ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IV.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

dove come soluzione più semplice abbiamo considerato $f(p)$ come costante, mentre si poteva considerarla come funzione periodica opportunamente scelta. In forma anche più generale, se y data dalla relazione qui sopra indicata, rappresenta una soluzione, anche $y\,f\,(2\,\pi\,k\,(u-u_0))$ sarà una soluzione, purchè f sia una funzione periodica, che soddisfi alla condizione di essere $=1$, quante volte $u=u_0$, u_0+1, $u_0+2\ldots$ ecc, per u_0 intendendosi l'ascissa della prima fila, od anche questa ascissa diminuita di un numero intero, in modo però da rimanere positiva; k è pure un numero intero ed indica il numero delle oscillazioni, che si compiono tra fila e fila. Così, a titolo di esempio, si può porre

$$f(2\pi k(u-u_0))=\frac{2}{A_0}\left\{\frac{1}{2}A_0+A_1e^{-a_1u}\operatorname{sen}2\pi k(u-u_0)+A_2e^{-a_2u}\operatorname{sen}4\pi k(u-u_0)+\cdots\right\}$$

Si ottiene in questo caso una curva, che oscilla con ampiezze decrescenti e con forma complicata sopra e sotto la curva semplice y in modo, da passare per tutti i punti singoli fissati per questa e da compiere k oscillazioni in ogni intervallo compreso fra un punto fisso e il successivo. Non ho però bisogno di aggiungere, che con questa soluzione molto più generale si va al di là del problema ottico degli anfiteatri, perchè le visuali procedono per linee rette e non per curve periodiche ».

Meccanica. — *Sopra una proprietà degli integrali di un problema di meccanica che sono lineari rispetto alle componenti della velocità.* Nota del Socio V. Cerruti.

« 1. Perchè le equazioni del moto di un sistema di punti con n gradi di libertà

$$\text{(1)}\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_k'}-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k\qquad (k=1\,,2\,,\ldots n)$$

ammettano un integrale primo della forma

$$\text{(2)}\qquad C_1q_1'+C_2q_2'+\cdots+C_nq_n'+C=\text{cost.},$$

debbono essere soddisfatte dalle condizioni, che sono volgarmente conosciute, nel caso almeno che le C_i e le Q_i si presuppongono dipendere soltanto dalla configurazione del sistema, e che i vincoli, i quali limitano la mobilità del sistema stesso, non variano col tempo, vale a dire che è

$$T=\tfrac{1}{2}\sum_{ik}a_{ik}\,q_i'\,q_k'$$

una forma quadratica omogenea rispetto alle q_i'. Non sembra invece che sia stata espressamente osservata la identità delle mentovate condizioni con quelle per la possibilità di un movimento rigido nello spazio multiplo S_n, pel quale

$$(3) \qquad ds^2 = \sum_{ik} a_{ik}\, dq_i\, dq_k$$

è il quadrato dell'elemento lineare. Tale identità si può facilmente ricavare da varie comunicazioni del sig. M. Levy all'Accademia delle scienze di Parigi [1], ma col procedimento qui appresso si rende come intuitiva.

Posto per compendio

$$a = \sum (\pm\, a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn})\,, \quad \alpha_{ik} = \frac{\partial \log a}{\partial a_{ik}}\,,$$

dalla (1) moltiplicata per α_{ik} e dopo aver sommato rispetto all'indice k, si trae, utilizzando i simboli di Christoffel a tre indici di seconda specie relativi alla forma quadratica (3),

$$(4) \qquad q_i'' + \sum_{rs} \begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix} q_r'\, q_s' = V_i \qquad (i = 1\,, 2\,, \ldots n)$$

con

$$V_i = \sum_k \alpha_{ik}\, Q_k\,.$$

Perchè la (2) sia un integrale delle (1) e quindi delle (4), bisognerà che in virtù delle (4) si abbia identicamente

$$\sum_i C_i\, q_i'' + \sum_{rs} \frac{\partial C_r}{\partial q_s} q_r'\, q_s' + \sum_i \frac{\partial C}{\partial q_i} q_i' = 0\,,$$

ossia

$$\sum_{rs} \left[\frac{\partial C_r}{\partial q_s} + \frac{\partial C_s}{\partial q_r} - 2 \sum_i \begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix} C_i \right] q_r'\, q_s' + \sum_i \frac{\partial C}{\partial q_i} q'_i + \sum_i C_i\, V_i = 0\,;$$

e questa equazione, quando le C_i e le V_i dipendono soltanto dalle q_i, si spezza nelle seguenti:

