

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IV.

1° SEMESTRE



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

marsi in altra a coefficienti costanti (Mem. cit., p. 351). Viceversa, l'essere la curva anarmonica e l'appartenere le tangenti di essa a uno stesso complesso lineare sono anche condizioni sufficienti perchè la curva  $\Gamma$  sia contenuta in una quadrica (l. c. p. 342), e, in pari tempo, sia spigolo di regresso di una sviluppabile circoscritta a un'altra quadrica (l. c., p. 343). Le due quadriche hanno a comune un quadrangolo sghembo, e si corrispondono nella reciprocità nulla determinata dal complesso. L'equazione differenziale primitiva coincide allora colla propria *aggiunta* di Lagrange.

• Le curve (algebriche) considerate in una mia Nota prec. (a p. 55 di questi Rend., e per  $n=4$ ), e rappresentate da equazioni del tipo:

$$y_1 y_2 = y_3 y_4 \quad ; \quad \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{m-2r} = \left(\frac{y_3}{y_4}\right)^m$$

rientrano appunto in questa categoria. Per le equazioni differenziali che le definiscono è nullo infatti l'invariante  $v$  di Halphen (l. c., p. 330), ossia l'invariante  $a_3$  di Brioschi (Acta Math., t. XIV, p. 235) e Wallenberg (Jour. de Crelle, t. CXIII, p. 8), il quale differisce dal precedente solo per un fattore numerico (!); e l'annullarsi di questo invariante è appunto condizione necessaria e sufficiente perchè le tangenti della corrispondente curva  $\Gamma$  appartengano a uno stesso complesso lineare (cfr. Halphen, l. c., p. 332). Già abbiamo veduto nella Nota cit. come le equazioni differenziali relative a queste curve possano trasformarsi in altre a coefficienti costanti; e che queste equazioni (e le analoghe, per  $n > 4$ ) coincidano sempre colle rispettive *aggiunte* di Lagrange, l'aveva notato appunto il sig. Brioschi (l. c., p. 237; cfr. anche Wallenberg, l. c., p. 36) •.

**Matematica.** — *Una questione di priorità nella teoria della connessione.* Nota del prof. ALBERTO TONELLI, presentata dal Socio CREMONA.

• Nel vol. XLV dei Mathematische Annalen a pag. 142-143 il prof. Felix Klein pose la seguente Nota ad un suo lavoro dal titolo: *Autographirte Vorlesungshefte*:

« Ich möchte hier eine kurze historische Notiz einfügen. Picard nennt in Bd. II seines Werkes auf pag. 375 als denjenigen, der bei Untersuchungen über den Flächenzusammenhang zuerst frei im Raume gelegene Flächen mit  $p$  Oeffnungen angewandt habe, Clifford (Proceedings of the London Mathematical Society vol. 8, 1876). Demgegenüber weist bereits Burkhardt in seiner Recention des Picard'schen Werkes in den

(1) Per la formazione di questo invariante (e dei successivi, per valori qualunque di  $n$ ) cfr. anche Forsyth, Phil. Trans., vol. CLXXIX.

« Göttinger Anzeigen (1894, Nr. 5) darauf hin dass diese Flächen schon 1875 in einer Arbeit von Tonelli auftreten (Atti dei Lincei, tom. 2, ser. II). Es ist keine Frage, dass die Benutzung der in Rede stehenden Flächen auf Riemann selbst oder doch auf seine unmittelbare Umgebung zurückgeht. Ich habe mich in dieser Hinsicht in der Vorrede zu meiner Schrift über Riemann auf eine Unterhaltung mit Herrn Prym vom Jahre 1874 bezogen. Die Sache wird mir jetzt durch Herrn Schering bestätigt, der sich dahin äussert, dass er sich allerdings nicht bestimmt erinnern könne jemals mit Riemann über den Gegenstand gesprochen zu haben, dass ihm aber die Verwendung der in Rede stehenden Flächen von jeher geläufig gewesen sei. Hiermit ist auch die Quelle gegeben, aus welcher Herr Tonelli die Verwendung der in Rede stehenden Flächen entnommen hat; denn Herr Tonelli hat seine Arbeit (welche übrigens selbständige Untersuchungen zur Theorie des Flächenzusammenhangs enthält) hier in Göttingen unter Leitung von Herrn Schering ausgeführt. Man vergleiche hierzu die erste Mittheilung der Tonelli'schen Resultate in Nr. 13 der Göttinger Nachrichten von 1875. — Uebrigens bemerke man, dass bei Clifford und Tonelli die in Rede stehenden Flächen nur für die Untersuchungen der Analysis situs, nicht aber, wie in meiner Schrift über Riemann's Theorie, direct für die functionentheoretische Grundlegung herangezogen werden ».

