ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IV.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

Astronomia. — *Eclisse totale di Luna dell' 11 Marzo 1895.* Nota del Socio P. Tacchini.

« Trovandomi assente da Roma, il Prof. Millosevich aveva stabilito un programma di osservazioni, che doveva essere da lui compiuto in unione all'assistente dell'Osservatorio Sig. D. Peyra e dall'assistente Prof. Palazzo. Il tempo cattivo però non permise che poche osservazioni, cioè alcune occultazioni di stelle che trovansi in B D Argelander che qui trascrivo, avvertendo che i tempi si riferiscono al meridiano dell' E. C.

Millosevich	Peyra	Palazzo
$+3^{o}.2505$ I $4^{h}.22^{m}.33^{s},15$ am	τ Leonis I $4^{h}.22^{m}.33,92$ (1)	
τ. Leonis I 4. 22. 33, 35 "	$+3,2502$ E 4. 35. 12,12	τ Leonis E $5^{h}.5^{m}.52^{s},68$ (2)
$+3,2506$ E 5. 19. 56, 97 "	$+3,2506$ E 5. 19. 58,05	
$+3,2507$ E 5. 31. 1, 52 "		

« Il cielo rasserenò, e per qualche istante completamente, verso le 5 $^1/_4$, e allora la colorazione apparve bellissima; la parte più cupa del disco era di colore rosso-rame, e nella parte adiacente all'arco lucido vi era una tinta azzurrina verdastra di spiccata vivezza, come risulta da un grazioso ricordo a colori fatto dal Sig. Peyra.

« Emersione a $5^{h}.28^{m}$; contatto dell'ombra col lembo orientale di *Grimaldi* (Palazzo); a $5^{h}.34^{m}$ *Aristarco* che già appariva lucido ancora prima che emergesse dall'ombra, è del tutto fuori da questa (Palazzo); a $5^{h}.45^{m},5$ il circolo terminatore dell'ombra tocca *Gassendi* e il *Capo Eraclide* (Peyra). Alle $6^{h}.26^{m}$ fra le nebbie dell'orizzonte, essendo prossimo a levare il sole, si accerta l'ultimo contatto coll'ombra (Millosevich) ».

Matematica. — *Ancora sulle equazioni differenziali lineari del 4° ordine, che definiscono curve contenute in superficie algebriche.* Nota di Gino Fano, presentata dal Socio Cremona.

« 1. In una Nota precedente (3) ho mostrato come ogni equazione differenziale lineare (omogenea) del 4° ordine, la quale definisca una curva Γ contenuta in una superficie algebrica F (dello spazio ordinario), sia integra-

(1) Probabile ritardo di $0^{s},5$.

(2) Probabile ritardo di $0^{s},3$.

(3) Cfr. questi Rend., p. 232 e seg. Sull'equazione differenziale proposta si supporranno fatte anche qui le stesse ipotesi della Nota prec.

bile con sole quadrature (più, forse, operazioni algebriche), quando la stessa superficie non ammette più di ∞^2 trasformazioni projettive in sè. È bene ora osservare che questo risultato è anche d'accordo colla *composizione* dei diversi gruppi di trasformazioni, che a noi si sono presentati. È noto infatti (Vessiot, Ann. Éc. Norm. Sup., 1892; Klein, *Einleitung in die höhere Geometrie* (lezioni litogr.), II, p. 297) che l'*integrazione di una data equazione differenziale lineare dipende essenzialmente dalla composizione del relativo* GRUPPO DI RAZIONALITÀ; e che, in particolare, l'*integrazione stessa può ricondursi a una serie di quadrature sempre e solo quando questo gruppo è* INTEGRABILE (¹) (Vessiot, l. c., p. 241; Klein, l. c., p. 298); quando cioè, supposto ch'esso sia ∞^k, esso contiene un sottogruppo *eccezionale* (²) ∞^{k-1}, quest'ultimo un sottogruppo eccezionale ∞^{k-2}, e così via (³). D'altra parte il *Gruppo di razionalità, o Gruppo di Picard-Vessiot* (⁴), di un'equa-

(¹) Denominazione usata per la prima volta dal sig. Lie nei Ber. der K. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig (1887). Il concetto di *gruppo integrabile* è però anteriore e risale ai primi lavori di Lie (cfr. ad es. i lavori inserti negli Atti della Società delle Scienze di Cristiania, 1874).