$$(5) \qquad \frac{\partial C_r}{\partial q_r} = \sum_i \begin{Bmatrix} rr \\ i \end{Bmatrix} C_i\,, \quad \frac{\partial C_r}{\partial q_s} + \frac{\partial C_s}{\partial q_r} = 2 \sum_i \begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix} C_i\,, \quad (r\,, s = 1\,, 2\,, \ldots n)$$

$$\frac{\partial C}{\partial q_i} = 0\,, \qquad (i = 1\,, 2\,, \ldots n)$$

$$(6) \qquad \sum_i C_i\, V_i = 0\,.$$

Cioè la C deve ridursi ad una costante che si può anche supporre nulla:

[1] V. Comptes rendus de l'Acad. des Sc. de Paris, t. 86, pp. 463-466, 812-815, 875-878, 947-950.

quanto alle C_i, che sono in numero di n, debbono soddisfare le $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni (5) alle derivate parziali lineari del primo ordine. Dunque le equazioni (4), e quindi le (1), ammetteranno o non ammetteranno integrali della forma (2) secondochè le equazioni (5) hanno o non hanno soluzioni comuni. Quando le (5) hanno soluzioni comuni, la (6) stabilisce ancora una relazione che deve intercedere tra le forze, perchè sussista l'integrale (2).

« 2. Premesso ciò, si considerino nello spazio S_n tre punti M, M', M_1 infinitamente vicini di coordinate

$$q_1, q_2, \cdots q_n;$$
$$q_1 + dq_1, \; q_2 + dq_2, \cdots q_n + dq_n;$$
$$q_1 + d'q_1, \; q_2 + d'q_2, \cdots q_n + d'q_n;$$

accennando con ω l'angolo compreso fra i due elementi lineari $MM' = ds$, $MM_1 = ds_1$, si avrà, per cose note,

$$ds\, ds_1 \cos\omega = \sum_{ik} a_{ik}\, dq_i\, d'q_k .$$

Immaginiamo prodotta nello spazio S_n una deformazione infinitesima per effetto della quale il punto M passi nel luogo di coordinate $q_1 + \delta q_1$, $q_2 + \delta q_2, \cdots q_n + \delta q_n$: la variazione corrispondente di $ds\, ds_1 \cos\omega$ risulterà così espressa

$$(7) \qquad \delta \cdot ds\, ds_1 \cos\omega = ds\, ds_1 \cos\omega \left(\frac{d\delta s}{ds} + \frac{d\delta s_1}{ds_1}\right) - ds\, ds_1 \operatorname{sen}\omega\, \delta\omega$$
$$= \sum_{ik} \delta a_{ik}\, dq_i\, d'q_k + \sum_{ik} a_{ik} (d\delta q_i\, d'q_k + dq_i\, d'\delta q_k),$$

ossia

$$(7_1) \qquad \delta \cdot ds\, ds_1 \cos\omega = 2 \sum_{ik} \theta_{ik}\, dq_i\, d'q_k$$

dove

$$2\theta_{ik} = \delta a_{ik} + \sum_r \left(a_{rk} \frac{\partial \delta q_r}{\partial q_i} + a_{ri} \frac{\partial \delta q_r}{\partial q_k} \right).$$

Introduciamo in luogo delle δq altre funzioni u definite dalle equazioni

$$(8) \qquad u_k = \sum_r a_{rk}\, \delta q_r ,$$

allora, giovandoci de' simboli di Christoffel a tre indici di prima specie relativi alla forma (3), otteniamo per θ_{ik} l'espressione

$$\theta_{ik} = \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial q_i} + \frac{\partial u_i}{\partial q_k} \right) - \sum_r \begin{bmatrix} ik \\ r \end{bmatrix} \delta q_r :$$

Ma dalla (8) si trae inversamente

$$\delta q_r = \sum_g \alpha_{gr} u_g , \tag{9}$$

e si sa che

$$\sum \begin{bmatrix} ik \\ r \end{bmatrix} \alpha_{gr} = \begin{Bmatrix} ik \\ g \end{Bmatrix} ;$$

dunque, sostituendo nell'espressione trovata per θ_{ik} il valore di δq_r dato dalle (9), avremo

$$\theta_{ik} = \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial q_i} + \frac{\partial u_i}{\partial q_k} \right) - \sum_g \begin{Bmatrix} ik \\ g \end{Bmatrix} u_g , \tag{10}$$

che tra le varie forme sotto le quali si può mettere l'espressione di θ_{ik}, è la più appropriata al nostro scopo. Quanto al significato geometrico delle θ_{ik} esso discende immediatamente dalla (7).

