ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IV.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 maggio 1895.

F. Brioschi Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra una trasformazione delle forme binarie e degli integrali corrispondenti.* Nota del Socio Brioschi.

« 1°. È nota da vari anni pei lavori dei Sigg. Weierstrass e Hermite, quella trasformazione della forma binaria biquadratica e del corrispondente integrale elittico, la quale modificava essenzialmente la teoria delle funzioni elittiche. Ma i metodi adottati dai due eminenti geometri sopra nominati, e da altri che successivamente si occuparono dello stesso argomento, per giungere a quella trasformazione, avendo di mira il problema speciale, non si prestano a generalizzazione.

« Nel breve scritto che oggi presento all'Accademia espongo un metodo di trasformazione pel quale l'accennata limitazione più non esiste, ed il caso della forma biquadratica rientra in quello di una forma binaria qualsivoglia d'ordine pari. Le linee generali di questo metodo trovansi già in una mia comunicazione all'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Francia di molti anni ora sono (1), ma in allora le mie ricerche erano più specialmente rivolte alle forme ternarie e perciò non mi occupai delle binarie che incidentalmente.

« Indicando con $f(y_1, y_2)$ una forma binaria dell'ordine n pari, e ponendo:

$$f(y_1 z_1 - f_2 z_2, y_2 z_1 + f_1 z_2) = f(y_1, y_2)\,(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n)(z_1, z_2)^n$$

nella quale $f_1 = \frac{1}{n}\frac{df}{dy_1}$, $f_2 = \frac{1}{n}\frac{df}{dy_2}$; i coefficienti $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ della trasformata sono, come è noto, covarianti della $f(y_1, y_2)$, e precisamente se con $h, k, \mathrm{A}, \ldots t, g, \ldots$ si rappresentano i covarianti:

(1) Comptes Rendus de l'Académie des sciences. Séance du 6 Avril 1863.

$$h = \frac{1}{2}(ff)_2\,,\ k = \frac{1}{2}(ff)_4\,,\ \mathrm{A} = \frac{1}{2}(ff)_6\,,\ t = 2\,(fh)\,,\ g = 2\,(fk)\,\ldots$$

sono:

$$\text{(1)}\qquad \begin{gathered} \alpha_0 = 1\,,\quad \alpha_1 = 0\,,\quad \alpha_2 = h\,,\quad \alpha_3 = t \quad \alpha_4 = f^2k - 3\,h^2 \\ \alpha_5 = f^2g - 2ht \quad \alpha_6 = f^4\,\mathrm{A} - 15\,f^2\,hk + 45\,h^3 + 10\,t^2\,,\ldots \end{gathered}$$

valori che già trovansi nella teoria delle forme di Clebsch e Gordan.

« Sia $\varphi\,(y_1\,,y_2)$ un covariante di $f(y_1\,,y_2)$ dell'ordine m; e posto:

$$\varphi_1 = \frac{1}{m}\frac{d\varphi}{dy_1},\quad \varphi_2 = \frac{1}{m}\frac{d\varphi}{dy_2}$$

si consideri la seconda trasformazione:

$$\text{(2)}\qquad f\,(y_1z_1 - \varphi_2z_2\,,\ \ y_2z_1 + \varphi_1z_2) = (\mathrm{A}_0\,,\mathrm{A}_1\,,\ldots\mathrm{A}_n)\,(z_1\,,z_2)^n\,.$$

I coefficienti $\mathrm{A}_0\,,\ \mathrm{A}_1\,,\ldots\ \mathrm{A}_n$ sono essi pure covariati dalla forma f, e si hanno:

$$\mathrm{A}_0 = f\,,\quad \mathrm{A}_1 = -\,(f\varphi)$$

mentre i valori degli altri coefficienti $\mathrm{A}_2\,,\mathrm{A}_3\,,\ldots\mathrm{A}_n$, si deducono dalla formola generale:

$$\text{(3)}\qquad f^{r-1}\,\mathrm{A}_r = (\alpha_0\,,\alpha_1\,,\ldots\,\alpha_r)\,(\mathrm{A}_1\,,\varphi)^r$$

nella quale $\alpha_0\,,\alpha_1\,\ldots$ hanno i valori superiori.

