ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IV.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

di ciascun fascio siano trasformabili l'una nell'altra con operazioni di un gruppo ∞^3 simile a quello delle projettività binarie (e contenuto nel gruppo complessivo di tutte le trasformazioni projettive della stessa superficie in sè medesima) ».

Matematica. — *Sull'estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari a derivate parziali d'ordine superiore*. Nota del dott. O. NICCOLETTI, presentata dal Socio BIANCHI.

« Il sig. prof. Luigi Bianchi, nell'ultima sua Nota sull'estensione del metodo di Riemann [1], ha dato una formula notevole di calcolo integrale, colla quale ha esteso il metodo di Riemann all'equazione:

$$\Omega(u) = \frac{\partial^n u}{\partial x_1\, \partial x_2 \dots \partial x_n} + \sum_{i_1} a_{i_1} \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}} + \cdots + a_{12\dots n}\, u = \mathrm{F}(x_1 x_2 \dots x_n)$$

trattando per essa il problema delle *caratteristiche*, cioè della determinazione dell'integrale, quando ne siano assegnati i valori (in modo compatibile) su n iperpiani paralleli agli iperpiani coordinati dell' S_n, di cui $x_1, x_2 \dots x_n$ sono le coordinate cartesiane ortogonali. Ma per l'equazione antecedente, affatto analogamente che per le equazioni del 2° ordine del tipo iperbolico, ci si può proporre un altro problema, quello della determinazione dell'integrale, quando siano dati i valori suoi e di $n-1$ sue derivate sopra una ipersuperficie di S_n, le cui proiezioni sugli iperpiani coordinati corrispondano biunivocamente (almeno nel campo che si considera) all'ipersuperficie stessa. Questo secondo problema, per la cui risoluzione bastano in fondo le formule del prof. Bianchi, è trattato nella presente Nota.

« 1. In tutto ciò che segue usiamo, finchè non si dica esplicitamente, le medesime indicazioni della Nota citata del prof. Bianchi. Osserviamo, posto ciò, la formula di derivazione

$$\text{(I)}\quad v\frac{\partial^r u}{\partial x_1 \dots \partial x_r} - \sum_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(v \frac{\partial^{r-1} u}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_r}}\right) + \sum_{i_1 i_2} \frac{\partial}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}\left(v \frac{\partial^{r-2} u}{\partial x_{i_3} \dots \partial x_{i_r}}\right) +$$

$$+ \cdots + (-1)^s \sum_{i_1 \dots i_s} \frac{\partial^s}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}}\left(v \frac{\partial^{r-s} u}{\partial x_{i_{s+1}} \dots \partial x_{i_r}}\right) + \cdots + (-1)^r \frac{\partial^r (vu)}{\partial x_1 \dots \partial x_r} =$$

$$= (-1)^r u \frac{\partial^r v}{\partial x_1 \dots \partial x_r}$$

la quale, applicata ripetutamente, ci darà la risoluzione del nostro problema.

[1] Rendiconti della R. Accademia dei Lincei del 3 Marzo 1895. In seguito questa Nota sarà indicata colla lettera B.

« Per dimostrare la (I) si osservi che essa è vera per $r=1,2\dots$; basterà quindi procedere per induzione e, suppostala vera fino ad un certo numero r, dimostrarla per $r+1$. Si sostituisca perciò nella (I) ad u, $\frac{\partial u}{\partial x_{r+1}}$ e nella formula che così si ottiene si osservi che

$$(-1)^r \frac{\partial u}{\partial x_{r+1}} \frac{\partial^r v}{\partial x_1 \dots \partial x_r} = (-1)^{r+1} u \frac{\partial^{r+1} v}{\partial x_1 \dots \partial x_r \partial x_{r+1}} + \\ + (-1)^r \frac{\partial}{\partial x_{r+1}} \left(u \frac{\partial^r v}{\partial x_1 \dots \partial x_r} \right)$$

e a quest'ultimo termine si applichi di nuovo la (I): si ha allora la formula stessa, cambiato r in $r+1$. La formula è così dimostrata in generale.

