindi supporremo i numeri arbitrarî scelti in modo che sia

$$(8) \qquad \begin{matrix} kn + \lambda + \mu \geq 0 & \qquad kn + 2\lambda + \nu \geq 0 \\ \mu \geq 0 & \qquad \nu \geq 0 \end{matrix}$$

« In quanto al numero k potremo pure supporlo sempre positivo; difatti se certi valori p_0, q_0, r_0, s_0 soddisfanno la (6) per un valore negativo k_0 di k, è chiaro che i numeri q_0, p_0, s_0, r_0 soddisferanno la stessa equazione per $k = -k_0$, ed i due invarianti corrispondenti a queste due soluzioni saranno

$$Z^{p_0} Z_1^{q_0} W^{s_0} W_1^{r_0} = P + iQ \qquad Z^{q_0} Z_1^{p_0} W^{r_0} W_1^{s_0} = P - iQ\,;$$

quindi nei due casi troviamo gli stessi invarianti reali P, Q, che sono quelli che a noi interessano.

« Dunque possiamo concludere: l'espressione

$$(9) \qquad I = (ZW)^{kn} (ZW^2)^{\lambda} (ZZ_1)^{\mu} (WW_1)^{\nu}$$

qualunque siano i numeri k, λ, μ, ν dà sempre un invariante ciclico, generalmente complesso, di periodo n; inoltre qualunque invariante ciclico intero [1] si può ottenere da essa prendendo per k un numero positivo e per λ, μ, ν numeri che soddisfacciano alle condizioni (8), oppure formando una funzione razionale intera di tali espressioni e di z e w.

« Consideriamo ora gli invarianti reali che si possono ottenere dalla formola precedente e dapprima supponiamo $k = 0$. Allora il prodotto

$$R = (ZW^2)^{\lambda} (ZZ_1)^{\mu} (WW_1)^{\nu}$$

sarà invariante per qualsiasi valore di n, e siccome anche λ, μ, ν sono arbitrarî, ne segue che le tre espressioni

$$I = ZW^2 \qquad H = ZZ_1 \qquad J = WW_1$$

godranno della stessa proprietà, cioè saranno invarianti di *rotazione*. Gli ultimi due sono reali e si ha

$$H = x^2 + y^2 \qquad J = u^2 + v^2$$

[1] D'ora innanzi per invariante ciclico si intenderà sempre un invariante ciclico intero.

mentre **I** è complesso e dà origine a due invarianti reali di terzo grado

$$K = x(u^2 - v^2) - 2yuv$$

$$K' = y(u^2 - v^2) + 2xuv$$

« Fra questi quattro invarianti non può esistere alcuna relazione lineare; però se ne ha una non lineare

$$K^2 + K'^2 = KJ^2$$

che è assai facile verificare, osservando che

$$|\mathbf{I}| = |ZW^2|$$

« Esprimendo R mediante gli invarianti di rotazione reali ora trovati, otteniamo

$$R = (K + iK')^{\lambda}\, H^{\mu}\, J^{\nu} \tag{10}$$

e per le condizioni (8), affinchè R sia intero non dovranno μ e ν essere negativi, ed inoltre per λ si dovrà avere

$$\lambda + \mu \geq 0 \qquad 2\lambda + \nu \geq 0$$

« Ora supponiamo λ negativo ed osserviamo che a cagione della identità

$$1 = (K^2 + K'^2)^{-\lambda}\, H^{\lambda}\, J^{2\lambda}$$

si può scrivere anche

$$R = (H - iK')^{-\lambda}\, H^{\lambda+\mu}\, J^{2\lambda+\nu} \tag{10'}$$

nella quale formola nessun esponente può essere negativo. Da queste due espressioni (10) (10') segue che R e quindi qualunque invariante di rotazione, che non contenga z e w, è una funzione razionale intera dei quattro invarianti H, J, K, K', fra i quali si ha la relazione

$$K^2 + K'^2 = HJ^2$$

« Gli invarianti di rotazione sono stati presi in considerazione dal prof. Beltrami nelle *Note* sopra citate, dove come invarianti fondamentali assume i seguenti