(²) « *Ausgezeichnete Untergruppe* » secondo F. Klein (l. c., p. 15); « *invariante Untergruppe* » secondo Lie (cfr. ad es.: *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. I, p. 261). Si chiama così un sottogruppo che venga trasformato in sè stesso da ogni operazione del gruppo complessivo (più ampio), dentro cui lo si considera.

(³) In generale dunque si richiede che vi sia tutto un sistema di $k-1$ sottogruppi ∞^{k-i} $(i=1, 2, \ldots k-1)$, tali che ciascuno di essi sia contenuto come sottogruppo eccezionale entro il precedente (∞^{k-i+1}) (cfr. ad es. Klein, l. c., p. 176; Lie, op. cit., vol. I., p. 265 e seg., vol. III., pp. 679, 680, 709; Lie-Scheffers, *Vorlesungen über continuirliche Gruppen* ....; p. 537).

(⁴) Oltre la Mem. cit. di Vessiot: *Sur l'intégration des équations différentielles linéaires* (Ann. Éc. Norm. Sup., 1892), cfr. anche Picard: Compt. Rend., 1883; Ann. de la Fac. d. Sc. de Toulouse, 1887; Compt. Rend., t. CXIX, séance du 8 oct. 1894. Questo *gruppo di razionalità* gode, rispetto all'equazione differenziale, di proprietà analoghe a quelle del gruppo (di Galois) di una data equazione algebrica; e la sua *composizione* (o *struttura*) determina appunto la natura (e la difficoltà) del problema di integrazione che dobbiamo risolvere, nello stesso modo in cui la composizione del gruppo di un'equazione algebrica qualsiasi determina la possibilità o meno di ricondurre la risoluzione di essa a quella di una serie di altre equazioni più semplici. Al caso (più semplice fra tutti) di un'equazione differenziale integrabile con sole quadrature corrisponderebbe, da un tal punto di vista, quello di un'equazione algebrica risolvibile per radicali. — Più generalmente, ogni singolo « fattore di decomposizione » (*Zerlegungsfactor*) del gruppo di razionalità determina e richiede un certo passo nel problema di integrazione, e un passo (in generale) tanto più difficile ed elevato, quanto più quel fattore è grande (cfr. Vessiot, Mem. cit., p. 235 e seg.). E in questo stesso ordine di idee rientra anche sostanzialmente ciò che nella Nota prec. (p. 234-235) abbiamo detto a proposito dei gruppi *misti*. Entro un tal gruppo, il (sotto)gruppo continuo massimo è appunto *eccezionale;* e come da questo si ottiene il primo moltiplicandolo per un *numero finito* di altre operazioni, così dal primo si ridiscende a questo mediante la risoluzione di un'*equazione algebrica*.

zione differenziale lineare è sempre il minimo gruppo *algebrico* contenente il gruppo monodromico di essa; e nei casi da noi considerati esso sarà perciò contenuto a sua volta nel gruppo (che è appunto algebrico) di tutte le trasformazioni projettive della superficie F in sè stessa, oppure coinciderà addirittura con quest'ultimo ([1]). Prescindendo perciò dal caso ch' esso contenga soltanto un numero finito di operazioni, esso non potrà essere che ∞^1 — e questo è un caso ovvio di gruppo integrabile — oppure ∞^2; ma allora dovrà coincidere con uno dei quattro gruppi considerati ai nn. 4 e 5 della mia Nota cit. E questi gruppi sono appunto tutti integrabili ([2]). Il primo di essi si compone infatti di operazioni *permutabili*, sicchè ogni suo sottogruppo ∞^1 è certamente eccezionale; il secondo contiene, per $\varrho=1$, un sottogruppo eccezionale di omografie biassiali, coi due assi infinitamente vicini alla retta $y_2=y_3=0$ (cfr. Enriques, Atti Ist. Ven., ser. 7ª, t. IV, p. 1627); il terzo contiene, ancora per $\varrho=1$, un sottogruppo eccezionale di omografie assiali, colla retta $y_3=y_4=0$ come asse, e due punti uniti coincidenti sopra questa, nel punto $y_2=y_3=y_4=0$; il quarto infine, per $\alpha=1$, un sottogruppo eccezionale ∞^1 con quattro punti uniti coincidenti ([3]).

