ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IV.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

« Certamente io non potrei accampare nissun diritto a speciali riguardi da parte del prof. Klein, ma l'affrettarsi a dichiarare che un'accusa portata verso una persona era ingiusta, quando tale si è dovuto riconoscerla, io ho creduto sempre che sia qualche cosa di diverso da un riguardo.

« Finalmente però nel vol. XLVI fasc. I dei Mathematische Annalen, il sig. Klein a pag. 77-78 stampa la seguente nota ad un suo secondo lavoro dal titolo: *Autographirte Vorlesungshefte II*:

« Ich benutze diese Gelegenheit, um im Anschlusse an die im vorigen Artikel ge- « gebene Fussnote betr. Riemann'schen Flächen im Raume folgende Mittheilung zur Pu- « blication zu bringen, welche mir Herr Schering « im Interesse der bestehenden selb- « ständigen Autorenrechte des Herrn Tonelli » zugehen lässt. Herr Tonelli hatte die « Verwendung der in Rede stehenden Flächen durchaus selsbt erdacht und das Resultat « seiner Untersuchungen erreicht, bevor ich über diese Flächen mit ihm sprach. Man « kann also durchaus nicht sagen, dass Herrn Tonelli's Arbeit sich auf eine von mir ge- « gebene Andeutung über diese Art von Riemann'schen Flächen gründe, noch dass die- « selbe unter meiner Leitung ausgeführt sei ».

« Il prof. Klein non ha stampato la rettifica inviata dal prof. Schering in articolo separato, ma ne ha riprodotto solo la parte sostanziale in una breve nota, la quale potrebbe sfuggire all'attenzione di qualcuno che pure ebbe sentore della prima. Ora, interessando a me, più di ogni altra cosa, di tutelare la mia dignità come uomo, e la stima dei colleghi, mi sono deciso a ripubblicare per conto mio le note del prof. Klein e la lettera del prof. Schering affinchè, colla scorta di questi documenti, possa ognuno formarsi un giusto concetto della cosa.

« Non voglio però terminare senza esprimere i miei più vivi ringraziamenti al prof. Burkhardt, il quale, nel solo interesse della verità, volle a me rivendicare una priorità contrastatami ».

Matematica. — *Di una espressione analitica atta a rappresentare il numero dei numeri primi compresi in un determinato intervallo.* Nota di T. Levi-Civita, presentata dal Corrispondente Veronese.

« La questione di rappresentare con una funzione il numero dei numeri primi compresi in un intervallo determinato, o l'altra, sotto un certo rispetto equivalente, di fissare un carattere distintivo dei numeri primi diede origine a ricerche importanti di molti matematici, colle quali, se non fu raggiunto l'intento, tuttavia venne largo contributo alla scienza di considerazioni feconde. Basterà ricordare che Gauss, Dirichlet e Tchébicheff, prendendo le mosse da questo problema, furono condotti a notevoli risultati di teoria dei numeri e oltre a ciò assegnarono espressioni più o meno approssimate del numero dei numeri primi compresi in un dato intervallo.

Riemann nella Memoria: *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (1), risolse in certo senso una tale questione, poichè riescì a rappresentare con una funzione $F(x)$ il numero dei numeri primi inferiori ad x; però codesta soluzione, malgrado la sua grande genialità, apparisce oltemodo complicata e, quasi direi, speciosa, se si osserva che, per costruire la funzione $F(x)$ di Riemann si ha la formola:

$$F(x) = \sum (-1)^{\mu} \frac{1}{m} f(x^{\frac{1}{m}}),$$

dove, essendo $f(x)$ una funzione, che si può risguardare conosciuta

$$\left(f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^s \log \left\{ \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{1}{n^s} \right\} \frac{d\,s}{s} \right),$$

la sommatoria va estesa successivamente a tutti i numeri m non divisibili per alcun quadrato all'infuori dell'unità, e μ designa il numero dei fattori primi di m. Ne viene che, per calcolare effettivamente $F(x)$, bisognerebbe immaginare di conoscere, per ciascun numero naturale m, se esso ammette fattori primi eguali e, quando sieno tutti differenti, se il loro numero è pari o dispari. In altri termini si dovrebbe risguardar nota la funzione $\mu(m)$ di Mertens (2).

Parmi pertanto non superfluo di riprendere sotto un diverso punto di vista questo stesso problema, proponendomi di eliminare la difficoltà, che si incontra nel procedimento di Riemann. In ciò che segue, si troverà assegnata (a mezzo di un integrale definito) l'espressione analitica del numero dei numeri primi compresi in un determinato intervallo: incidentalmente mi si presenterà occasione di indicare un criterio di immediata applicabilità per riconoscere se un dato numero sia primo.