« 2°. Consideriamo i due casi di $n=4$, $n=6$ e tanto per l'uno che per l'altro caso supponiamo che il covariante φ sia eguale ad h, e quindi $m=4$ nel primo di essi, $m=8$ nell'altro; ed $\mathrm{A}_1 = -\frac{1}{2}t$ nei due casi. Per $n=4$ saranno:

$$\alpha_0 = 1\,,\quad \alpha_1 = 0\,,\quad \alpha_2 = h\,,\quad \alpha_3 = t\,,\quad \alpha_4 = g_2f^2 - 3h^2$$

essendo $k = g_2$ l'invariante di secondo grado della biquadratica, e si ha la nota relazione:

$$t^2 + 4\,h^3 = g_2hf^2 - g_3f^3$$

e per essa dalla formola (3) si deducono i valori:

$$\mathrm{A}_2 = \frac{1}{4}f\,(g_2h - g_3f)\,,\ \mathrm{A}_3 = -\frac{1}{8}t\,(g_2h - g_3f),\ \mathrm{A}_4 = g_3h^3 + \frac{1}{16}f(g_2h - g_3f)^2.$$

Ora i valori stessi nella ipotesi che $f(y_1\,,y_2) = 0$ diventano:

$$\mathrm{A}_0 = 0\quad \mathrm{A}_1 = -\frac{1}{2}t\,,\quad \mathrm{A}_2 = 0\,,\quad \mathrm{A}_3 = -\frac{1}{8}g_2ht\,,\quad \mathrm{A}_4 = g_3h^3 = -\frac{1}{4}g_3t^2$$

e ponendo in luogo di z_1 la espressione $\frac{1}{2}\frac{t}{h}z_1$, la trasformata (2) conduce alla

$$(\mathrm{A}_0,\mathrm{A}_1\ldots\mathrm{A}_4)\left(\frac{1}{2}\frac{t}{h}z_1\,,z_2\right) = \frac{1}{4}\,t^2z_2\,(4z_1{}^3 - g_2z_1z_2{}^2 - g_3z_2{}^3)\,.$$

« Passiamo al caso di $n=6$. I valori $\alpha_o, \alpha_1 \dots \alpha_6$ sono dati dalle (1) ed A è in questo caso l'invariante quadratico. È noto che le forme del sesto ordine hanno 26 covarianti ed invarianti, fra i quali sussistono 20 relazioni indipendenti o sigizie. Posto:

$$i=\frac{1}{2}(kk)_2\,,\quad p=(fk)_2\,,\quad l=(fk)_4\,,\quad m=(lk)_2\,,\quad n=(mk)_2$$

indicando con B, C gli invarianti quadratico e cubico del covariante k, cioè gli invarianti di quarto e di sesto grado di f, e con $D=\frac{1}{2}(mm)_2$ l'invariante del decimo grado, notiamo fra quelle sigizie la:

$$t^2+4h^3=f^2\left[hk+\frac{1}{3}fp-f^2\mathrm{A}\right]$$

e le

$$k^3-3p^2+12hi=f[lk-f\mathrm{B}]$$

$$\mathrm{A}k^2-6\,\mathrm{B}h+6ki+3\,pl=\frac{3}{2}fm$$

$$16\,i^2+\frac{3}{4}kl^2+2\mathrm{A}ki-12\mathrm{C}h=fn$$

per le quali e per altre che si trovano nei lavori dei Sigg. Stephanos, Stroh ed altri, si hanno pei coefficienti A_o, $\mathrm{A}_1 \dots$ nella ipotesi di $f(y_1, y_2)=0$ i seguenti valori:

