ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IV.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 aprile 1895.

F. Brioschi Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica matematica. — *Sul problema ottico degli anfiteatri.* Nota del Socio Pietro Blaserna.

« I. La disposizione dei sedili in un anfiteatro deve corrispondere alla condizione, che tutte le persone intervenute ad una dimostrazione o ad una rappresentazione, in qualunque fila siedano, possano vedere quegli oggetti, per cui sono convenuti. La questione si riduce, in pratica, alla scelta di un punto, che tutti devono poter vedere e che è quasi sempre o il centro di un'area più o meno vasta, o un punto limite di questa. La scelta di tale punto dipende dalle condizioni speciali, che guidarono nella costruzione dell'anfiteatro e da una serie di considerazioni d'indole pratica e talvolta anche teorica.

« Il modo classico di disporre un anfiteatro consiste nel collocare le file dei sedili sopra un piano inclinato, la cui inclinazione si fa dipendere da condizioni speciali e talvolta anche da considerazioni architettoniche. Il modo è semplice, ma non è razionale. Con esso le prime file hanno innanzi a sè spazio libero più del necessario, mentre le ultime ne difettano; per cui un architetto desideroso di favorire tutti, deve esagerare la pendenza, con grave scapito dell'architettura e della prospettiva.

« Una semplice considerazione basta a dimostrare la fallacia di tale modo di costruzione. Se noi avessimo gli occhi nella parte più alta del capo, basterebbe scegliere il punto O, che tutti devono vedere, prendere l'altezza raggiunta dalla testa della persona seduta in prima fila, e condurre la visuale da O alla sommità di questa testa. Si avrebbe con ciò la pendenza da darsi al piano inclinato dell'anfiteatro, e basterebbe aumentarla, in via prudenziale, di alcun poco, perchè il problema fosse risoluto.

« Ma noi non abbiamo gli occhi a fior di testa, bensì da 12-15 centimetri più in basso, senza parlare della copertura del capo, che può aumentare sensibilmente tale differenza. Ne segue che la visuale condotta nel modo indicato, già nella seconda fila andrebbe a colpire la sommità della testa, ma non gli occhi della persona seduta. Se vogliamo quindi, che questa veda il punto O, dobbiamo alzare il suo sedile come se il precedente fosse più alto di una quantità a, corrispondente alla detta differenza. La stessa considerazione vale per la terza, per la quarta fila e così di seguito, ciascuna delle quali deve supporsi alzata della quantità a colla regola ora indicata.

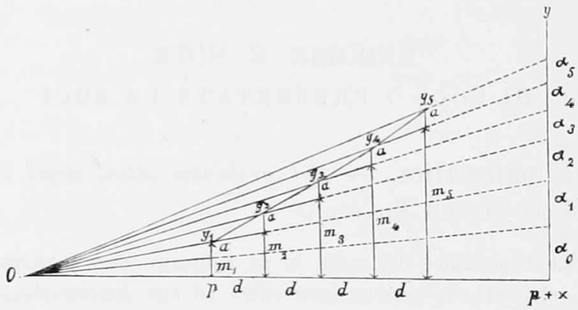

Fig. 1.

« La fig. 1 serve a chiarire il concetto. Se m_1 rappresenta l'altezza degli occhi della persona seduta in prima fila, $y_1 = m_1 + a$ è l'altezza totale. Nello stesso modo m_2 è l'altezza degli occhi per la persona di seconda fila, e $y_2 = m_2 + a$ l'altezza totale, e così via. Per i punti $y_1\, y_2\, y_3\, y_4\, y_5$ si può far passare una curva, che rappresenta la pendenza variabile dell'anfiteatro. Le ordinate singole sono facili a calcolarsi. Chiamiamo p la distanza del punto O dalla prima fila, d la distanza costante tra fila e fila; dalla somiglianza dei triangoli si ha

$$y_1 = m_1 + a$$

$$y_2 = m_2 + a = (m_1 + a) \cdot \frac{p + d}{p} + a$$

$$y_3 = m_3 + a = (m_2 + a) \cdot \frac{p + 2d}{p + d} + a$$

$$y_4 = m_4 + a = (m_3 + a) \cdot \frac{p + 3d}{p + 2d} + a$$

. . . . . .

$$y_n = m_n + a = (m_{n-1} + a) \frac{p + (n-1)d}{p + (n-2)d} + a$$

relazioni che servono a calcolare i punti definiti della curva, ogni qual volta si conoscano p, m_1, a e d. La curva che si ottiene, è molto pronunciata; da cui si deduce che sostituendovi una retta, come si faceva negli antichi anfiteatri, si era molto lontani dalla soluzione del problema ottico.