$$A = y_z^2 + z_x^2 \qquad B = x_x\, y_y - \tfrac{1}{4} x_y^2$$

$$C = y_z\, z_x\, x_y - x_x\, y_z^2 - y_y\, z_x^2$$

insieme naturalmente a z e w. Fra questi invarianti e quelli da noi trovati si hanno le relazioni

$$A = -J \qquad 4B = z^2 - H \qquad -2C = zJ + K$$

« L'esistenza dell'invariante K' non credo sia stata finora notata; esprimendolo in funzione delle componenti di deformazione si ha

$$K' = x_y(y_z^2 - z_x^2) + 2(x_z - y_y)\, y_z\, z_x$$

« Passando ora ai veri invarianti ciclici e quindi supponendo $k \neq 0$, poniamo

$$(ZW)^n = J_{2n} + i\, J'_{2n}$$

Saranno allora J_{2n}, J'_{2n} due invarianti ciclici di grado $2n$, linearmente indipendenti, legati però a quelli di rotazione dalla relazione

$$J_{2n}^2 + J_{2n}'^2 = H^n\, J^n$$

e la espressione generale (9) si ptrà scrivere

$$I = (J_{2n} + iJ'_{2n})^k (K + iK')^\lambda H^\mu J^\nu$$

nella quale soltanto λ potrà essere negativo. Di qui segue che qualunque invariante ciclico, che non contenga z e w, sarà una funzione razionale dei sei invarianti J_{2n}, J'_{2n}, K, K', H, J, che si potrà sempre porre sotto la forma

$$\frac{1}{H^t J^{2t}} F(H, J, K, K', J_{2n}, J'_{2n})$$

ove F è simbolo di funzione razionale intera e t un intero positivo o nullo.

III.

« Proponiamoci ora di determinare, per qualunque valore di n, gli invarianti ciclici di grado minimo. La soluzione di questo problema conduce immediatamente alle conclusioni accennate da principio.

« Chiamando N il grado di uno qualunque degli invarianti dati dalla (9), avremo

$$N = 2kn + 3\lambda + 2\mu + 2\nu$$

e la quistione si riduce a trovare i valori di k, λ, μ, ν che rendono minima la espressione precedente, colla condizione che si abbia

$$(11) \qquad \begin{array}{ll} k \geq 1 \qquad \mu \geq 0 & \nu \geq 0 \\ kn + \lambda + \mu \geq 0 & kn + 2\lambda + \nu \geq 0 \end{array}$$

« Osserviamo che, per ogni terna di valori assegnati ai numeri positivi k, μ, ν, il valore di λ che rende minima N, compatibilmente con le condizioni precedenti, si otterrà prendendo per λ fra i due valori

$$-(nk + \mu) \qquad , \qquad -\tfrac{1}{2}(nk + \nu + \varepsilon)$$

quello che è in valore assoluto minore, dove con ε indichiamo un numero che è uguale a zero, od a -1, secondo che $nk + \nu$ è pari o dispari.

« In secondo luogo notiamo che tutte le quaterne di valori possibili per k, λ, μ, ν si possono distinguere in tre gruppi secondo quella che è soddisfatta fra le tre condizioni

$$\begin{array}{ll} 1^\circ & nk + \mu = \tfrac{1}{2}(nk + \nu) \\ 2^\circ & nk + \mu > \tfrac{1}{2}(nk + \nu) \\ 3^\circ & nk + \mu < \tfrac{1}{2}(nk + \nu) \end{array}$$

« Se è soddisfatta la prima, dovremo porre

$$\lambda = -(nk + \mu) \qquad \nu = nk + 2\mu$$

quindi

$$N = nk + 3\mu$$

« Il minimo valore di N si avrà allora, per le (11), ponendo $k = 1$, $\mu = 0$ e sarà $N = n$.