« 2. Consideriamo ora l'espressione differenziale lineare

$$(1)\quad \Omega(u) = \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \dots \partial x_n} + \sum_{i_1} a_{i_1} \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}} + \dots + \sum_{i_1 \dots i_s} a_{i_1 \dots i_s} \frac{\partial^{n-s} u}{\partial x_{i_{s+1}} \dots \partial x_{i_n}} + \dots \\ + \dots + a_{12\dots n} u$$

e le sue componenti dei diversi ordini (B, pag. 135)

$$\Omega_{i_1 i_2 \dots i_r}.$$

« Definiamo quindi (un po' diversamente dal prof. Bianchi) l'espressione aggiunta della $\Omega(u)$

$$(2)\quad \Phi(v) = (-1)^n \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \dots \partial x_n} + (-1)^{n-1} \sum_{i_1} \frac{\partial^{n-1}(a_{i_1} v)}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}} + \dots + \\ + (-1)^{n-s} \sum_{i_1 \dots i_s} \frac{\partial^{n-s}(a_{i_1 \dots i_s} v)}{\partial x_{i_{s+1}} \dots \partial x_{i_n}} + \dots + a_{12\dots n} v$$

e le sue componenti

$$\Phi_{i_1 i_2 \dots i_r}.$$

Sarà allora $(-1)^r \Phi_{i_1 \dots i_r}$ l'espressione aggiunta di $\Omega_{i_1 i_2 \dots i_r}$.

« 3. Vogliasi ora l'integrale regolare u della equazione $\Omega(u)=0$, quando lungo un' ipersuperficie σ, che soddisfi alle condizioni enunciate in principio, siano assegnati i valori della funzione u, di una delle sue derivate prime, di una delle sue derivate seconde, ..., di una delle sue derivate di ordine $n-1$. Limitandoci a quella regione di S_n, per la quale ogni S_1 parallelo agli assi coordinati incontra effettivamente σ in un punto, sia A il punto di coordinate $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$, dove si vuole calcolare l'integrale; $A_1, A_2 \dots A_n$ i punti in cui gli S_1 condotti per A parallelamente agli assi coordinati $x_1, x_2 \dots x_n$ incontrano σ; sia poi σ_{i_1} la varietà ad $n-2$ dimensioni intersezione dell'ipersuperficie σ coll'iperpiano $x_{i_1} = \alpha_{i_1}$, e in generale sia $\sigma_{i_1 \dots i_s}$ la varietà ad $n-s-1$ dimensioni, in cui l' S_{n-s} $(x_{i_1}=\alpha_{i_1}, x_{i_2}=\alpha_{i_2}, \ldots x_{i_s}=\alpha_{i_s})$ sega l'ipersuperficie σ.

Indicando allora con v la soluzione *principale* della $\Phi(v)=0$, relativa al punto A, (B, pag. 138), formiamo l'espressione

$$v\Omega(u)=v\Omega(u)-u\Phi(v).$$

Applicando la (I) a ciascun termine

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_r} v \frac{\partial^{n-r} u}{\partial x_{i_{r+1}} \ldots \partial x_{i_n}} - (-1)^{n-r} u \frac{\partial^{n-r}(a_{i_1 \ldots i_r}) v}{\partial x_{i_{r+1}} \ldots \partial x_{i_n}}$$

avremo

$$(3) \qquad v\Omega(u)=\sum_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(v\Omega_{i_1}(u))-\sum_{i_1 i_2} \frac{\partial^2}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}(v\Omega_{i_1 i_2}(u))+\cdots+$$

$$+(-1)^{s-1}\sum_{i_1 \ldots i_s} \frac{\partial^s}{\partial x_{i_1}\ldots \partial x_{i_s}}(v\Omega_{i_1 \ldots i_s}(u))+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{\partial^n(v\Omega_{1\ldots n}(u))}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}=$$

$$=\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial X_2}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}$$

dove

$$(4) \quad X_{i_1}=v\Omega_{i_1}(u)-\tfrac{1}{2}\sum_{i_2}{}' \frac{\partial}{\partial x_{i_2}}(v\Omega_{i_1 i_2}(u))+\tfrac{1}{3}\sum_{i_2 i_3}{}' \frac{\partial^2}{\partial x_{i_2}\partial x_{i_3}}(v\Omega_{i_1 i_2 i_3}(u))+\cdots+$$

$$+(-1)^{s-1}\frac{1}{s}\sum_{i_2 \ldots i_s}{}' \frac{\partial^{s-1}}{\partial x_{i_2}\ldots \partial x_{i_s}}(v\Omega_{i_1 i_2 \ldots i_s}(u))+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\frac{\partial^{n-1}(v\Omega_{i_1 i_2 \ldots i_n}(u))}{\partial x_{i_2}\ldots \partial x_{i_n}}$$

indicando col simbolo $\sum\limits_{i_2 \ldots i_s}{}'$ che nella somma corrispondente deve essere omesso l'indice i_1.