« Per persuadersene, basta calcolare un esempio numerico. Pongo, come è press'a poco il caso dell'anfiteatro nell'Istituto fisico di Roma,

$$m_1 = \overset{m}{0},20 \ , \ a = \overset{m}{0},20 \ , \ p = \overset{m}{3},60 \ , \ d = \overset{m}{0},90$$

si ha la seguente tabella:

	I diff.	II. diff.	III. diff. (negat.)	Curva logaritmica (Cap. II.)	Diff. tra le due curve
$y_1 = \overset{m}{0},4000$				$y_1 = \overset{m}{0},4000$	0,0000
	$\overset{m}{0},3000$				
$y_2 = 0,7000$		400		$y_2 = 0,7231$	0,0231
	3400		67		
$y_3 = 1,0400$		333		$y_3 = 1,0866$	0,0466
	3733		47		
$y_4 = 1,4133$		286		$y_4 = 1,4835$	0,0702
	4019		36		
$y_5 = 1,8152$		250		$y_5 = 1,9090$	0,0938
	4269		28		
$y_6 = 2,2421$		222		$y_6 = 2,3697$	0,1276
	4491		22		
$y_7 = 2,6912$		200		$y_7 = 2,8326$	0,1414
	4691		18		
$y_8 = 3,1603$		182		$y_8 = 3,3255$	0,1652
	4873		15		
$y_9 = 3,6476$		167		$y_9 = 3,8367$	0,1891
	5040		13		
$y_{10} = 4,1516$		154		$y_{10} = 4,3645$	0,2129
	5194				
$y_{11} = 4,6710$				$y_{11} = 4,9077$	0,2367

« Questa tabella è molto istruttiva. Confrontando le cifre della colonna colle I. differenze, per la curva calcolata colle relazioni precedenti, si vede che queste differenze importano tra la 1ª e la 2ª fila 30, tra la 10ª e la 11ª quasi 52 centimetri. La salita della curva è quindi piccola al principio e poi si accentua più e più. Ne segue l'inconveniente pratico, che la gradinata che dà l'accesso alle singole file, non può essere uniforme. Si vede difatti che, mentre la pendenza tra la prima e la seconda fila può essere superata con tre gradini di 10 centimetri di altezza ciascuno, la pendenza all'ultima fila richiede tre gradini di 17 centimetri. Ma questo inconveniente, piccolo in sè, è compensato dal vantaggio grandissimo, di risolvere il problema ottico col minor sviluppo possibile dell'anfiteatro. Difatti, se si volesse adottare per l'anfiteatro l'altezza risultante dal calcolo precedente per l'ultima fila in metri 4.6710, ma mantenere il piano inclinato, si avrebbe tra fila e fila la pendenza uniforme di $0^{m},4271$, pendenza eccessiva fino alla quinta fila, buona tra la quinta e la sesta, insufficiente per le rimanenti file, per cui le ultime rimarrebbero sagrificate. Se si volesse invece favorire l'ultima fila, mantenendo la sua pendenza regolare di $0^{m},5194$ anche per tutte le altre, bisognerebbe dare a tutto l'anfiteatro l'altezza di $5^m,594$ invece di $4^m,671$, alzandolo quindi di 92 centimetri. Ne segue che l'antico modo di costruzione non può considerarsi come razionale.

« Dalla stessa tabella risulta inoltre, che anche le II. differenze sono tutt'altro che costanti; per cui la curva non solo si scosta notevolmente dalla linea retta, ma anche dalla parabolica.

« II. La curva, che passa per i punti $y_1\, y_2\, y_3 \ldots y_n$ corrispondenti alle ascisse $p\,,p + d\,,p + 2d \ldots p + x$, è dunque di ordine superiore, e sorge spontaneo il desiderio di conoscerne la natura e la forma. Posto in questi termini generali, il problema è indeterminato, perchè si possono p. e. immaginare moltissime funzioni periodiche, che soddisfino alla condizione di passare per quei punti. Vogliamo quindi per ora restringere il problema alla ricerca della funzione più semplice, continua e aperiodica.

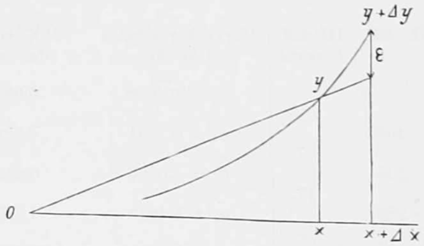

Fig. 2.