« Se in questa Nota fossero mancati i periodi che ho fatto riprodurre in corsivo non avrei avuto nulla ad osservare, già troppo soddisfatto dal pensiero di essermi incontrato in una idea dovuta al genio di Riemann, e non avrei ora reclamato una priorità che non reclamai dal sig. Picard. Se per rendere più evidente ciò che io opinava relativamente al lemma di Riemann sulla teoria della connessione, io ideai in quell'epoca le superficie di cui ora si tratta, debbo francamente confessare che era ben lungi dal prevedere che esse avrebbero avuto una importanza così grande nella teoria delle funzioni quale ha saputo loro dare il prof. Klein; solamente osservava che quelle superficie potevano sostituire completamente le superficie di Riemann per le considerazioni che io doveva fare <sup>(1)</sup>. Ma l'asserzione del prof. Klein che io abbia attinto da altri e poi data per mia una tale concezione è ingiusta, ed io non poteva rimanere in silenzio sotto una simile accusa. Sicuro nella mia coscienza scrissi al professore Schering richiamando la sua attenzione sulla nota sopra trascritta, e lo pregai di dire ciò che egli ne pensava, lui solo trovandosi nel caso di potere spassionatamente chiarire le cose. Il professore Schering, con quella gentilezza che lo distingue, mi rispose immediatamente la seguente lettera che mi autorizza a pubblicare e di cui io gli rendo qui le più sentite grazie:

Sternwarte Göttingen 1894. Aug. 5.

*Verehrter Herr College!*

« Sehr dankbar bin ich Ihnen, dass Sie mich auf die Stelle in F. Kleins Mathematischen Annalen aufmerksam gemacht haben, ich hatte wegen meiner vielen Arbeiten dieselbe noch nicht gelesen, auch würde ich aus dem Titel derselben gar nicht ver-

<sup>(1)</sup> Conf. il mio lavoro: *Osservazioni sulla teoria della connessione* (Atti dell'Accademia dei Lincei, tomo 2°, serie II, 1875).

« muthet haben, dass der Aufsatz eine mich betreffende Stelle enthalte. Prof. Klein hat sie  
« drucken lassen, ohne meine Erlaubniss eingeholt zu haben, selbst ohne mir eine Nachricht  
« davon zu geben. Er allein hat die Worte hinzugefügt, welche Ihnen so Unrecht thun.  
« Ich habe deshalb ihm folgenden Aufsatz für sein Journal eingesendet :

Berichtigung einer den Herrn Professor  
Tonelli betreffenden Bemerkung in Herrn  
Professor Felix Klein's Aufsatz « Autographirte  
Vorlesungshefte »  
von Ernst Schering in Göttingen

« So eben lese ich in genanntem Aufsatz auf Seite 142 im 45 Bande der Mathematischen  
« Annalen betreffend die Riemann'schen Flächen die Worte: Hiermit ist auch die Quelle  
« gegeben, aus welcher Herr Tonelli die Verwendung der in Rede stehenden Flächen ent-  
« nommen hat, denn Herr Tonelli hat seine Arbeit (welche übrigens selbständige Untersu-  
« chungen zur Theorie des Flächenzusammenhangs enthält) hier in Göttingen unter Lei-  
« tung von Herrn Schering ausgeführt. Man vergleiche hierzu die erste Mittheilung der  
« Tonelli'schen Resultate in Nr. 13 der Göttinger Nachrichten von 1875.

« In diesen Worten finde ich eine Beeinträchtigung der selbständigen Autorenrechte des  
« Herrn Professor Tonelli, da derselbe die Verwendung der in Rede stehenden Flächen  
« durchaus selbst erdacht und das Resultat seiner Untersuchung erreicht hatte, bevor  
« ich über diese Flächen mit ihm sprach. Man kann also durchaus nicht sagen, dass Herr  
« Professor Tonelli's Arbeit sich auf eine von mir gegebene Andeutung über diese Art  
« von Riemann'schen Flächen gründe, noch dass dieselbe unter meiner Leitung ausge-  
« führt sei.

Göttingen, 1 August 1894.

« Herr Prof. Klein hat mir schriftlich erklärt, dass diese meine Berichtigung bei näch-  
« ster Gelegenheit gedruckt werden solle.