« Supponiamo ora soddisfatta la seconda condizione, e quindi poniamo

$$\lambda = -\tfrac{1}{2}(nk + \nu + \varepsilon);$$

avremo

$$N = \tfrac{1}{2}(nk + \nu - 3\varepsilon) + 2\mu$$

Se n è pari, il minimo valore pari che possa assumere $nk + \nu$ è n, quindi il minimo valore di N si avrà ponendo $\nu = 0$, $\mu = 0$, $k = 1$; queste posizioni sono compatibili colla condizione 2ª, ed il minimo di N sarà quindi $N = \frac{n}{2}$.

« Se n è dispari, il minimo valore pari di $nk + \nu$ è $n + 1$, quindi il minimo valore di N si avrà ponendo $k = 1$, $\mu = 0$, $\nu = 1$; queste posizioni sono compatibili colla condizione 2ª, purchè sia, come è difatti, $n > 2$. Dunque il minimo valore di N è in questo caso $N = \frac{n+1}{2}$.

« Si vede poi immediatamente che l'ipotesi che sia $nk + \nu$ dispari e quindi $\varepsilon = -1$, conduce a trovare per N dei valori superiori ai precedenti, cioè $N = \frac{n+4}{2}$ per n pari e $N = \frac{n+3}{2}$ per n dispari.

« Finalmente supponiamo soddisfatta la terza condizione; dovremo porre

$$\lambda = -(nk + \mu)$$

e dovrà essere

$$nk + 2\mu > \nu$$

quindi $\nu = nk + 2\mu + \tau$, ove τ è un intero positivo. Perciò sarà

$$N = nk + 3\mu + 2\tau$$

ed il minimo valore possibile per questa espressione è $N = n + 2$.

« Di qui, riassumendo, si vede che gli invarianti di grado minimo si ottengono dal secondo gruppo, e sono di grado $\frac{n}{2}$ per n pari e di grado $\frac{n+1}{2}$ per n dispari. Le loro espressioni complesse sono

$$Z^{\frac{n}{2}}, \quad Z_1^{\frac{n}{2}} \qquad \text{per } n \text{ pari}$$

$$Z^{\frac{n-1}{2}} W_1, \quad Z_1^{\frac{n-1}{2}} W \qquad \text{per } n \text{ dispari}$$

« Per passare ai corrispondenti invarianti reali, noi porremo (indicando con un indice in alto il periodo e con un indice in basso il grado)

$$Z^{\frac{n}{2}} = I^{(n)}_{\frac{n}{2}} + i I'^{(n)}_{\frac{n}{2}}$$

(12)

$$Z^{\frac{n-1}{2}} W_1 = L^{(n)}_{\frac{n+1}{2}} + i L'^{(n)}_{\frac{n+1}{2}}$$

« Questi invarianti sono linearmente indipendenti fra loro e dagli invarianti di rotazione; però sono legati a questi ultimi dalle relazioni non lineari

$$\left[\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}^{(n)}\right]^2 + \left[\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}^{\prime(n)}\right]^2 + = \mathrm{H}^{\frac{n}{2}} \qquad \left[\mathrm{L}_{\frac{n+1}{2}}^{(n)}\right]^2 + \left[\mathrm{L}_{\frac{n+1}{2}}^{\prime(n)}\right]^2 = \mathrm{H}^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{J}$$

IV.

« Finora abbiamo supposto il periodo n come dato, e ci eravamo proposti di trovarne tutti gli invarianti corrispondenti, di qualunque grado. Nella teoria della elasticità si presenta un problema in certo modo inverso; si assume generalmente per il potenziale una forma di un grado m determinato, e quindi per averne l'espressione più generale conviene conoscere tutti gli invarianti di grado m, qualunque ne sia il periodo.

« Supponiamo $m = 2$; è chiaro che n non potrà superare 4. Difatti per $n = 4$ esistono gli invarianti ciclici di 2° grado $\mathbf{I}_2^{(4)}$, $\mathbf{I}_2^{\prime(4)}$, ma per $n \geq 5$ gli invarianti di grado minimo (12) sono almeno di terzo grado.

« Di qui segue: Se il potenziale di elasticità è una funzione quadratica delle componenti di deformazione, esso non può essere formato che cogli invarianti di rotazione z, w, H, J e con invarianti ciclici di periodo 2, 3, 4.