« Supponiamo che all'ascissa x corrisponda l'ordinata y. Se x aumenta di $\varDelta x$, y diviene $y + \varDelta y$. Dalla somiglianza dei triangoli si ha

$$(y + \varDelta y - \varepsilon) : y = (x + \varDelta x) : x$$

da cui

$$x \varDelta y - y \varDelta x = x\varepsilon\,,$$

dove ε rappresenta una quantità piccola, dell'ordine di $\varDelta x$. Passando ai differenziali e dividendo per x^2, si ha

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\varepsilon}{x}$$

e si tratta di trovare l'espressione di ε. Ora la supposizione più semplice, è questa: di scegliere ε in modo che divenga uguale ad a, quando $\varDelta x$ passi a essere uguale a d, dove d rappresenta la distanza costante tra una fila e la successiva. Abbiamo quindi

$$\varepsilon = \frac{a}{d}\, dx$$

e sostituendo

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{a}{d}\,\frac{dx}{x}$$

da cui

$$\frac{y}{x} = b + \frac{a}{d} \log x \quad \text{ossia} \quad y = bx + \frac{a}{d}\, x \log x \tag{1}$$

dove b rappresenta la costante d'integrazione, da determinarsi dalle condizioni speciali del problema. Per $x = 1$, si ha $y = b$, il che vuol dire che b è la prima ordinata corrispondente all'ascissa 1.

« La supposizione, che abbiamo fatto ponendo $\varepsilon = \frac{a}{d}\,dx$, è la più semplice, ma non è rigorosamente vera; perchè confonde la curva, che riunisce due punti y e y' posti su due ordinate alla distanza d, colla retta tirata fra i due medesimi punti. La quantità ε è in fondo più piccola di quanto risulta da quella supposizione. Ne segue che l'equazione (1) non è rigorosamente esatta e deve condurre per y a valori troppo alti. Per vedere fino a che punto di approssimazione si arrivi, ho calcolato coi medesimi dati dell'esempio numerico precedente, la curva, i cui valori sono riportati nella tabella del cap. I. La differenza tra questa ed i valori esatti non è molto grande, ma non è trascurabile, salendo per l'ultima fila fino a 23 centimetri. Una migliore concordanza si ottiene, considerando l'equazione (1) come una formola empirica, con due costanti a e b da determinarsi. Prendendo p. e. come punti fissi quelli della prima e dell'ultima fila, e calcolando da essi non solo b, ma anche a, si trova

$$a = 0{,}18649 \quad \text{invece di} \quad a = 0{,}20000$$

e per una fila intermedia, p. e. per la settima

$$y_7 = 2{,}7089 \quad \text{invece di} \quad y_7 = 2{,}6912 \quad \text{diff. } 0{,}0177$$

vale a dire una differenza praticamente insignificante di meno di 2 centimetri. Ne segue che l'equazione (1) risolve bensì il problema dal punto di vista pratico, ma non in via teorica.

« Che questo sia così, si può dimostrare anche direttamente. Ponendo in (1) $x + d$ al luogo di x, si ha

$$y' = b\,(x + d) + \frac{a}{d}\,(x + d)\log(x + d)$$

Ora, la condizione fondamentale e caratteristica del problema è che

$$(y' - a) : y = (x + d) : x$$

da cui

$$y' - \frac{x + d}{x} \cdot y = a \qquad (2)$$

« Ma se si sostituiscono in (2) i valori, si ha con breve riduzione per il primo membro dell'equazione

$$\frac{a}{d}\,(x + d)\,\log\left(1 + \frac{d}{x}\right)$$

il quale valore, invece di essere uguale ad a, è invece espresso dalla serie infinita

$$a\left\{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{x} - \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{d^2}{x^2} + \frac{1}{3\cdot 4}\cdot\frac{d^3}{x^3} - \cdots\cdots\right\},$$

che diviene uguale ad a soltanto per $\lim x = \infty$.

« Scrivendo $p + x$ per x, dove p rappresenta l'ascissa corrispondente alla prima fila, la (1) diviene

$$y = b\,(p + x) + \frac{a}{d}\,(p + x)\log(p + x) \qquad (3)$$

« III. Prolungando in fig. 1 le visuali corrispondenti alle singole file fino ad una ordinata y corrispondente all'ascissa arbitraria $p+x$, si hanno, sempre per la somiglianza dei triangoli, le seguenti equazioni

$$\text{per la } 1^a \text{ fila} \begin{cases} \alpha_0 = m_1 \dfrac{p+x}{p} \\ \alpha_1 = a \cdot \dfrac{p+x}{p} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \text{per la } 2^a \text{ fila} \quad \alpha_2 = a \cdot \dfrac{p+x}{p+d} \\ \quad \text{»} \quad 3^a \quad \text{»} \quad \alpha_3 = a \cdot \dfrac{p+x}{p+2d} \end{array}$$

$$\text{per la } n^a \text{ fila} \qquad \alpha_n = a \cdot \frac{p+x}{p+(n-1)d}$$

da cui $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n = \dfrac{m_1}{p}(p+x)+a(p+x)\left\{\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p+d}+\right.$

$$\left.+\frac{1}{p+2d}+\cdots+\frac{1}{p+(n-1)d}\right\}$$

« Per trovare la somma della serie finita, messa entro parentesi, prendiamo la progressione geometrica

$$s = z^{p-1} + z^{p+d-1} + z^{p+2d-1} + \cdots + z^{p+(n-1)d-1} = z^{p-1} \cdot \frac{1-z^{nd}}{1-z^d}$$