" La possibilità di integrare l'equazione differenziale proposta, nei casi già considerati, senza ricorrere ad operazioni più elevate, trova dunque la sua conferma, anche se il gruppo di razionalità è ∞^2, nella composizione di questo gruppo ([4]).

" 2. Passiamo ora al caso in cui la superficie F (dello spazio S_3) ammette ∞^3 o più trasformazioni projettive in sè stessa. Escluso il caso del

([1]) A meno che non vi sia nel gruppo monodromico qualche operazione, in seguito alla quale tutti gli integrali risultino moltiplicati per uno stesso fattore. Allora alla considerazione del gruppo di trasformazioni projettive della superficie F bisognerebbe sostituire quella di un certo gruppo di sostituzioni lineari quaternarie, nel quale più, e forse infinite sostituzioni corrisponderebbero ad una stessa trasformazione projettiva dello spazio S_3. In seguito, faremo sempre astrazione da questo caso, il quale non porterebbe con sè che l'aggiunta, in tutti gli integrali, di uno stesso fattore esponenziale, determinabile con una quadratura (cfr. anche la nota ([2]) a pag. 236 di questi Rend.).

([2]) Possiamo verificarlo (e lo verificheremo appunto) in ciascuno dei quattro casi; ma dalle ricerche generali del sig. Lie risulta già senz'altro che ogni gruppo continuo ∞^2 deve essere integrabile (op. cit., vol. III., p. 681, 713).

([3]) Sulla cubica unita (cfr. la Nota prec. cit.) questo sottogruppo determina il fascio di omografie paraboliche coll'unico punto unito nel punto che è fisso per tutto il gruppo ∞^2.

([4]) Risulta anche confermato in ogni singolo caso il teorema di Vessiot (Mem. cit., p. 245): *Ogni equazione differenziale lineare integrabile con sole quadrature ammette un integrale avente per derivata logaritmica una funzione razionale* (ossia un integrale puramente moltiplicativo). Questo teorema è, d'altronde, una conseguenza immediata della forma a cui possono ridursi le equazioni di ogni gruppo integrabile di sostituzioni lineari (cfr. Lie, op. cit., vol. I, p. 589; Lie-Scheffers, op. cit., p. 537).

piano (perchè se no l'equazione differenziale proposta si ridurrebbe al 3° ordine), questa superficie non potrà essere che [1]:

1° *Una rigata cubica di Cayley* (ossia *colle due direttrici rettilinee infinitamente vicine*);

2° *Una sviluppabile biquadratica circoscritta a una cubica sghemba*;

3° *Un cono*;

4° *Una quadrica*.

« La rigata di Cayley ammette un gruppo continuo ∞^3 (e non più) di trasformazioni projettive, le cui equazioni possono ridursi alla forma:

$$(1)\qquad \begin{aligned} y_1^{(1)} &= y_1 \\ y_2^{(1)} &= \varrho\,(y_2 + \alpha y_1) \\ y_3^{(1)} &= \varrho^2\,(y_3 + 2\alpha y_2 + \beta y_1) \\ y_4^{(1)} &= \varrho^3\,(y_4 + 3\alpha y_3 + 3\beta y_2 + \alpha\,(3\beta - 2\alpha^2)\,y_1) \end{aligned}$$

dove ϱ, α, β sono i tre parametri. L'equazione della superficie è data allora da:

$$(2)\qquad y_4\,y_1^2 - 3y_1\,y_2\,y_3 + 2y_2^3 = 0$$

essendo $y_1 = y_2 = 0$ la direttrice rettilinea (unica); $y_1 = 0$ il piano che ha comune colla superficie questa sola retta, contata tre volte; $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ il punto da cui si deve ritenere uscente quella particolare generatrice, che è infinitamente vicina alla direttrice. Queste equazioni permettono di concludere senz'altro che la y_1 sarà funzione moltiplicativa (esponenziale di un integrale Abeliano) sulla data superficie di Riemann, e che i rapporti $\frac{y_2}{y_1}$ e $\frac{y_2^2 - y_1 y_3}{y_1^2}$ saranno integrali di tali funzioni, sicchè anche y_2 e y_3 si potranno ottenere con sole quadrature. La y_4 si potrà poi esprimere razionalmente mediante le altre tre soluzioni, essendo legata a queste dall'equazione (2).