Se è possibile nello spazio S_n un moto rigido, debbono potersi assegnare delle funzioni δq e quindi delle funzioni u tali che per esse risulti il secondo membro della (7_1) identicamente nullo, cioè tali che si abbia

$$\theta_{ii} = 0 , \quad \theta_{ik} = 0 , \quad (i , k = 1 , 2 , \ldots n) ,$$

od anche

$$\frac{\partial u_i}{\partial q_i} = \sum_g \begin{Bmatrix} ii \\ g \end{Bmatrix} u_g , \quad \frac{\partial u_k}{\partial q_i} + \frac{\partial u_i}{\partial q_k} = 2 \sum_g \begin{Bmatrix} ik \\ g \end{Bmatrix} u_g . \tag{11}$$

Ora queste equazioni, salvo la diversità de' simboli, collimano colle (5): dunque le condizioni (5), perchè le equazioni (1) ammettano un integrale della forma (2), si traducono in sostanza nelle condizioni, perchè sia possibile nello spazio S_n un moto rigido infinitesimo: diremo Σ questo moto rigido.

3. Quando sia possibile un cosiffatto movimento Σ, le C_i e le u_i corrispondenti non potranno differire che per un fattore costante lo stesso per tutte; si avrà cioè

$$u_i = \eta C_i ,$$

dove η è una costante infinitesima: con ciò la relazione (6) tra le forze, necessaria per la esistenza dell'integrale (2), si potrà scrivere

$$\sum u_i V_i = 0 ,$$

ossia

$$\sum_{ik} a_{ik} V_i \delta q_k = 0 . \tag{12}$$

E così scritta è suscettiva di una interpretazione elegante. Premettiamo che al moto del nostro sistema di punti può farsi corrispondere, come immagine, il moto di un punto M nello spazio S_n. La trajettoria di M si accenni con s.

Se il moto Σ si concepisce ripetuto indefinite volte, ogni punto di S_n descriverà una certa curva σ. Per il luogo occupato attualmente da M su s conduciamo un elemento MV nella direzione $V_1 : V_2 : \cdots : V_n$ e la tangente MT alla curva σ che passa per esso: la (12) dice che le due direzioni MV ed MT debbono essere perpendicolari fra loro.

« La ripetizione del moto Σ e quindi gli spostamenti δs de' varî punti di S_n sulla corrispondente curva σ si facciano corrispondere a' successivi incrementi $\delta\tau$ di una variabile ausiliaria τ: allora l'integrale (2) si potrà mettere sotto la forma

$$\sum_{ik} a_{ik}\, dq_i\, \delta q_k = \gamma \delta\tau\, dt\,,$$

dove γ è una costante arbitraria; od anche, se ω è l'angolo compreso fra le due direzioni $dq_1 : dq_2 : \cdots : dq_n$; $\delta q_1 : \delta q_2 : \cdots : \delta q_n$,

$$ds\, \delta s \cos \omega = \gamma \delta\tau\, dt\,. \tag{13}$$

Se le forze son nulle, la trajettoria di M è una geodetica di S_n, e $\frac{ds}{dt}$ costante. Immaginando questa costante compenetrata in γ, l'integrale (13) diventerà

$$\delta s \cos \omega = \gamma \delta\tau\,, \tag{14}$$

e, se si introducono nuovamente le funzioni C_i,

$$\sqrt{\sum_{ik} a_{ik}\, C_i\, C_k}\, \cos \omega = \gamma\,, \tag{14$_1$}$$

che costituisce per le geodetiche di uno spazio qualunque S_n, nel quale è possibile un moto rigido, l'analogo di un ben noto teorema relativo alle geodetiche tracciate sopra una superficie di rivoluzione ».

Chimica. — *Sulla costituzione del Dimetilnaftol proveniente dagli acidi santonosi.* Nota di S. Cannizzaro ed A. Andreocci.

« Nella Nota preliminare presentata nella seduta del 2 dicembre 1894, abbiamo annunziato lo studio intrapreso sul dimetilnaftol proveniente dalla decomposizione degli acidi santonosi; diamo ora rapido conto dei risultati ottenuti.

« Abbiamo trasformato il dimetilnaftol nella dimetilnaftilammina corrispondente, preparandone prima il derivato acetilico nel modo seguente. Abbiamo scaldato per circa otto ore tra 250° e 280° in tubi chiusi un miscuglio di 10 parti di dimetilnaftol, 24 di acetato sodico fuso, 10 di acido