« Moltiplicando per dz e integrando fra 0 e z, per togliere la costante d'integrazione, si ha

$$\int_0^z s dz = \frac{z^p}{p} + \frac{z^{p+d}}{p+d} + \frac{z^{p+2d}}{p+2d} + \cdots + \frac{z^{p+(n-1)d}}{p+(n-1)d} = \int_0^z z^{p-1} \cdot \frac{1-z^{nd}}{1-z^d}\, dz$$

« L'integrale, in quella forma generale, non può determinarsi altro che mediante successive integrazioni per parti e riconduce alla serie finita di sopra. Ma esso rappresenta la somma di una serie più generale di quella che si cerca e diviene uguale a questa, quando si ponga $z=1$. Quindi

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p+d} + \frac{1}{p+2d} + \cdots + \frac{1}{p+(n-1)d} = \int_0^1 z^{p-1} \cdot \frac{1-z^{nd}}{1-z^d}\, dz \qquad (4)$$

« Sia

$$z^d = u \ , \ z = u^{\frac{1}{d}} \ , \ z^{p-1} = u^{\frac{p-1}{d}} \ , \ dz = \frac{1}{d} u^{\frac{1}{d}-1} du$$

l'integrale in (4) si trasforma in

$$\frac{1}{d} \int_0^1 u^{\frac{p}{d}-1} \cdot \frac{1-u^n}{1-u}\, du$$

ed eseguendo la moltiplicazione e aggiungendo e togliendo 1 nel numeratore, si ha

$$\frac{1}{d} \int_0^1 \frac{1-u^{\frac{p}{d}+n-1}-(1-u^{\frac{p}{d}-1})}{1-u}\, du = \frac{1}{d} \int_0^1 \frac{1-u^{\frac{p}{d}+n-1}}{1-u}\, du - \qquad (5)$$

$$- \frac{1}{d} \int_0^1 \frac{1-u^{\frac{p}{d}-1}}{1-u}\, du$$

Questi due ultimi integrali appartengono ad un tipo, che l'analisi contempla ed al quale essa ha dedicato un importante capitolo. Sono le *funzioni gamma* in una forma tutta speciale. Secondo queste, si ha

$$\frac{d \log \Gamma(\mu)}{d\mu} = \mathrm{Z}(\mu) = -\mathrm{A} + \int_0^1 \frac{1-u^{\mu-1}}{1-u}\, du \tag{6}$$

dove il simbolo $\Gamma(\mu)$ è rappresentato dall'integrale definito

$$\Gamma(\mu) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{\mu-1}\, dx$$

ed $\mathrm{A} = 0{,}5772156\ldots$ è una costante $= -\mathrm{Z}(1)$.

« Ponendo nella (6) prima $\mu = \frac{p}{d} + n$, poi $\mu = \frac{p}{d}$, si ha

$$\int_0^1 \frac{1-u^{\frac{p}{d}+n-1}}{1-u} \cdot du = +\mathrm{A} + \mathrm{Z}\left(\frac{p}{d}+n\right)$$

$$\int_0^1 \frac{1-u^{\frac{p}{d}-1}}{1-u} \cdot du = +\mathrm{A} + \mathrm{Z}\left(\frac{p}{d}\right)$$

e sostituendo questi valori in (5) e in (4)

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p+d} + \frac{1}{p+2d} + \cdots + \frac{1}{p+(n-1)d} = \frac{1}{d}\left\{\mathrm{Z}\left(\frac{p}{d}+n\right) - \mathrm{Z}\left(\frac{p}{d}\right)\right\}$$

e quindi

$$y_n = \frac{m_1}{p}(p+x) + \frac{a}{d}(p+x)\left\{\mathrm{Z}\left(\frac{p}{d}+n\right) - \mathrm{Z}\left(\frac{p}{d}\right)\right\} \tag{7}$$

dove n è un numero intero, progressivo, e indica la fila contemplata. La quantità p è arbitraria, purchè sia positiva, le funzioni Γ e Z essendo valide per soli valori positivi; y_n è l'ordinata corrispondente a un numero n di file projettate sopra di essa a una distanza (ascissa) arbitraria $p+x$. La quantità m_1 (o meglio $m_1 + a$) significa l'ordinata della prima fila.

