ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IV.

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

le considerazioni che abbiamo premesse circa la estensione della teoria della elasticità proposta dal prof. Voigt.

« In generale poi si vede che, elevando sufficientemente il grado del potenziale, divengono possibili assi di simmetria di periodo qualunque, e precisamente: 1° perchè esista un asse di periodo pari $2r$, distinto da un asse di isotropia, il potenziale deve essere di grado non inferiore ad r; 2° perchè esista un asse di periodo dispari $2r+1$, distinto da un asse di isotropia, il potenziale deve essere di grado non inferiore ad $r+1$.

« Una volta fissato il grado che deve avere il potenziale e trovati gli invarianti ciclici corrispondenti, si potranno subito determinare le diverse forme del potenziale stesso per tutti gli assi di simmetria, compatibili col suo grado. Quindi in particolare si potranno ritrovare le forme note del potenziale nel caso, comunemente ammesso, che sia di 2° grado, per una via analoga a quella indicata come la più naturale dal prof. Beltrami, pei corpi isotropi.

« Noi però non insisteremo su queste ovvie applicazioni ».

Matematica. — *Sulle congruenze di grado* n *che si possono rappresentare sopra un piano.* Nota di P. Visalli, presentata a nome del Socio Cremona.

« 1. In questa Nota ci proponiamo lo studio delle congruenze di grado n, dotate, ciascuna, di un piano eccezionale σ contenente un numero semplicemente infinito di rette della congruenza, le quali inviluppano una curva ψ della classe $n-1$.

« Queste congruenze si possono rappresentare sul piano semplice σ.

« Sia C_n una di esse.

« Ad una retta a di C_n, corrisponde il punto $a\sigma$, e viceversa ogni punto di σ è immagine della retta di C_n passante per esso e non giacente, in generale, in σ.

« Sopra ogni tangente della curva ψ, vi è un punto, che in generale non coincide col punto di contatto, tale che per esso non passa alcuna retta di C_n esterna al piano σ. Il luogo di questi punti è una curva φ, che è l'immagine delle rette di C_n, giacenti in σ.

« Nel piano σ vi saranno dei punti P, eccezionali per la congruenza: x_1 semplici, x_2 doppi, ..., x_r r-pli; cioè tali che per ogni punto r-plo passa un numero semplicemente infinito di rette di C_n, che formano un cono di ordine r, ed altre $n-1-r$ tangenti alla curva ψ.

« 3. Le rette di C_n, che tagliano una retta a qualunque (asse), formano una superficie Γ dell'ordine $2n$, giacchè in un piano aa' passante per a, giacciono n rette di C_n, e per il punto $a\,a'$ passano altre n rette della congruenza, e quindi a' taglia in $2n$ punti la superficie Γ. Questa superficie ha un punto r-plo in ogni punto eccezionale r-plo della congruenza.

« 4. Il luogo delle tracce su σ delle rette che tagliano a è una curva α dell'ordine $n+1$, che passa con r rami per ogni punto eccezionale r-plo, e semplicemente per il punto $a\sigma$ (vertice della curva). Se la retta a appartiene a C_n, il punto $a\sigma$ è doppio per la curva α.

« Due curve α, corrispondenti a due rette a, b, oltre ai punti eccezionali, hanno in comune $2n$ punti, tracce delle $2n$ rette che tagliano a e b, quindi si ha:

$$(n+1)^2 - \Sigma\, r^2\, x_r = 2n$$

da cui

$$\Sigma\, r^2\, x_r = n^2 + 1 \tag{1}$$

Le curve α non hanno, in generale, punti multipli fuori dei punti eccezionali, quindi indicando con p il loro genere, si ha:

$$2p = n\,(n-1) - \Sigma\, r\,(r-1)\; x_r$$

e per la (1):

$$2p = \Sigma\, r x_r - n - 1 \tag{2}$$

« 5. Nella formola (1) il massimo valore che si può dare ad r è n, e si ha allora $x_n = 1$, $x_1 = 1$, cioè nel piano σ vi sono due punti eccezionali, uno n-plo e l'altro semplice.