Quindi, se u è una soluzione della $\Omega(u)=0$, per una formula nota [1] si avrà:

$$\int_\Sigma (X_1 \cos(\nu x_1)+X_2 \cos(\nu x_2)+\cdots+X_n \cos(\nu x_n))\, d\Sigma=0$$

indicando con Σ il campo ad $(n-1)$ dimensioni che limita l' $(n+1)$edro S a base curva, i cui vertici sono i punti $A, A_1 \ldots A_n$, con ν la normale a Σ diretta verso l'interno di S, con (νx_i) l'angolo della direzione ν colla direzione positiva dell'asse x_i. Supponendo allora, per fissare le idee, che l' $(n+1)$edro S abbia il suo interno dalla parte positiva di tutti gli iperpiani coordinati, la formula antecedente diviene:

[1] Beltrami, *Sulla teoria generale dei parametri differenziali*. Bologna 1869, pag. 31.

$$\sum_{i_1}\int\int\cdots\int \mathrm{X}_{i_1}\, dx_{i_2}\ldots dx_{i_n} + \int_\sigma \{\mathrm{X}_1 \cos(\nu x_1) + \cdots + \mathrm{X}_n \cos(\nu x_n)\}\, d\sigma = 0$$

nella quale ciascun integrale del 1° termine va esteso al campo ad $n-1$ dimensioni, che sull'iperpiano $x_{i_1} = \alpha_{i_1}$ viene limitato dagli altri iperpiani e dall' ipersuperficie σ, e nel secondo termine $d\sigma$ indica l'elemento di spazio dell' ipersuperficie σ.

« Ma, poichè nell' iperpiano $x_{i_1} = \alpha_{i_1}$ la v soddisfa all' equazione $-\Phi_{i_1}(v) = 0$ (aggiunta della $\Omega_{i_1}(u) = 0$), in questo iperpiano sarà

$$v\Omega_{i_1}(u) = v\Omega_{i_1}(u) + u\Phi_{i_1}(v) = \sum_{i_2}{}' \frac{\partial}{\partial x_{i_2}}(v\Omega_{i_1 i_2}(u)) - \sum_{i_2 i_3}{}' \frac{\partial^2}{\partial x_{i_2}\,\partial x_{i_3}}(v\Omega_{i_1 i_2 i_3}(u)) +$$

$$+ \cdots + (-1)^{s-2} \sum_{i_2 \ldots i_s}{}' \frac{\partial^{s-1}}{\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_s}}(v\Omega_{i_1 i_2 \ldots i_s}(u)) +$$

$$+ \cdots + (-1)^{n-2} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_n}}(v\Omega_{i_1 i_2 \ldots i_n}(u))$$

e quindi

$$\mathrm{X}_{i_1} = \frac{1}{2}\sum_{i_2}{}' \frac{\partial \mathrm{X}_{i_1 i_2}}{\partial x_{i_2}}$$

dove, con notazioni analoghe alle antecedenti,

$$\mathrm{X}_{i_1 i_2} = v\Omega_{i_1 i_2}(u) - \frac{2}{3}\sum_{i_3}{}' \frac{\partial}{\partial x_{i_3}}(v\Omega_{i_1 i_2 i_3}(u)) + \cdots +$$

$$+ (-1)^{s-2}\frac{2}{s}\sum_{i_3 \ldots i_s}{}' \frac{\partial^{s-2}}{\partial x_{i_3}\ldots\partial x_{i_s}}(v\Omega_{i_1 \ldots i_s}(u)) + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{2}{n}\frac{\partial^{n-2}(v\Omega_{i_1 \ldots i_n}(u))}{\partial x_{i_3}\ldots\partial x_{i_n}}$$

e quindi

$$\sum_{i_1 i_2}\int\int\cdots\int \mathrm{X}_{i_1 i_2}\, dx_{i_3}\ldots dx_{i_n} + \frac{1}{2}\sum_{i_1}\int_{\sigma_{i_1}}\Big\{\sum_{i_2}{}' \mathrm{X}_{i_1 i_2}\cos(\nu_{i_1} x_{i_2})\Big\}\, d\sigma_{i_1} -$$

$$- \int_\sigma \Big\{\sum_{i_1} \mathrm{X}_{i_1}\cos(\nu x_{i_1})\Big\}\, d\sigma = 0$$

essendo ν_{i_1} la normale a σ_{i_1} nell'iperpiano $x_{i_1} = \alpha_{i_1}$ diretta verso l'interno del campo ad $n-1$ dimensioni già menzionato e $d\sigma_{i_1}$ l'elemento di spazio della varietà σ_{i_1}.