« IV. Per verificare la equazione (7) e per vederne chiaramente il significato, poniamo secondo una nota relazione

$$\Gamma\left(\frac{p}{d}+n\right) = \frac{p}{d}\left(\frac{p}{d}+1\right)\left(\frac{p}{d}+2\right)\cdots\left(\frac{p}{d}+n-1\right)\Gamma\left(\frac{p}{d}\right)$$

valevole per qualsiasi valore di $\frac{p}{d}$, purchè positivo e per valori interi di n.

$$\log \Gamma\left(\frac{p}{d}+n\right) = \log\left(\frac{p}{d}\right) + \log\left(\frac{p}{d}+1\right) + \log\left(\frac{p}{d}+2\right) + \cdots$$
$$+ \log\left(\frac{p}{d}+n-1\right) + \log \Gamma\left(\frac{p}{d}\right)$$

e prendendo le derivate e considerando che

$$\frac{d \log \Gamma\left(\frac{p}{d}+n\right)}{d\left(\frac{p}{d}\right)} = \mathrm{Z}\left(\frac{p}{d}+n\right) \quad , \quad \frac{d \log \Gamma\left(\frac{p}{d}\right)}{d\left(\frac{p}{d}\right)} = \mathrm{Z}\left(\frac{p}{d}\right)$$

si ha $\quad Z\left(\frac{p}{d}+n\right)-Z\left(\frac{p}{d}\right)=\frac{d}{p}+\frac{d}{p+d}+\frac{d}{p+2d}+\cdots+\frac{d}{p+(n-1)d}$

quindi

$$y_n=\frac{m_1}{p}(p+x)+a(p+x)\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{p+d}+\frac{1}{p+2d}+\cdots+\frac{1}{p+(n-1)d}\right\}$$

« Scrivendo $n+1$ in luogo di n, si ha

$$y_{n+1}=\frac{m_1}{p}(p+x)+a(p+x)\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{p+d}+\frac{1}{p+2d}+\cdots+\frac{1}{p+(n-1)d}+\frac{1}{p+nd}\right\}$$

per cui $\qquad y_{n+1}-y_n=a\,(p+x)\cdot\frac{1}{p+nd}$

« I valori di y_{n+1} e y_n si riferiscono alla medesima ordinata, posta alla distanza arbitraria $p+x$. Se si vogliono riferire all'ultima fila contemplata, dell'ordine $n+1$, bisogna porre $x=nd$. Si ha

$$y_{n+1}-y_n=a$$

il che è rigorosamente conforme alla condizione del problema.

« Per indicare, in tesi generale e in conformità di tutto il precedente ragionamento, che x si riferisce alla fila n, poniamo

$$x=(n-1)\,d \quad \text{ossia} \quad n=\frac{x}{d}+1$$

per cui la formola (7) diviene

$$y=\frac{m_1}{p}(p+x)+\frac{a}{d}(p+x)\left\{Z\left(\frac{p+x}{d}+1\right)-Z\left(\frac{p}{d}\right)\right\} \tag{8}$$

ossia, considerando che

$$\Gamma\left(\frac{p+x}{d}+1\right)=\frac{p+x}{d}\cdot\Gamma\left(\frac{p+x}{d}\right)$$

quindi $\qquad Z\left(\frac{p+x}{d}+1\right)=\frac{d}{p+x}+Z\left(\frac{p+x}{d}\right)$

la formola (8) prende anche la forma

$$y=a+\frac{m_1}{p}(p+x)+\frac{a}{d}\,(p+x)\left\{Z\left(\frac{p+x}{d}\right)-Z\left(\frac{p}{d}\right)\right\} \tag{9}$$

« La restrizione che x sia un multiplo di d, non pregiudica la generalità della soluzione, perchè nelle formole finali (8) e (9) figura sempre $p+x$ e non x soltanto; ed essendo p un valore arbitrario, purchè positivo, anche $p+x$ può avere un valore positivo qualsiasi. Con queste formole è data quindi la soluzione generale del problema. Possiamo ora semplificare la (8) ponendo $\qquad \frac{p+x}{d}=u$

dove u rappresenta una nuova variabile, la quale può assumere tutti i valori da $u=0$ fino a $u=\infty$, e considerando che il termine $Z\left(\frac{p}{d}\right)$ è costante, ponendo $\qquad c=\frac{md}{p}-a\,Z\left(\frac{p}{d}\right)$

la (8) assume la forma semplice e generale

$$y=cu+au\,Z\,(u+1) \tag{10}$$

Si osserverà la grande rassomiglianza di questa equazione colla equazione approssimata logaritmica (3).