« La superficie Γ, corrispondente ad una retta di σ, si comporrà del piano σ contato $n-1$ volte, e di un'altra superficie di ordine $n+1$; se poi la retta di σ passa per il punto eccezionale n-plo P_n, la superficie Γ corrispondente si comporrà del piano σ contato $n-1$ volte, del cono di ordine n e vertice P_n, e di un fascio di rette; quindi:

« Se nel piano σ vi è un punto eccezionale n-plo per la congruenza, vi sarà un numero semplicemente infinito di punti eccezionali semplici della congruenza, ciascuno dei quali è il centro di un fascio di rette di C_n, situato in un piano passante per P_n.

« In un'altra Nota studieremo più dettagliatamente queste particolari congruenze aventi un punto eccezionale n-plo.

« 6. Sia π un piano qualunque, non eccezionale per la congruenza. Le rette di C_n determinano fra i piani π, σ una corrispondenza $(1, n)$, dicendo corrispondenti un punto di π ed uno di σ che giacciono sulla stessa retta di C_n. Alle rette di π corrispondono in σ curve α di ordine $n+1$, le quali formano una rete. Queste curve α passano un r rami per ogni punto P r-plo, e semplicemente per gli n punti S_i $(i = 1, \ldots, n)$ in cui le n rette S_i di C_n, giacenti in π, tagliano σ.

« I punti fondamentali di σ, sono i punti P ed i punti S; mancano, in generale, le curve fondamentali e quindi in π mancano i punti fondamentali.

« Il cono di rette di C_n avente per vertice un punto P, r-plo, taglia π secondo una curva di ordine r, curva fondamentale corrispondente a P. Le rette s, sono rette fondamentali corrispondenti ai punti S. Alla retta $\pi\sigma$, considerata come appartenente a π, corrisponde la retta stessa e la curva φ. Quindi la curva φ è dell'ordine n, e passa come le curve α per i punti P.

« Alla retta $\pi\sigma$, considerata come appartenente a σ, corrisponde la retta stessa e le n rette S_i.

« 7. La curva doppia di σ, che è l'Iacobiana della rete di curve α, è dell'ordine $3n$ e passa con $3r-1$ rami per ogni punto P, r-plo, e con due rami per ogni punto S. Essa è di genere:

$$p' = 9p - n + 1 - \Sigma x_r$$

ove Σx_r indica il numero dei punti P; e taglia una curva α in $2(p+n-1)$ punti, fuori dei punti fondamentali.

« 8. La curva limite del piano π è dell'ordine $2(p+n-1)$, dello stesso genere p' della curva doppia, della classe $4p+2n-1+\Sigma x_r$, ha:

$$\delta = 2\,\{(p+n)^2 + 4 - 3n + 2\Sigma x_r - 17p\}$$

punti doppi,

$$c = 3(6p - \Sigma x_r - 1)$$

cuspidi, e tocca in $3r-1$ punti ogni curva fondamentale di ordine r.

« 9. Se A è un punto comune al piano π e alla superficie focale di C_n, per A passano due rette di C_n infinitamente vicine; quindi A è un punto della curva limite, e viceversa; quindi:

« L'ordine della superficie focale è $2(p+n-1)$.

« La curva doppia della superficie focale è una curva gobba dell'ordine δ.

« La curva cuspidale della superficie focale è una curva gobba dell'ordine c.

« I coni circoscritti alla superficie focale sono dell'ordine $4p+2n-1+\Sigma x_r$.

« Le rette di C_n sono tangenti doppie della superficie focale.

« La superficie focale tocca un piano eccezionale passante per un punto P, semplice, secondo una conica; e tocca un cono di C_n, avente il vertice in un punto P_r, r-plo, secondo una curva gobba dell'ordine $3r-1$.

« 10. La retta $\pi\sigma$ taglia la curva φ in n punti per i quali passa la curva doppia, quindi la curva limite tocca in questi n punti la retta $\pi\sigma$. Inoltre la curva limite taglia la stessa retta $\pi\sigma$ in $2(p-1)$ punti. Ad uno di questi punti corrispondono n punti di cui uno coincide col punto medesimo, e gli altri $n-1$ sono tali che due sono infinitamente vicini, quindi questi punti sono intersezioni di $\pi\sigma$ e della curva ψ. Risulta quindi che la curva ψ è dell'ordine $2(p-1)$ e che la superficie focale tocca il piano σ lungo la curva φ e lo sega lungo la curva ψ.