« Affatto analogamente sarà in generale

$$(5)\qquad \int_\sigma \Big\{\sum_{i_1} X_{i_1}\cos(\nu x_{i_1})\Big\} d\sigma_{i_1} - \frac{1}{2}\sum_{i_1}\int_{\sigma_{i_1}}\Big\{\sum_{i_2}{}' X_{i_1 i_2}\cos(\nu_{i_1} x_{i_2})\Big\} d\sigma_{i_1} +$$

$$+\frac{1}{3}\sum_{i_1 i_2}\int_{\sigma_{i_1 i_2}}\Big\{\sum_{i_3}{}' X_{i_1 i_2 i_3}\cos(\nu_{i_1 i_2} x_{i_3})\Big\} d\sigma_{i_1 i_2} + \cdots +$$

$$+(-1)^{s-1}\frac{1}{s}\sum_{i_1\ldots i_{s-1}}\int_{\sigma_{i_1\ldots i_{s-1}}}\Big\{\sum_{i_s}{}' X_{i_1\ldots i_{s-1} i_s}\cos(\nu_{i_1\ldots i_{s-1}} x_{i_s})\Big\} d\sigma_{i_1\ldots i_{s-1}} +$$

$$+(-1)^{s-1}\sum_{i_1\ldots i_s}\int\int\cdots\int X_{i_1\ldots i_s}\, dx_{i_{s+1}}\ldots dx_{i_n} = 0$$

dove gli ultimi integrali sono estesi al campo ad $n-s$ dimensioni che sull' $S_{n-s}\,(x_{i_1}=\alpha_{i_1}\ldots x_{i_s}=\alpha_{i_s})$ viene limitato dagli altri iperpiani e dalla varietà $\sigma_{i_1\ldots i_s}$ e dove

$$(6)\qquad X_{i_1 i_2\ldots i_s} = v\Omega_{i_1 i_2\ldots i_s}(u) - \frac{s}{s+1}\sum_{i_{s+1}}{}'\frac{\partial}{\partial x_{i_{s+1}}}(v\Omega_{i_1\ldots i_{s+1}}(u)) + \cdots +$$

$$+(-1)^{n-s}\frac{s}{n}\frac{\partial^{n-s}}{\partial x_{i_{s+1}}\ldots\partial x_{i_n}}(v\Omega_{i_1\ldots i_n}(u)).$$

« Per dimostrare le due formole (5) e (6), basterà osservare che esse sono vere per $s=1$, $s=2$ e quindi, ricordando che lungo l' $S_{n-s}(x_{i_1} = \alpha_{i_1}\ldots x_{i_s}=\alpha_{i_s})$ la v soddisfa alla equazione $(-1)^s\Phi_{i_1 i_2\ldots i_s}(v)=0$, trasformare le $X_{i_1\ldots i_s}$ in una somma di $n-s$ derivate rapporto ad $x_{i_{s+1}}\ldots x_{i_n}$. Applicando allora di nuovo la formula del Beltrami, si ottengono la (5) e la (6), cambiatovi s in $s+1$.

« Facendo in particolare $s=n-1$, avremo per la (5)

$$\int_\sigma \Big\{\sum_{i_1} X_{i_1}\cos(\nu x_{i_1})\Big\} d\sigma - \frac{1}{2}\sum_{i_1}\int_{\sigma_{i_1}}\Big\{\sum_{i_2}{}' X_{i_1 i_2}\cos(\nu_{i_1} x_{i_2})\Big\} d\sigma_{i_1} + \cdots +$$

$$+(-1)^{s-1}\frac{1}{s}\sum_{i_1\ldots i_{s-1}}\int_{\sigma_{i_1\ldots i_{s-1}}}\Big\{\sum_{i_s}{}' X_{i_1 i_2\ldots i_s}\cos(\nu_{i_1 i_2\ldots i_{s-1}} x_{i_s})\Big\} d\sigma_{i_1\ldots i_{s-1}} + \cdots +$$

$$+(-1)^{n-2}\frac{1}{n-1}\sum_{i_1\ldots i_{n-2}}\int_{\sigma_{i_1\ldots i_{n-2}}}\Big\{\sum_{i_{n-1}}{}'\,X_{i_1\ldots i_{n-1}}\cos(\nu_{i_1\ldots i_{n-2}}x_{i_{n-1}})\Big\}d\sigma_{i_1\ldots i_{n-2}}+$$