« Per fare anche meglio risaltare tale somiglianza, basta trasformare la (3) nello stesso modo, come abbiamo trasformato la (8). Ponendo di nuovo

$$\frac{p+x}{d}=u \quad , \quad c=bd+a\log d$$

la (3) diviene infatti $\qquad y=cu+au\log u\,.$

In ambedue la c è una costante da determinarsi sulle condizioni speciali del problema, e la sola differenza sta in ciò, che al posto di un logaritmo figura una funzione Z. Ma se le due equazioni hanno una forma esterna consimile, la loro vera natura non cessa per ciò di essere diversa. Difatti le funzioni Z possono esprimersi colla serie seguente

$$Z(\mu)=\lim\left\{\log n-\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\mu+1}-\frac{1}{\mu+2}-\cdots\frac{1}{\mu+n}\right\} \quad \text{per} \quad \lim n=\infty$$

da cui risulta che soltanto per $\lim\mu=\infty$, si può porre

$$\lim Z(\mu)=\lim\log n$$

vale a dire, la funzione Z si avvicina indefinitamente al logaritmo soltanto per valori grandissimi del suo argomento.

« V. Il medesimo problema può risolversi anche per altra via. Come appare dalla fig. 3, quando $p+x$ diviene $p+x+d$, y diviene y' e sempre per la solita somiglianza dei triangoli si ha

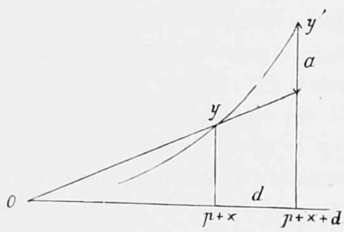

Fig. 3.

$$y'-a=y\cdot\frac{p+x+d}{p+x}$$

ossia

$$y'=y\cdot\frac{p+x+d}{p+x}+a$$

Ponendo $y=f(p+x)$, $y'=f(p+x+d)$ si ha l'equazione funzionale

$$f(p+x+d)=\frac{p+x+d}{p+x}f(p+x)+a$$

che si tratta di risolvere. Poniamo $x=0$, si ha

$$f(p+d)=\frac{p+d}{p}f(p)+a\,.$$

« Prima di proseguire, conviene avvertire che $f(p)$ è il valore dell'ordinata per la prima fila. La soluzione più semplice, consiste nel considerarla costante e per avere una formola direttamente paragonabile alle (8) e (9), porremo $f(d)=m_1+a$; avremo

per la 2ª fila: $\quad f(p+d)=\dfrac{m_1}{p}(p+d)+a(p+d)\left\{\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p+d}\right\}$

Ponendo successivamente $x=d$, $2d,\cdots(n-1)d$, con sostituzioni successive avremo

per la 3ª fila: $\quad f(p+2d)=m_1\cdot\dfrac{p+2d}{p}+a(p+2d)\left\{\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p+d}+\dfrac{1}{p+2d}\right\}$

. . . .

per la n^a fila: $f(p+(n-1)d) =$

$$= m_1 \cdot \frac{p+(n-1)d}{p} + a(p+(n-1)d)\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{p+d}+\frac{1}{p+2d}+\cdots+\frac{1}{p+(n-1)d}\right\}$$

La serie finita evidentemente è la stessa di quella del cap. III., per la quale abbiamo trovato il valore

$$\frac{1}{d}\left\{Z\left(\frac{p}{d}+n\right)-Z\left(\frac{p}{d}\right)\right\}$$

e sostituendo $x=(n-1)d$, colle stesse avvertenze e colle stesse trasformazioni di prima, si hanno formole identiche alla (8), alla (9) e alla (10).

« Fin qui abbiamo tacitamente supposto, che le persone contemplate per le singole file e il punto O siano collocati nel medesimo piano verticale, normale alle file dei sedili. Questo è il caso, quando l'anfiteatro abbia la forma di un semicerchio e il punto O si trovi nel centro del medesimo. Per altre forme di costruzione il caso è raro e vi sono ben pochi i posti, per i quali quella condizione si verifichi. Si può però facilmente dimostrare, che le formole trovate valgono anche per gli altri posti. Siano le rette (1)(1), (2)(2), (3)(3) le projezioni delle file sopra un piano orizzontale che passi per il punto O; sia OA il piano verticale normale, OB un altro piano verticale formante col primo un angolo ω; le distanze p, d, $p+x$ diventano relativamente $\frac{p}{\cos\omega}$, $\frac{d}{\cos\omega}$, $\frac{p+x}{\cos\omega}$ ed introducendo questi valori nella formola (8), si vede che $\cos\omega$ scompare dalla equazione, la quale rimane inalterata.

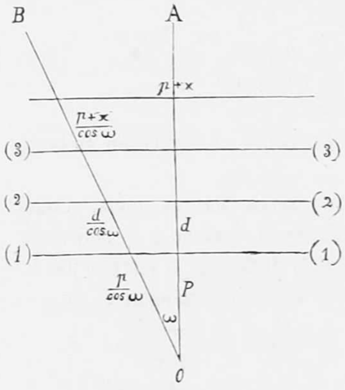

Fig. 4.