« Anche qui del resto la possibilità di integrare l'equazione differenziale proposta con sole quadrature è d'accordo coll'essere il gruppo ∞^3 rappresentato dalle equazioni (1) un gruppo *integrabile* [2]. Esso contiene infatti, per $\varrho = 1$, un primo sottogruppo eccezionale costituito da ∞^2 omografie con uno stesso (unico) punto unito quadruplo (nel punto $y_1 = y_2 = y_3 = 0$); e poichè queste omografie sono fra loro permutabili, sarà pure eccezionale, entro questo gruppo

(1) Cfr. Lie, op. cit., vol. III, p. 196; Enriques, Atti Ist. Ven., ser. 7ª, t. IV e V.

(2) Il gruppo di razionalità dell'equazione differenziale potrebbe anche essere un sottogruppo ∞^2 o ∞^1 di questo gruppo ∞^3; ma anche in questo caso sarebbe egualmente integrabile (e non cesserebbe nemmeno di esserlo quando si presentasse il caso considerato nella nota (3) a p. 293).

∞^2, ogni sottogruppo ∞^1. In particolare, per $\varrho = 1$, $\alpha = 0$, si ha un sottogruppo ∞^1 (eccezionale anche nel gruppo ∞^3) di omografie biassiali (e precisamente di omografie rigate *speciali*) colla retta $y_1 = y_2 = 0$ come luogo di punti e inviluppo di piani uniti.

Quest'ultimo risultato, unito ai precedenti, ci permette di affermare che: *Se quattro soluzioni indipendenti dell'equazione differenziale lineare proposta* (cfr. la Nota prec., n. 2) *sono legate da un'equazione algebrica omogenea a coefficienti costanti* (*di grado superiore al primo*), *quell'equazione differenziale sarà certo integrabile con sole quadrature ed operazioni algebriche, quando la superficie rappresentata dall'equazione algebrica che si è supposta esistere non sia una sviluppabile circoscritta a una cubica sghemba, nè un cono, nè una quadrica.*

In questi tre casi invece l'integrazione della stessa equazione differenziale può richiedere, come ora vedremo, quella di una o due equazioni differenziali lineari di 2° ordine [1].

3. Il caso in cui la curva Γ definita dall'equazione differenziale proposta è contenuta in una sviluppabile biquadratica circoscritta a una cubica sghemba è stato già studiato dal sig. Goursat (Compt. Rend., t. C, p. 233); e, più tardi, anche da Ludw. Schlesinger (Diss. cit., p. 29-31). Il primo di essi ricorre anzi sostanzialmente a considerazioni geometriche. — Indicate con z_i ($i = 1, 2, 3, 4$) le coordinate del punto in cui la cubica di regresso della sviluppabile è toccata dalla sua tangente passante per un punto generico (y) della curva Γ (sicchè anche le z_i potranno ritenersi funzioni della variabile indipendente x) si avranno relazioni del tipo:

$$y_i = pz_i + qz'_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

dove p e q sono, per il sig. Goursat, funzioni *uniformi*, se sono tali i coefficienti dell'equazione differenziale proposta; nel nostro caso, saranno funzioni razionali sulla data superficie di Riemann. Le z_i saranno invece (in generale) funzioni a più, o anche a infiniti valori; ma le diverse operazioni del gruppo monodromico produrranno su di esse sostituzioni lineari identiche a quelle delle y_i [2]; dette funzioni saranno perciò soluzioni indipendenti di una nuova equazione differenziale lineare di 4° ordine, la cui curva Γ è la stessa cu-

[1] Questi tre casi sono precisamente i soli (cfr. la Nota prec.) in cui la questione che ci siamo proposta è già stata studiata. L'equazione differenziale si potrà dunque certo integrare per quadrature ogni qual volta la funzione H di Ludw. Schlesinger (Diss. cit., p. 24) non sia una costante. (Supposta la superficie F rappresentata da un'equazione (omogenea) $f = 0$, la funzione H sarebbe la Hessiana della f, divisa, quando sia possibile, per la maggior potenza di quest'ultima che vi è contenuta come fattore).