$$+(-1)^{n-2}\sum_{i_1\ldots i_{n-1}}\int X_{i_1\ldots i_{n-1}}\,dx_{i_n}=0$$

dove, per la (6):

$$X_{i_1\ldots i_{n-1}}=v\Omega_{i_1\ldots i_{n-1}}(u)-\frac{n-1}{n}\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}(v\Omega_{i_1\ldots i_n}(u))=v\left(\frac{\partial u}{\partial x_{i_n}}-a_{i_n}u\right)-$$

$$-\frac{n-1}{n}\frac{\partial(uv)}{\partial x_{i_n}}=\frac{1}{n}\frac{\partial(uv)}{\partial x_{i_n}}.$$

E poichè gli ultimi integrali vanno estesi lungo degli S_1 da A_{i_n} ad A, avremo:

$$\int X_{i_1\ldots i_{n-1}}\,dx_{i_n}=\frac{1}{n}u_A-\frac{1}{n}(uv)_{A_{i_n}}$$

e si avrà quindi finalmente la formula:

$$u_A=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}_i(uv)_{A_i}-\frac{1}{n-1}\sum_{i_1\ldots i_{n-2}}\int_{\sigma_{i_1\ldots i_{n-2}}}\Big\{\sum_{i_{n-1}}{}'\,X_{i_1\ldots i_{n-1}}\cos(\nu_{i_1\ldots i_{n-2}}x_{i_{n-1}})\Big\}d\sigma_{i_1\ldots i_{n-2}}+$$

$$+\frac{1}{n-2}\sum_{i_1\ldots i_{n-3}}\int_{\sigma_{i_1\ldots i_{n-3}}}\Big\{\sum_{i_{n-2}}{}'\,X_{i_1\ldots i_{n-2}}\cos(\nu_{i_1\ldots i_{n-3}}x_{i_{n-2}})\Big\}d\sigma_{i_1\ldots i_{n-3}}+$$

(7)

$$+\cdots+(-1)^{n-s}\frac{1}{s}\sum_{i_1\ldots i_{s-1}}\int_{\sigma_{i_1\ldots i_{s-1}}}\Big\{\sum_{i_s}{}'\,X_{i_1\ldots i_s}\cos(\nu_{i_1\ldots i_{s-1}}x_{i_s})\Big\}d\sigma_{i_1\ldots i_{s-1}}+\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\int_{\sigma}\Big\{\sum_{i_1}X_{i_1}\cos(\nu x_{i_1})\Big\}d\sigma$$

che è la formula cercata. Per essa il valore dell'integrale nel punto A è dato dalla media del prodotto (uv) nei punti $A_1\ldots A_n$; da $\frac{n(n-1)}{2}$ integrali curvilinei, da $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ integrali di superficie, ... da $\frac{n(n-1)...(n-s+1)}{1.2...s}$ integrali estesi a varietà ad $s-1$ dimensioni, ... da un integrale esteso ad un'ipersuperficie. Dalla (7) risulta anche l'unicità dell'integrale, che soddisfa alle condizioni iniziali assegnate.

Qualora l'equazione data non fosse omogenea, ma avesse invece la forma

$$\Omega(u) = \mathrm{F}(x_1 ... x_n)$$

basterebbe aggiungere al 2° membro della (7) l'integrale nplo

$$(-1)^{n} \int\int ... \int v\,\mathrm{F}(x_1 ... x_n)\, dx_1 ... dx_n$$

esteso all' $(n+1)$edro S.

In modo affatto analogo si risolve il medesimo problema pei sistemi di più equazioni della stessa forma (B. pag. 139) (¹).

4. Non sarà inutile, io credo, far vedere la relazione intima che lega la formula (I) di derivazione del n.° 1, colla formola (I) d'integrazione della Nota citata del prof. Bianchi.

Si pensino perciò nella formula del Bianchi le quantità $\beta_1, \beta_2 ... \beta_r$, non più costanti, ma variabili, e si indichino con $x_1 ... x_r$. Derivando allora r volte la formula del Bianchi rispetto ad $x_1 ... x_r$, si ha la (I) del n.° 1.