« L'equazione (8) e quindi anche la (9) e la (10) sono dunque applicabili alle visuali oblique e la soluzione del problema ottico vale per tutti gli spettatori.

« VI. L'equazione

$$y = cu + au\,Z(u+1)\ , \quad \text{in cui} \quad c=\frac{md}{p}-aZ\left(\frac{p}{d}\right) \qquad (10)$$

è dunque la soluzione generale del problema. Giova quindi esaminarne l'andamento.

« 1. Ponendo $u=0$, considerando che $Z(1)=-0{,}57721\ldots\ldots$ si ha $y=0$; dunque la curva passa per l'origine delle coordinate. Dalla (10) si ha pure

$$\frac{y}{u}=\operatorname{tang}\varphi = c + a\,Z(a+1)$$

dove φ rappresenta l'angolo del vettore visuale colla orizzontale. Per $u = 0$ si ha

$$\tang \varphi_0 = c + aZ(1).$$

« La costante c può essere positiva o negativa, a seconda che $\frac{md}{p} \lesseqgtr aZ\left(\frac{a}{d}\right)$. Ne segue che anche $\tang \varphi_0$ può essere positiva o negativa; perchè $Z(1) = -0{,}57721\ldots$ è negativa. Abbiamo

$$\tang \varphi_0 \text{ positiva, quando } Z(1) > -\frac{c}{a}$$

$$\tang \varphi_0 \text{ negativa, quando } Z(1) < -\frac{c}{a}.$$

Nel primo caso la curva, partendo dall'origine delle coordinate, va subito nei positivi; nel secondo essa scende nei negativi, arriva a un minimo e ripassa l'asse delle ascisse rimanendo poi positiva.

« 2. Per trovare l'ascissa corrispondente al punto di passaggio per l'asse delle ascisse, basta porre

$$y = cu + auZ(u+1) = 0$$

condizione che è soddisfatta da $u = 0$ (origine delle coordinate) ed anche da

$$c + aZ(u+1) = 0, \quad \text{ossia} \quad Z(u+1) = -\frac{c}{a}.$$

Più difficili a trovare sono le condizioni del minimo. Dalla (10) si ha

$$\frac{dy}{du} = c + au\frac{dZ(u+1)}{du} + aZ(u+1) = 0.$$

Considerando che

$$Z(u+1) = -A + \int_0^1 \frac{1-z^u}{1-z}\,dz = \lim\left\{\log n - \sum_1^\infty \frac{1}{u+n}\right\} \quad \text{per } \lim n = \infty$$

$$\frac{dZ(u+1)}{du} = -\int_0^1 \frac{z^u \log z}{1-z}\,dz = +\lim \sum_1^\infty \frac{1}{(u+n)^2} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»}$$

$$\text{sostituendo } \frac{dy}{du} = c + a\lim\left\{\sum_1^\infty \frac{u}{(u+n)^2} + \log n - \sum_1^\infty \frac{1}{u+n}\right\} = 0.$$

« Le due somme Σ possono facilmente ridursi in una sola. La funzione messa entro parentesi assume quindi la forma

$$\lim\left\{\log n - \sum_1^\infty \frac{n}{(u+n)^2}\right\} \quad \text{per } \lim n = \infty$$

e rappresenta una nuova trascendente, simile alla Z, ma di un ordine superiore. Ponendola uguale a $\Phi(u+1)$, la sua definizione è data da

$$\Phi(u+1) = \frac{d[uZ(u+1)]}{du}$$

od anche da

$$\Phi(u+1) = \lim\left\{\log n - \frac{1}{(u+1)^2} - \frac{2}{(u+2)^2} - \cdots - \frac{n}{(u+n)^2}\right\} \text{per } \lim n = \infty.$$

Ciò posto, abbiamo per il minimo $c + a\,\Phi(u+1) = 0$, da cui $\Phi(u+1) = -\frac{c}{a}$. Riassumendo abbiamo questo rimarchevole risultato: Perchè vi sia un minimo, bisogna che $\frac{c}{a}$ abbia un valore tale, che risulti $Z(1) < -\frac{c}{a}$. Allora il minimo corrisponde a $\Phi(u+1) = -\frac{c}{a}$, e la curva ripassa l'asse delle ascisse per $Z(u+1) = -\frac{c}{a}$.

3. Quando si sia in possesso di tavole per le funzioni Γ e Z e anche per Φ, il calcolo della curva riesce sempre molto facile [1]. Così nell'esempio posto al cap. I., dove si ha

$$m = 0{,}20 \quad , \quad a = 0{,}20 \quad , \quad d = 0{,}90 \quad , \quad p = 3{,}60$$

si trova facilmente $c = -0{,}2012$

$\varphi_0 = -17^\circ 34'$ (inclinazione all'origine)

$u = 0{,}90$ (minimo)

$u = 2{,}24$ (la curva ripassa l'asse delle ascisse)

e per il controllo della curva nella parte positiva, p. e.

per $u = 4$ $\quad y = 0{,}400$ $\quad 1^a$ fila

$u = 10$ $\quad y = 2{,}692$ $\quad 7^a$ fila

valori esatti.