La serie (di Lambert) (3) $\sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{x^m}{1-x^m}$ converge, come si riconosce

(1) Ges. Werke, p. 136, Leipzig 1876; cfr. anche Bachmann, *Zahlentheorie*, Zweiter Theil, p. 382, Leipzig 1894.

(2) *Ueber einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie.* Giornale di Crelle, Tomo LXXVII, p. 283.

(3) Veggasi ad es.: Eisenstein, giornale di Crelle, Tomo XXVII; Curtze, *Notes diverses sur la série de Lambert et la loi de nombres premiers*, Ann. di Mat., Ser. 2ª, T. I, p. 285; Pincherle, *Sopra alcuni sviluppi in serie per funzioni analitiche*, Mem. dell'Acc. di Bologna, Serie IV, Tom. III.

agevolmente, per tutti i punti $|x|<1$ ed è sviluppabile in serie di potenze di x entro il cerchio di raggio 1 col centro nell'origine. Si sa, e questa costituisce la proprietà caratteristica dello sviluppo, osservata già da Lambert, che il coefficiente di x^n è uguale al numero dei divisori di n; quindi, escludendo per n il valore 1, questo coefficiente sarà eguale a 2, quando n è un numero primo, maggiore di due nel caso opposto.

« Ponendo:

$$(1) \qquad S(x)=\sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{x^m}{1-x^m}-\frac{2\,x^2}{1-x}-x\,,$$

si potrà per $|x|<1$, avere $S(x)$ espresso sotto la forma:

$$(2) \qquad S(x)=\sum_{1}^{\infty}{}_m c_m\, x^m\,,$$ dove c_m è nullo, se m è un numero primo, maggiore o eguale ad 1 in tutti gli altri casi.

« Tracciata una circonferenza C col centro nell'origine, di raggio ϱ, eguale per esempio ad $\frac{1}{2}$, la serie $\sum_{1\,m}^{\infty} c_m\, x^m$ convergerà in egual grado lungo C e sarà quindi integrabile termine a termine; lo stesso si potrà dire del prodotto $x^z\sum_{1}^{\infty}{}_m c_m\, x^m$, qualunque sia il numero finito z reale o complesso, poichè x non si annulla, nè diviene infinito lungo la circonferenza. C'è da osservare soltanto che, x^z essendo funzione multiforme, bisogna fissare come e su quale degli infiniti rami di $x^z\sum_{1}^{\infty}{}_m c_m\, x^m$ si opera l'integrazione. Questo si fa nel modo più semplice, ponendo $x=\varrho\, e^{i\theta}$ e conducendo l'integrazione lungo la circonferenza C da $\theta=0$ a $\theta=2\pi$. Le altre determinazioni dello stesso integrale si avrebbero facendo variar θ da un valore iniziale arbitrario θ_o a $\theta_o+2\,\pi$.

« Ponendo pertanto:

$$(3) \qquad P(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C x^{z-1}\, S(x)\, dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varrho^z\, e^{iz\theta}\, S\,(\varrho\, e^{i\theta})\; d\,\theta\;,$$

resta determinato in modo unico una funzione uniforme $P(z)$ della variabile complessa z, singolare soltanto per $z=\infty$, cioè una trascendente intera.

« Indicando con n un numero intero, si ha immediatamente:

$$(4) \qquad P(n)=0 \qquad (n\geq 0)$$
$$(5) \qquad P(-n)=c_n \qquad (n\geq 1)$$

« La (5) merita di essere notata, perchè, dato ad arbitrio un numero intero n, permette di decidere se esso sia o no primo.

« Per ogni altro valore non intero di z, ponendo ancora $x = \varrho e^{i\theta}$ e tenendo presente l'osservazione fatta, si può scrivere P(z) sotto la forma:

$$(6) \qquad \mathrm{P}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{C}} \sum_{1}^{\infty}{}_m c_m x^{m+z-1}\, dx = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \sum_{1}^{\infty}{}_m c_m \frac{x^{m+z}}{m+z} \right\}_{\varrho e^{0}}^{\varrho e^{2\pi i}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \varrho^{z} (e^{2\pi i z} - 1) \sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{c_m \varrho^m}{m+z}$$