« 11. Per un punto P, r-plo, passano $n-1$ rette di C_n tangenti a ψ, delle quali r appartengono al cono di C_n, di vertice P. E poichè la curva gobba di contatto del cono con la superficie focale è dell'ordine $3r-1$, risulta che questa curva ha un punto $(2r-1)$plo in P.

« 12. La curva ψ non passa per un punto P_r, r-plo, e la curva φ vi passa con r rami, quindi ogni punto eccezionale r-plo di σ è multiplo secondo $2r$ per la superficie focale.

« 13. Sieno P_r, P_s due punti fondamentali di σ, rispettivamente r-plo ed s-plo, e tali che $r+s=n$. Alla retta $P_r\,P_s \equiv a$, corrisponde in π una curva di ordine $n+1$ composta dalle due curve fondamentali corrispondenti ai punti P_r, P_s, e di ordine complessivo uguale ad n, ed una retta a' passante per $a.\pi\sigma$. Inoltre alla retta a' corrisponde una curva α, composta della retta a e di una curva α_n di ordine n. Ad ogni punto di a' corrisponde un punto di a ed $n-1$ punti di α_n, e ad ogni punto di a un punto di a', al punto aa' corrisponde se stesso, e al punto della retta a infinitamente vicino a P_r (P_s) corrisponde uno dei punti in cui a' taglia la curva fondamentale corrispondente; quindi:

« Le rette di C_n, giacenti nel piano aa', formano un fascio, il cui centro si trova sui due coni (P_r), (P_s).

« La curva α_n taglia la retta a in due punti fuori dei punti fondamentali per i quali passa la curva doppia, inoltre la curva α_n taglia la curva doppia oltre che in questi due punti e nei punti fondamentali, in altri $2(n+p-1)-4$; quindi la retta a' tocca in due punti la curva limite e la sega in $2(n+p-1)-4$ altri punti, e perciò:

« Il piano aa' è tangente alla superficie focale lungo una conica, e la taglia secondo una curva di ordine $2(n+p-1)-4$.

« 14. Sia O' il centro del fascio di rette di C_n giacenti nel piano aa', e π' un piano per O' non coincidente con aa'. Delle n rette di C_n, giacenti in π' una è la retta $s_i' \equiv \pi.\,aa'$; e la retta a è fondamentale nella trasformazione (π', σ). La curva doppia di σ è dell'ordine $3n-1$, passa con $3r-2$ e $3s-2$ rami per i due punti P_r, e P_s, e semplicemente per S_i, quindi la curva limite di π' tocca in un punto fuori di O' la retta s_i', e perciò la conica di contatto fra il piano aa' e la superficie focale passa per O'.

« Ad una retta per O' corrisponde in σ la retta a ed una curva di ordine n, che ha un punto $(r-1)$plo in P_r ($(s-1)$plo in P_s), e non passa per S_i; e, poichè questa curva taglia la curva doppia in $2(n+p-1)-2$

punti fuori dei punti fondamentali, risulta che la curva limite ha un punto doppio in O′, e che O′ è un punto doppio della superficie focale.

« 15. La classe della superficie focale di C_n è uguale all'ordine, ed i coni circoscritti alla superficie focale hanno c piani tangenti stazionari, e δ piani tangenti doppi; quindi:

« I piani tangenti stazionari della superficie focale formano una sviluppabile della classe c, ed i piani tangenti doppi formano una sviluppabile della classe δ.

« 16. La superficie focale di C_n si può rappresentare sopra un piano doppio σ. Un punto A della superficie ha per immagine quel punto A′ di σ ove le due rette di C_n, infinitamente vicine, uscenti per A, tagliano σ.

« Viceversa: un punto A′ di σ, è immagine dei due punti ove la retta di C_n uscente per A′, e non giacente in generale in σ, tocca la superficie.

« Un punto P, r-plo, è immagine di una curva gobba della superficie di ordine $3r - 1$.