Ma anche senza le tavole, in casi speciali, il calcolo può ridursi a piccola cosa. Supponiamo, come è il caso dell'esempio al cap. I., che nella formola (9), non solo x, ma anche p, quindi pure $p + x$ siano un multiplo di d, allora

$$\frac{p}{d} = \nu \quad , \quad \frac{x}{d} = n$$

dove n e ν sono numeri interi. In quest'esempio $\nu = 4$ e per l'ultima (11^a) fila $n = 10$. Si ha quindi

$$y = 0{,}20 + 0{,}70 + 2{,}80 \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots \frac{1}{13} \right\} = 4{,}6710$$

valore identico a quello ivi trovato.

VII. La funzione, continua e aperiodica, messa nella sua forma più generale

$$y = cu + auZ(u+1)$$

dove u rappresenta qualsiasi valore positivo, è la funzione più semplice, che soddisfi alla condizione di passare per i punti singoli varie volte definiti; ma non è la sola. Si possono immaginare molte funzioni periodiche, che soddisfino alla stessa condizione. Lo sviluppo del cap. V. ci porge la via,

(1) Per le funzioni $\Gamma(\mu)$ esistono le tavole di Gauss da $\mu = 1{,}00$ a $\mu = 2{,}00$. Egli le chiama $\Pi(\mu - 1)$, ma è lo stesso. Esistono poi le tavole più complete di Legendre da $\mu = 1{,}000$ a $\mu = 2{,}000$. Infine le tavole di Gauss per $\Psi(\mu - 1) = Z(\mu)$ da $\mu = 1{,}00$ a $\mu = 2{,}00$. Renderebbe un vero servizio alla scienza chi volesse estenderle e pubblicarle in forma pratica.

dove come soluzione più semplice abbiamo considerato $f(p)$ come costante, mentre si poteva considerarla come funzione periodica opportunamente scelta. In forma anche più generale, se y data dalla relazione qui sopra indicata, rappresenta una soluzione, anche $y\,f\,(2\,\pi\,k\,(u-u_0))$ sarà una soluzione, purchè f sia una funzione periodica, che soddisfi alla condizione di essere $=1$, quante volte $u=u_0$, u_0+1, $u_0+2\ldots$ ecc, per u_0 intendendosi l'ascissa della prima fila, od anche questa ascissa diminuita di un numero intero, in modo però da rimanere positiva; k è pure un numero intero ed indica il numero delle oscillazioni, che si compiono tra fila e fila. Così, a titolo di esempio, si può porre

$$f(2\pi k(u-u_0))=\frac{2}{A_0}\left\{\frac{1}{2}A_0+A_1e^{-a_1u}\operatorname{sen}2\pi k(u-u_0)+A_2e^{-a_2u}\operatorname{sen}4\pi k(u-u_0)+\cdots\right\}$$

Si ottiene in questo caso una curva, che oscilla con ampiezze decrescenti e con forma complicata sopra e sotto la curva semplice y in modo, da passare per tutti i punti singoli fissati per questa e da compiere k oscillazioni in ogni intervallo compreso fra un punto fisso e il successivo. Non ho però bisogno di aggiungere, che con questa soluzione molto più generale si va al di là del problema ottico degli anfiteatri, perchè le visuali procedono per linee rette e non per curve periodiche ».

Meccanica. — *Sopra una proprietà degli integrali di un problema di meccanica che sono lineari rispetto alle componenti della velocità.* Nota del Socio V. Cerruti.

« 1. Perchè le equazioni del moto di un sistema di punti con n gradi di libertà

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_k'}-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k \qquad (k=1\,,2\,,\ldots n) \tag{1}$$

ammettano un integrale primo della forma

$$C_1q_1'+C_2q_2'+\cdots+C_nq_n'+C=\text{cost.}, \tag{2}$$

debbono essere soddisfatte dalle condizioni, che sono volgarmente conosciute, nel caso almeno che le C_i e le Q_i si presuppongono dipendere soltanto dalla configurazione del sistema, e che i vincoli, i quali limitano la mobilità del sistema stesso, non variano col tempo, vale a dire che è

$$T=\tfrac{1}{2}\sum_{ik}a_{ik}q_i'\,q_k'$$

una forma quadratica omogenea rispetto alle q_i'. Non sembra invece che sia stata espressamente osservata la identità delle mentovate condizioni con