« Se z non è reale e quindi del tipo $\mu + i\nu$ (con ν diverso da zero), mettendo in evidenza in $\displaystyle\sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{c_m \varrho^m}{m+z}$ la parte reale e la parte immaginaria, potremo scrivere:

$$\mathrm{P}(z) = \frac{1}{2\pi i} \varrho^{z} (e^{2\pi i z} - 1) \left\{ \sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{c_m \varrho^m (m+\mu)}{(m+\mu)^2 + \nu^2} - i\nu \sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{c_m \mathrm{S}^m}{(m+\mu)^2+\nu^2} \right\},$$

da cui apparisce che P(z) non può annullarsi per valori complessi dell'argomento z. Infatti ϱ^z, $e^{2i\pi z} - 1$ non vanno certamente a zero per valori finiti non interi di z e nel terzo fattore il coefficiente dell'unità immaginaria $\displaystyle -\nu \sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{c_m \varrho^m}{(m+\mu)^2+\nu^2}$, siccome i termini della serie sono tutti positivi, non si può annullare per $\nu \lessgtr 0$, quindi il fattore stesso è certamente diverso da zero.

« Ciò posto, noi ci proponiamo di determinare per ciascun numero intero negativo $-n$ un cerchio di centro $-n$ e di raggio r_n, entro cui non cade alcuna o tutt'al più una radice dell'equazione P(z) $= 0$. Siccome si è visto or ora che P(z) non può avere radici immaginarie, basterà prendere in esame i valori reali di z nell'intorno di ciascun $-n$.

« Supporremo dapprima n non primo. Allora, facendo nella (6), $z = -n \pm r_n$, il terzo fattore $\displaystyle\sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{c_m \varrho^m}{m - n \pm r_n}$ potrà essere scritto:

$$\sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{c_m \varrho^m}{m-n\pm r_n} = -\sum_{1}^{n-1}{}_m \frac{c_m \varrho^m}{n-m\mp r_n} \pm \frac{c_n \varrho^n}{r_n} + \sum_{n+1}^{\infty}{}_m \frac{c_m \varrho^m}{m-n\pm r_n} \qquad (c_n > 0)$$

« Assumendo r_n già minore di $\frac{1}{2}$, avremo manifestamente nelle due sommatorie del secondo membro $\left|\frac{1}{m-n\pm r_n}\right|<2$, $c_m<m$, qualunque sia m, e per conseguenza:

$$\left|-\sum_{1}^{n-1}{}_m \frac{c_m\,\varrho^m}{n-m\mp r_n}+\sum_{n+1}^{\infty}{}_m \frac{c_m\,\varrho^m}{m-n\pm r_n}\right|<2\sum_{1}^{\infty}{}_m m\,\varrho^m<\frac{2\,\varrho}{(1-\varrho)^2}<4,$$

per essersi fin da principio assunto $\varrho=\frac{1}{2}$; ne viene che, prendendo r_n in modo da rendere:

$$\frac{c_n\frac{1}{2^n}}{r_n}\geq 4,\ \text{cioè per esempio:}$$

$r_n=\frac{1}{2^{n+2}}$, nell'intervallo da $\left(-n-\frac{1}{2^{n+2}}\right)$ a $\left(-n+\frac{1}{2^{n+2}}\right)$ non cade alcuna radice dell'equazione.

« Se invece n è primo e quindi $c_n=0$, mettendo in evidenza il primo termine non nullo, potremo scrivere (per $n>3$):

$$\sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{c_m\,\varrho^m}{m-n\pm r_n}=\frac{-\varrho^4}{n-4\mp r_n}-\sum_{5}^{n-1}{}_m \frac{c_m\,\varrho^m}{n-m\mp r_n}+\sum_{n+1}^{\infty}{}_m \frac{c_m\,\varrho^m}{m-n\pm r_n},$$

quì, assumendo ancora $r_n\leq\frac{1}{2}$, avremo dappertutto $\left|\frac{c_m}{m-n\pm r_n}\right|<2\;m$, onde per la parte positiva, sarà:

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}_m \frac{c_m\,\varrho^m}{m-n\pm r_n}<2\sum_{n+1}^{\infty}{}_m m\,\varrho^m<2\,\varrho\left\{\frac{1}{(1-\varrho)^2}-\varrho-2\varrho^2-\ldots-n\varrho^n\right\}$$

$$<2\,\varrho\left\{\frac{\varrho^2+(n+1)\,\varrho\,(1-\varrho)}{(1-\varrho)^2}\right\}<\frac{n+2}{2^{n-1}}\;;$$

d'altronde la parte negativa non è certamente inferiore in valore assoluto al suo primo termine $\frac{\varrho^4}{n-4\pm r_n}$ e siccome:

$$\frac{\varrho^4}{n-4\mp r_n}\geq\frac{1}{16\,(n-4+r_n)}>\frac{n+2}{2^{n-1}}\ \text{per}\ n\geq 12\ ,$$

così si può senz'altro asserire che, se n è primo, nell'intervallo da $\left(-n-\frac{1}{2}\right)$

a $\left(-n+\frac{1}{2}\right)$ e quindi a più forte ragione nell'intervallo da $\left(-n-\frac{1}{2^{n+2}}\right)$ a $\left(-n+\frac{1}{2^{n+2}}\right)$, l'espressione $\sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{c_m\, \varrho^m}{m+z}$ si mantiene costantemente negativa.