« Questo risultato basta per dimostrare il teorema che è oggetto della Nota che ho citato da principio, cioè che la legge di razionalità è una conseguenza necessaria della ipotesi che il potenziale sia una forma quadratica delle componenti di deformazione.

« Se ora ammettiamo che il potenziale possa contenere anche termini di terzo grado, esso potrà essere formato anche cogli invarianti di rotazione K e K′, ed inoltre cogli invarianti ciclici $\mathrm{L}_3^{(5)}$, $\mathrm{L}_3^{\prime(5)}$ che si ottengono dalle (12) per $n = 5$. Anche per $n = 6$ abbiamo gli invarianti $\mathrm{I}_3^{(6)}$, $\mathrm{I}_3^{\prime(6)}$ che pure potranno comparire nel potenziale. Per $n \geq 7$ invece gli invarianti di grado minimo sono di grado superiore al terzo. Dunque:

« Quando il potenziale è una forma di terzo grado, esso può contenere invarianti ciclici di periodo 2, 3, 4, 5, 6 e questi soltanto.

« È quindi possibile formare una espressione pel potenziale, distinta da quelle che si hanno nel caso della isotropia assiale, e che corrisponde ad un corpo avente un asse di simmetria elastica di periodo 5. Una tale espressione sarebbe, ad esempio

$$\mathrm{A}\mathrm{L}_3^{(5)} + \mathrm{B}\mathrm{L}_3^{\prime(5)}$$

ove A, B sono costanti. Questo risultato, contrario alla legge di razionalità, per la quale non possono esistere che assi a periodo 2, 3, 4, 6, giustifica le considerazioni che abbiamo premesse circa la estensione della teoria della elasticità proposta dal prof. Voigt.

« In generale poi si vede che, elevando sufficientemente il grado del potenziale, divengono possibili assi di simmetria di periodo qualunque, e precisamente: 1° perchè esista un asse di periodo pari $2r$, distinto da un asse di isotropia, il potenziale deve essere di grado non inferiore ad r; 2° perchè esista un asse di periodo dispari $2r+1$, distinto da un asse di isotropia, il potenziale deve essere di grado non inferiore ad $r+1$.

« Una volta fissato il grado che deve avere il potenziale e trovati gli invarianti ciclici corrispondenti, si potranno subito determinare le diverse forme del potenziale stesso per tutti gli assi di simmetria, compatibili col suo grado. Quindi in particolare si potranno ritrovare le forme note del potenziale nel caso, comunemente ammesso, che sia di 2° grado, per una via analoga a quella indicata come la più naturale dal prof. Beltrami, pei corpi isotropi.

« Noi però non insisteremo su queste ovvie applicazioni ».

Matematica. — *Sulle congruenze di grado* n *che si possono rappresentare sopra un piano.* Nota di P. VISALLI, presentata a nome del Socio CREMONA.

« 1. In questa Nota ci proponiamo lo studio delle congruenze di grado n, dotate, ciascuna, di un piano eccezionale σ contenente un numero semplicemente infinito di rette della congruenza, le quali inviluppano una curva ψ della classe $n-1$.

« Queste congruenze si possono rappresentare sul piano semplice σ.

« Sia C_n una di esse.

« Ad una retta a di C_n, corrisponde il punto $a\sigma$, e viceversa ogni punto di σ è immagine della retta di C_n passante per esso e non giacente, in generale, in σ.

« Sopra ogni tangente della curva ψ, vi è un punto, che in generale non coincide col punto di contatto, tale che per esso non passa alcuna retta di C_n esterna al piano σ. Il luogo di questi punti è una curva φ, che è l'immagine delle rette di C_n, giacenti in σ.

« Nel piano σ vi saranno dei punti P, eccezionali per la congruenza: x_1 semplici, x_2 doppi, ..., x_r r-pli; cioè tali che per ogni punto r-plo passa un numero semplicemente infinito di rette di C_n, che formano un cono di ordine r, ed altre $n-1-r$ tangenti alla curva ψ.

« 3. Le rette di C_n, che tagliano una retta a qualunque (asse), formano una superficie Γ dell'ordine $2n$, giacchè in un piano $a\,a'$ passante per a,