[2] Potranno però le z_i, come funzioni di x, riprodursi tali e quali (o a meno di uno stesso fattore) dopo talune sostituzioni del gruppo monodromico, senza che ciò avvenga anche per le y_i.

bica; e questa nuova equazione sappiamo già (cfr. questi Rend., p. 52) che dovrà esser soddisfatta dai cubi delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare di 2° ordine, sempre a coefficienti razionali nel campo prestabilito. Indicato pertanto con Y l'integrale generale di quest'ultima equazione, dovrà l'equazione differenziale proposta ammettere tutte le soluzioni del tipo:

$$y = p\mathrm{Y}^3 + 3q\,\mathrm{Y}^2\,\mathrm{Y}'$$

dove p e q sono certe funzioni razionali (che si potranno forse scegliere in varî o anche in infiniti modi, ma, una volta fissate, dovranno restar sempre le stesse).

« L'integrazione dell'equazione differenziale proposta si riduce dunque a quella di un'equazione differenziale lineare di 2° ordine (o di una delle forme equivalenti) (1). Ciò è d'accordo col fatto che il gruppo ∞^3 delle omografie che mutano in sè stessa la nostra sviluppabile è *simile* a quello pure ∞^3 delle projettività binarie (ossia in una forma semplice, o ente razionale).

« 4. Se la superficie F è un cono, prendiamone il vertice come punto fondamentale $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ del sistema di coordinate. Allora è chiaro che in tutte le omografie che mutano questo cono in sè stesso, dunque anche in tutte le operazioni del gruppo di razionalità dell'equazione differenziale proposta, le y_1, y_2, y_3 subiranno soltanto sostituzioni lineari ternarie (vale a dire, nelle loro nuove espressioni non comparirà affatto la y_4). E da questo si trae che le y_1, y_2, y_3 sono soluzioni indipendenti di un'equazione differenziale lineare di 3° ordine. a coefficienti razionali nel campo prestabilito (2).

« D'altra parte, nel sistema di coordinate fissato, l'equazione del cono F non conterrà la y_4. Dunque le y_1, y_2, y_3, che già sappiamo essere soluzioni indipendenti di un'equazione differenziale lineare di 3° ordine, sono anche legate fra loro da un'equazione algebrica; ricadiamo perciò, per quanto ad esse si riferisce, in un caso da me già precedentemente studiato (cfr. le mie due Note a p. 18 e 51 di questi Rend.; qui si ha il caso particolare $n = 3$).

« Se il cono è di 2° grado, le y_1, y_2, y_3 si potranno esprimere a loro volta sotto la forma:

$$c_1\,\mathrm{X}^2 + c_2\,\mathrm{XY} + c_3\,\mathrm{Y}^2$$

dove le c sono costanti, e X, Y sono soluzioni distinte di un'equazione differenziale lineare di *secondo* ordine, sempre a cofficienti razionali sulla data superficie di Riemann.

(1) Questa nuova equazione differenziale si potrà integrare per quadrature sempre e solo quando le diverse operazioni del gruppo monodromico lascino fissa (almeno) una stessa generatrice della sviluppabile considerata.

(2) Cfr. Beke, *Die Irreducibilität der homogenen linearen Differentialgleichungen* (Math. Ann. XLV, p. 290).

« Se il cono è di grado, superiore al secondo, ma razionale, e la sua equazione può mettersi sotto la forma:

$$y_1^{\alpha_1}\, y_2^{\alpha_2}\, y_3^{\alpha_3} = \text{Cost.}$$

dove le α sono numeri interi aventi per somma zero (cono *parabolico*), saranno y_1, y_2, y_3 funzioni esponenziali di integrali Abeliani.

« In ogni altro caso le stesse y_i saranno funzioni algebriche di x (a meno forse di un fattore moltiplicativo comune) (1).

« Quanto alla y_4, ottenute le prime tre soluzioni, essa si potrà determinare con sole quadrature, e precisamente con al più *quattro* quadrature successive, la prima delle quali sarebbe da eseguirsi su di una funzione razionale delle soluzioni già ottenute e loro derivate (2). Questo è anche d'accordo colla composizione del gruppo (intransitivo) ∞^4 delle omologie di dato centro (le quali mutano appunto in sè stesso ogni cono col vertice in questo centro) (3). Le omologie *speciali* ne formano infatti un primo sottogruppo eccezionale ∞^3; e sono poi esse stesse a due a due permutabili, sicchè risulta pure eccezionale entro quest'ultimo gruppo ∞^3 (e anche nel gruppo complessivo ∞^4) ogni sottogruppo ∞^2 o ∞^1 di tali omologie. Il gruppo ∞^4 è quindi *integrabile* (4).