Riassumendo si conclude che per $n \geq 12$, qualunque sia il numero intero n, entro il cerchio di centro $-n$ e di raggio $r_n = \frac{1}{2^{n+2}}$ cade nessuna ovvero soltanto una radice dell'equazione $P(z)=0$: Si può proprio asserire soltanto una, poichè i punti $-n$, con n primo, in cui $P(z)$ si annulla, non sono radici multiple. Infatti, essendo $c_n = 0$, vale per $P(-n)$ l'espressione (6) e, siccome abbiam visto che in questo caso $\sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{c_m\, \varrho^m}{m+z}$ resta, per $z = -n$, finito e diverso da zero, $P(-n)$ si annulla come $e^{-2\pi i n} - 1$, cioè semplicemente.

Noi siamo ora in grado di determinare il numero dei numeri primi compresi in un dato intervallo $(\alpha\, \beta)$. Supporremo, ciò che si può fare senza restrizione, β, α non interi, $\beta > \alpha > 12$.

Indicando con h un qualunque numero intero compreso fra α e β e con C_h la circonferenza di raggio $\frac{1}{2^{h+2}}$ descritta intorno a $-h$, per un noto teorema di Cauchy, l'integrale $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_h} \frac{P'(z)}{P(z)}\, dz$ rappresenta il numero delle radici di $P(z)$ comprese entro C_h, quindi 0 o 1 secondochè h è numero composto o primo. Ne deduciamo che il numero $N_{\alpha\beta}$ dei numeri primi compresi fra α e β potrà essere espresso da:

$$N_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\,\pi i} \sum_{E(\alpha)+1}^{E(\beta)}{}_h \int_{C_h} \frac{P'(z)}{P(z)}\, dz, \tag{7}$$

dove $E(\alpha)$, $E(\beta)$ designano, secondo la notazione di Legendre, i massimi interi contenuti in α e β rispettivamente, $P(z)$, come segue dalle (1), (3), è definito da:

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C x^{z-1} \left\{ \sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{x^m}{1-x^m} - \frac{2\,x^2}{1-x} - x \right\} dx = \sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{a_n}{n!}\, z^n$$

con $$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C (\log x)^n \left\{ \sum_1^\infty {}_m \frac{x^m}{1-x^m} - \frac{2x^2}{1-x} - x \right\} \frac{dx}{x}$$

« Nell'espressione di $N_{\alpha\beta}$, le circonferenze C_h si possono anche assumere tutte eguali alla minima tra esse $C_{E(\beta)}$ di raggio $\beta' = \frac{1}{2^{E(\beta)+2}}$.

« Indicando con C' il cerchio di raggio β' col centro nell'origine, si ha con facile trasformazione dalla (7):

$$N_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{E(\alpha)+1}^{E(\beta)} {}_h \int_{C'} \frac{P'(z-h)}{P(z-h)}\,dz = \frac{\beta'}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\theta}\,d\theta \sum_{E(\alpha)+1}^{E(\beta)} {}_h \frac{P'(\beta' e^{i\theta} - h)}{P(\beta' e^{i\theta} - h)},$$

la qual formola risolve esplicitamente la questione, che ci eravamo proposti. »

Matematica. — *Sull'estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari derivate parziali d'ordine superiore.* Nota di O. NICCOLETTI presentata dal Socio BIANCHI.

Astronomia. — *Fotografie della grande nebulosa di Orione, eseguite da A. Riccò e da A. Mascari nel R. Osservatorio di Catania.* Nota di A. RICCÒ, presentata dal Socio TACCHINI.

Fisica. — *Sul magnetismo dei cilindri di ferro.* Nota di M. ASCOLI, presentata dal Socio BLASERNA.

Fisica terrestre. — *Sui terremoti giapponesi del 22 marzo 1894.* Nota di G. GRABLOVITZ, presentata dal Socio TACCHINI.

Fisica terrestre. — *Sulla durata delle registrazioni sismiche.* Nota di E. ODDONE, presentata dal Socio TACCHINI.

Chimica. — *Sull'azione del cloridrato di idrossilammina sul gliossale.* Nota di A. MIOLATI, presentata dal Socio CANNIZZARO.