« Una sezione piana della superficie ha per immagine la curva doppia J nella trasformazione (π, σ), ove π è il piano segante.

« Queste curve J, in numero 3 volte infinito, sono dell'ordine $3n$, passano con $3r - 1$ rami per ogni punto P, r-plo, ed hanno n punti doppi, variabili in linea retta. Due curve J si segano, fuori dei punti fondamentali, in

$$9n^2 - \Sigma (3r - 1)^2 x_r = 12p + 6n - 3 - \Sigma x_r$$

punti variabili.

« Le rette di σ sono immagini di curve gobbe di ordine $3n$, appartenenti alla superficie focale.

« 17. Indichiamo con L la curva intersezione della superficie focale e di un piano π, e sia J la sua immagine. Ogni punto di J è immagine di un punto di L, e di un altro punto, che diremo congiunto al primo, situato sulla superficie focale. Il luogo dei punti congiunti ai punti di L, è una curva gobba L′, la quale ha pure per immagine la curva J.

« Se J_1 è l'immagine della sezione di un piano π_1 con la superficie, il numero dei punti comuni alle due curve J, J_1, cioè $12p + 6n - 3 - \Sigma x_r$ è uguale al numero dei punti in cui π_1 taglia L ed L′; ma π_1 taglia L in $2(p + n - 1)$ punti; quindi l'ordine della curva L′ è:

$$10p + 4n - \Sigma x_r - 1$$

« 18. Fra le coppie di punti congiunti della superficie focale ve ne è un numero semplicemente infinito, nelle quali i due punti congiunti sono infinitamente vicini. In altri termini vi è un numero semplicemente infinito di rette di C_n, che sono tangenti di flesso della superficie focale. Il luogo dei punti di contatto di queste rette di C_n, (punti uniti della superficie), è una curva E, che chiameremo curva unita della superficie focale.

« Le curve L e L' si tagliano in $10p + 4n - \Sigma x_r - 1$ punti. Ora se B è un punto comune ad L e L', il suo congiuuto B', deve essere comune ad L e L'. I punti B e B' possono essere distinti o coincidenti. Se sono distinti, la retta B B' è una retta di C_n giacente in π, e poichè in π vi sono n rette di C_n, risulta che in un piano qualunque π vi sono $10p + 2n - \Sigma x_r - 1$ punti uniti della superficie focale, e quindi:

« La curva unita della superficie focale è dell'ordine $10p + 2n - \Sigma x_r - 1$.

« Ci riserviamo di sviluppare in un altro lavoro le considerazioni speciali che si riferiscono alle congruenze di secondo e terzo grado ».

Matematica. — *Sopra alcune congruenze di grado* n, *dotate di una curva gobba singolare di ordine* n. Nota di P. Visalli, presentata a nome del Socio Cremona.

Fisica. — *Intorno ad alcune modificazioni dell'areometro di Fahrenheit, e ad una nuova forma di bilancia.* Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio Blaserna.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica terrestre. — *Calcolo della posizione dell'ipocentro, del tempo all'origine e della velocità di propagazione dei terremoti.* Nota di F. Bonetti e G. Agamennone, presentata dal Socio Tacchini.

« Se nel calcolare per un dato terremoto la posizione dell'ipocentro, il tempo all'origine e la velocità di propagazione si volesse tener conto adequato di tutte le circostanze, che possono influire più o meno sul fenomeno, s'incontrerebbero gravissime ed attualmente insuperabili difficoltà. Infatti per apprezzare convenientemente queste circostanze occorrerebbe una cognizione della costituzione interna del globo, quale pur troppo oggi non si ha, salvo che nella parte superficialissima: come anche si richiederebbe qualche dato di più sulle cause che danno origine ai terremoti. Queste difficoltà son messe molto bene in evidenza dal Cap. C. E. Dutton nel suo pregevolissimo lavoro sul terremoto di Charleston del 31 agosto 1886 [1], dove egli tratta a fondo

[1] *The Charleston Earthquake of August 31, 1886,* by Capt. Clar. Edw. Dutton — *United States Geological Survey — Ninth annual report 1887-88,* pag. 355-389. Whashington 1889.