« 5. Il caso in cui la curva Γ è contenuta in una quadrica (o superficie di secondo grado) è stato studiato in un altra Nota del sig. Goursat (Compt. Rend., t. XCVII, p. 31); e anche Halphen vi ha dedicate parecchie pagine della sua Memoria: « *Sur les invariants des équations différentielles*

(1) A questo stesso risultato è giunto anche Ludw. Schlesinger (Diss., cit., p. 25, 26, 29). Il caso delle y moltiplicative rientra per lui in quello degli integrali algebrici (e precisamente radici di funzioni razionali), avendo egli supposti i coefficienti dell'equazione differenziale *razionali* nel senso ordinario (funzioni razionali cioè dell'ente di genere zero).

(2) In generale, quando di un'equazione differenziale lineare di ordine n sono conosciute k soluzioni indipendenti, le altre si possono determinare mediante un'equazione differenziale lineare di ordine $n-k$, e un certo numero di quadrature. Se ne sono conosciute dunque $n-1$ indipendenti, l'ultima si potrà determinare con sole quadrature (cfr. Fuchs, Journ. de Crelle, t. LXVI; Heffter, *Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen* (1894), p. 52 e seg.; Schlesinger, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen* (1895), p. 47 e seg.).

(3) È infatti questo gruppo soltanto che ora dobbiamo considerare; perchè la determinazione delle y_1, y_2, y_3 equivale appunto, geometricamente, ad estrarre il gruppo delle omologie dal gruppo, forse più ampio, di tutte le trasformazioni projettive del cono in sè stesso.

(4) La composizione del gruppo complessivo di tutte le omografie che trasformano in sè stesso un cono razionale normale di uno spazio qualunque (in particolare dunque un cono quadrico dello spazio ordinario) è stata assegnata dal Sig. Enriques (cfr. questi Rend., vol. II, 1° sem., p. 532).

linéaires du 4^me ordre » (Acta Math., vol. III, p. 325-380). Il sig. Goursat ha dimostrato in particolare, che in questo caso *l'equazione differenziale proposta è soddisfatta dai prodotti degli integrali di due equazioni differenziali lineari di 2° ordine del tipo*:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \mathrm{P}(x).u \quad ; \quad \frac{d^2v}{dx^2} = \mathrm{Q}(x).v$$

dove $\mathrm{P}(x)$ e $\mathrm{Q}(x)$ *sono radici di un'equazione di 2° grado, a coefficienti uniformi* (nel nostro caso sempre *razionali* sulla data superficie di Riemann) (1).

« Anche in questo caso lo *spezzamento* dell'equazione differenziale lineare di 4° ordine in due equazioni differenziali di 2° ordine è d'accordo colla composizione del gruppo continuo massimo (∞^6) di trasformazioni projettive di una quadrica in sè stessa (2). Questo gruppo non contiene infatti che due soli sottogruppi eccezionali, tutti due ∞^3, di omografie biassiali, differenti fra loro solo per lo scambio dei due sistemi di generatrici; e ciascuno di questi due ammette come rette unite tutte le generatrici dell'un sistema, ed opera su quelle dell'altro sistema come il gruppo ∞^3 delle projettività in una forma semplice. Il gruppo continuo ∞^6 si può ottenere per moltiplicazione di questi due sottogruppi (3) (4).

« 6. Fra le curve Γ contenute in una quadrica, Halphen ha studiate in particolare quelle, le cui tangenti appartengono a uno stesso complesso lineare. Egli ha dimostrato che queste curve sono tutte *anarmoniche*, vale a dire che in questo caso l'equazione differenziale proposta può trasfor-

(1) Cfr. anche Besso, Mem. di quest'Acc. ser. 3ª, vol. XIX. p. 219-231; Ludw. Schlesinger, Diss. cit., p. 26-27.