« Es thut mir ausserordentlich leid, dass Ihre Rechte an der selbständigen Auffindung  
« dieser Flächen und der Verwendung derselben in Zweifel gezogen worden isind. Nachdem  
« aber diese Rechte hiernach vollständig anerkannt werden, kommt Ihre Arbeit den Fran-  
« zosen (Picard) gegenüber zur richtigen Geltung, welcher die erste Verwendung jener  
« Flächen Herrn Clifford zuschreibt.

« Sie sehen also, dass ich darauf halte, dass die durch mich zur Veröffentlichung ge-  
« langenden Arbeiten ihr selbständiges Recht beibehalten; deshalb bitte ich Sie, gewähren  
« Sie mir bald wieder die Ehre, eine Arbeit von Ihnen der hiesigen Gesellschaft der Wis-  
« senschaften vorzulegen.

« Mit vielen Grüssen . . . . .

« Ihr ergebener E. Schering ».

« Come si vede, nell'affermare con tanta sicurezza un fatto che (certa-  
« mente senza intenzione) veniva ad offendermi più come uomo che come cul-  
« tore della scienza, il prof. Klein ha creduto di poter fare a meno di inter-  
« pellare prima coloro, che ne potevano in proposito saper più di lui. In ogni  
« modo l'assicurazione fatta dal prof. Klein per iscritto, che la rettifica del  
« prof. Schering sarebbe stata pubblicata nella più prossima circostanza, mi  
« rese completamente tranquillo. Pur troppo però la giustificazione mia da parte  
« del prof. Klein non è arrivata che 8 mesi dopo l'accusa!

« Certamente io non potrei accampare nissun diritto a speciali riguardi da parte del prof. Klein, ma l'affrettarsi a dichiarare che un'accusa portata verso una persona era ingiusta, quando tale si è dovuto riconoscerla, io ho creduto sempre che sia qualche cosa di diverso da un riguardo.

« Finalmente però nel vol. XLVI fasc. I dei *Mathematische Annalen*, il sig. Klein a pag. 77-78 stampa la seguente nota ad un suo secondo lavoro dal titolo: *Autographirte Vorlesungshefte II*:

« Ich benutze diese Gelegenheit, um im Anschlusse an die im vorigen Artikel gegebene Fussnote betr. Riemann'schen Flächen im Raume folgende Mittheilung zur Publication zu bringen, welche mir Herr Schering « im Interesse der bestehenden selbständigen Autorenechte des Herrn Tonelli » zugehen lässt. Herr Tonelli hatte die Verwendung der in Rede stehenden Flächen durchaus selbst erdacht und das Resultat seiner Untersuchungen erreicht, bevor ich über diese Flächen mit ihm sprach. Man kann also durchaus nicht sagen, dass Herrn Tonelli's Arbeit sich auf eine von mir gegebene Andeutung über diese Art von Riemann'schen Flächen gründe, noch dass dieselbe unter meiner Leitung ausgeführt sei ».

« Il prof. Klein non ha stampato la rettifica inviata dal prof. Schering in articolo separato, ma ne ha riprodotto solo la parte sostanziale in una breve nota, la quale potrebbe sfuggire all'attenzione di qualcuno che pure ebbe sentore della prima. Ora, interessando a me, più di ogni altra cosa, di tutelare la mia dignità come uomo, e la stima dei colleghi, mi sono deciso a ripubblicare per conto mio le note del prof. Klein e la lettera del prof. Schering affinché, colla scorta di questi documenti, possa ognuno formarsi un giusto concetto della cosa.

« Non voglio però terminare senza esprimere i miei più vivi ringraziamenti al prof. Burkhardt, il quale, nel solo interesse della verità, volle a me rivendicare una priorità contrastatami ».

*Matematica.* — *Di una espressione analitica atta a rappresentare il numero dei numeri primi compresi in un determinato intervallo.* Nota di T. LEVI-CIVITA, presentata dal Corrispondente VERONESE.

« La questione di rappresentare con una funzione il numero dei numeri primi compresi in un intervallo determinato, o l'altra, sotto un certo rispetto equivalente, di fissare un carattere distintivo dei numeri primi diede origine a ricerche importanti di molti matematici, colle quali, se non fu raggiunto l'intento, tuttavia venne largo contributo alla scienza di considerazioni feconde. Basterà ricordare che Gauss, Dirichlet e Tchébicheff, prendendo le mosse da questo problema, furono condotti a notevoli risultati di teoria dei