Reciprocamente, si moltiplichino tutti i termini della (I) del n.° 1 per $dx_1 ... dx_r$, e si integri da α_1 a β_1 rispetto ad $x_1, ...$; da α_r a β_r rispetto ad x_r. Ricordando allora che l'integrale

$$\int_{a_1}^{b_1} .... \int_{a_s}^{b_s} \frac{\partial^s z}{\partial x_1 ... \partial x_s} dx_1 ... dx_s$$

dove z è una funzione di $x_1 ... x_s$, le a e le b quantità costanti, è uguale ad un aggregato di 2^s termini, che sono i valori di z nei vertici del parallelepipedo ad s dimensioni, a cui è estesa l'integrazione, presi positivamente o negativamente, secondochè il numero delle coordinate del vertice uguali alle a è pari o dispari, su ciascun integrale

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} .... \int_{\alpha_r}^{\beta_r} \frac{\partial^s}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_s}} \left(v \frac{\partial^{r-s} u}{\partial x_{i_{s+1}} ... \partial x_{i_r}} \right) dx_1 ... dx_r$$

(¹) Colgo l'occasione per rettificare un lieve errore sfuggitomi nella nota: « *Su un sistema di equazioni a derivate parziali del 2° ordine* » inserita in questi Rendiconti del 3 Marzo 1895. Ivi è detto che il sistema (15) è aggiunto di sè stesso: mentre invece il sistema aggiunto del (15) è

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial y} = \sum_k c_{ki} u_k$$

il quale però ha la stessa natura del sistema (15) stesso e non ne differisce che per le indicazioni.

si eseguisca prima l'integrazione rispetto ad $x_{i_1} \ldots x_{i_s}$: quindi a ciascuna delle funzioni che compariscono sotto il segno dei 2^s integrali così ottenuti, tranne a quello

$$(-1)^s \int_{\alpha_{i_{s+1}}}^{\beta_{i_{s+1}}} \cdots \int_{\alpha_{i_r}}^{\beta_{i_r}} \left(v \frac{\partial^{r-s} u}{\partial x_{i_{s+1}} \ldots \partial x_{i_r}} \right)_{\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_s}} dx_{i_{s+1}} \ldots dx_{i_r}$$

si applichi di nuovo la (I). Eseguendo successivamente queste trasformazioni per $s = 1, 2 \ldots r$, dopo le riduzioni necessarie, si ottiene la formola (I) del Bianchi. Le due formule sono dunque perfettamente equivalenti ».

Astronomia. — *Fotografie della grande nebulosa di Orione e della minore presso la stella* 42 Orionis, *eseguite da A. Riccò e da A. Mascari nel R. Osservatorio di Catania.* Nota del prof. A. Riccò, presentata dal Socio Tacchini.

« Nel marzo 1893 si fecero nell'Osservatorio di Catania le prime fotografie della nebulosa d'Orione con esposizione fino di un'ora, che riuscirono abbastanza interessanti: ma allora il nostro equatoriale fotografico non era idoneo ad agire per pose molto più lunghe, seguendo esattamente il corso degli astri anche nelle posizioni molto lontane dal meridiano, nelle quali le difficoltà dell'equilibrio e del maneggio dello strumento, e l'influenza perturbatrice della rifrazione atmosferica sono più gravi.

« All'equatoriale fotografico, quantunque costruito con molta abilità ed intelligenza dall'ing. A. Salmoiraghi di Milano, sono occorsi parecchi miglioramenti e modificazioni: il che non deve far caso se si pensa che questo strumento è uno dei primi grandi equatoriali costruiti in Italia, ed è anzi l'unico per la fotografia celeste, per la quale la complicazione della costruzione e le esigenze di precisione sono ancora maggiori.

« Anche il grande obbiettivo fotografico di $0^m,328$ di apertura libera, sebbene costruito dalla rinomata casa Steinheil di Monaco e dichiarato da autorità competentissima perfetto come quello dell'osservatorio di Potsdam per l'uso ordinario, invece per le pose lunghissime dava le stelle lucide accompagnate da una immagine parassita, che siamo riusciti ad eliminare completamente solo dopo lunghe indagini e scabrose prove, modificando la distanza reciproca dei vetri flint e crown costituenti l'obbiettivo in discorso.

« Perfezionato lo strumento siamo giunti a fare una fotografia della nebulosa d'Orione di $4^h,8^m$ di posa, che non ci pare inferiore alle migliori fatte altrove anche con strumenti maggiori od esposizione più lunga. Anzi, per quanto ci consta, la fotografia della nebulosa minore attorno *42 Orionis* sarebbe superiore a quelle fatte finora.

« La serie delle nostre fotografie di questi oggetti celesti è la seguente,