(2) Le operazioni di questo gruppo continuo mutano in sè stesso ciascuno dei due sistemi di generatrici della quadrica. Ma quest'ultima ammette anche un'altra schiera continua ∞^6 di trasformazioni projettive, che scambiano fra loro quei due sistemi; e alla *separazione* di queste due schiere corrisponde analiticamente come prima operazione (e l'abbiamo veduto appunto) la risoluzione di un'equazione algebrica di 2° grado (quella che ha per radici le due funzioni $\mathrm{P}(x)$ e $\mathrm{Q}(x)$).

(3) E a questi due sottogruppi corrispondono rispettivamente le due equazioni differenziali lineari di 2° ordine, di cui sopra. L'integrazione di queste potrà eseguirsi con sole quadrature, quando le operazioni del gruppo monodromico lascino fissa almeno una generatrice di ciascun sistema.

(4) Il risultato ottenuto dal sig. Goursat sussiste soltanto se la quadrica non è un cono; ma il caso in cui invece lo sia è già stato studiato al n.° prec. Allora si può forse dire che le due equazioni differenziali di 2° ordine sono venute a coincidere; e in luogo dei prodotti delle soluzioni di queste due, compaiono infatti i quadrati di quelle dell'unica equazione rimasta. D'altronde, quelle stesse due equazioni differenziali corrispondono, in certo qual modo, ai due sistemi di generatrici della quadrica; e questi ultimi coincidono appunto nel caso del cono.

marsi in altra a coefficienti costanti (Mem. cit., p. 351). Viceversa, l'essere la curva anarmonica e l'appartenere le tangenti di essa a uno stesso complesso lineare sono anche condizioni sufficienti perchè la curva Γ sia contenuta in una quadrica (l. c. p. 342), e, in pari tempo, sia spigolo di regresso di una sviluppabile circoscritta a un'altra quadrica (l. c., p. 343). Le due quadriche hanno a comune un quadrangolo sghembo, e si corrispondono nella reciprocità nulla determinata dal complesso. L'equazione differenziale primitiva coincide allora colla propria *aggiunta* di Lagrange.

« Le curve (algebriche) considerate in una mia Nota prec. (a p. 55 di questi Rend., e per $n=4$), e rappresentate da equazioni del tipo:

$$y_1 y_2 = y_3 y_4 \quad ; \quad \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{m-2r} = \left(\frac{y_3}{y_4}\right)^m$$

rientrano appunto in questa categoria. Per le equazioni differenziali che le definiscono è nullo infatti l'invariante v di Halphen (l. c., p. 330), ossia l'invariante a_3 di Brioschi (Acta Math., t. XIV, p. 235) e Wallenberg (Jour. de Crelle, t. CXIII, p. 8), il quale differisce dal precedente solo per un fattore numerico (¹); e l'annullarsi di questo invariante è appunto condizione necessaria e sufficiente perchè le tangenti della corrispondente curva Γ appartengano a uno stesso complesso lineare (cfr. Halphen, l. c., p. 332). Già abbiamo veduto nella Nota cit. come le equazioni differenziali relative a queste curve possano trasformarsi in altre a coefficienti costanti; e che queste equazioni (e le analoghe, per $n>4$) coincidano sempre colle rispettive *aggiunte* di Lagrange, l'aveva notato appunto il sig. Brioschi (l. c., p. 237; cfr. anche Wallenberg, l. c., p. 36) ».

Matematica. — *Una questione di priorità nella teoria della connessione.* Nota del prof. ALBERTO TONELLI, presentata dal Socio CREMONA.

« Nel vol. XLV dei Mathematische Annalen a pag. 142-143 il prof. Felix Klein pose la seguente Nota ad un suo lavoro dal titolo: *Autographirte Vorlesungshefte:*

« Ich möchte hier eine kurze historische Notiz einfügen. Picard nennt in Bd. II « seines Werkes auf pag. 375 als denjenigen, der bei Untersuchungen über den Flächenzu « sammenhang zuerst frei im Raume gelegene Flächen mit p Oeffnungen angewandt « habe, Clifford (Proceedings of the London Mathematical Society vol. 8, 1876). Demge- « genüber weist bereits Burkhardt in seiner Recention des Picard'schen Werkes in den

(¹) Per la formazione di questo invariante (e dei successivi, per valori qualunque di n) cfr. anche Forsyth, Phil. Trans., vol. CLXXIX.