$$\mathrm{A}_o=0\,,\quad \mathrm{A}_1=-\frac{1}{2}t\,,\quad \mathrm{A}_2=0\,,\quad \mathrm{A}_3=-\frac{1}{8}kht\quad \mathrm{A}_4=-\frac{1}{3}h^3p$$

$$\mathrm{A}_5=\frac{1}{12}h^2t\left(\frac{5}{8}k^2-\mathrm{A}h\right),\quad \mathrm{A}_6=h^4\left(\frac{1}{2}hl+\frac{1}{12}kp\right)$$

ed essendo nella data ipotesi $t^2+4h^3=0$ si giunge alla:

$$(\mathrm{A}_o, \mathrm{A}_1 \dots \mathrm{A}_6)\left(\frac{t}{2h^{\frac{3}{4}}}z_1\,, z_2\right)^6=$$

$$=\frac{1}{4^2}\frac{t^4}{h^{\frac{3}{4}}}z_2\,(6z_1^5-g_2z_1^3z_2^2-g_3z_1^2z_2^3-g_4z_1z_2^4-g_5z_2^5)$$

essendo:

$$g_2=5\frac{k}{h^{\frac{1}{2}}}\,,\quad g_3=-5\frac{p}{h^{\frac{3}{4}}}\,,\quad g_4=\frac{5}{8}\frac{k^2}{h}-\mathrm{A}\,,\quad g_5=\frac{1}{2}\frac{l}{h^{\frac{1}{4}}}+\frac{1}{12}\frac{kp}{h^{\frac{5}{4}}}$$

ed in conseguenza:

$$k=\frac{1}{5}g_2h^{\frac{1}{2}}\qquad p=-\frac{1}{5}g_3h^{\frac{3}{4}}\,,$$

$$\mathrm{A}=\frac{1}{5\,.\,8}g_2^2-g_4\,,\quad l=2\left(g_5+\frac{1}{3\,.\,4\,.\,5^2}g_2g_3\right)h^{\frac{1}{4}}\,.$$

Ora, siccome dalle rammentate sigizie, sempre nella ipotesi di $f(y_1, y_2) = 0$, si hanno le:

$$4Bh^2 = k\left(p^2 - \frac{1}{3}k^3\right) + \frac{2}{3}Ahk^2 + 2phl$$

$$12Ch^3 = \left(p^2 - \frac{1}{3}k^3\right)^2 + \frac{1}{2}Ahk\left(p^2 - \frac{1}{3}k^3\right) + \frac{3}{4}kh^2l^2$$

$$Dh^5 = \left[\frac{1}{4}h^2l^2 + \frac{1}{6}Ah\left(p^2 - \frac{1}{3}k^3\right) + \frac{2}{3}Bh^2k\right]^2 -$$

$$- h^2 m\left[\frac{1}{3}Bh^2p - hl\left(p^2 - \frac{1}{3}k^3\right) - \frac{1}{2}Akh^2l\right]$$

essendo:

$$h^2m = p\left(p^2 - \frac{1}{3}k^3\right) + \frac{2}{3}hk(Ap + kl)$$

si giunge al seguente teorema: *I quattro invarianti* A, B, C, D *della forma binaria del sesto ordine* $f(y_1, y_2)$ *sono funzioni intiere e razionali dei quattro coefficienti* g_2, g_3, g_4, g_5.

« 3°. Indicando con ϱ un fattore di proporzionalità, e posto:

$$\varrho x_1 = y_1 z_1 - \varphi_2 z_2, \quad \varrho x_2 = y_2 z_1 + \varphi_1 z_2 \tag{4}$$

si avrà per la (2) che:

$$\varrho^n f(x_1, x_2) = (A_o, A_1, \ldots A_n)(z_1, z_2)^n \tag{5}$$

e siccome per la stessa definizione di invariante, indicando con ψ un invariante di grado m della forma $f(x_1, x_2)$, si ha:

$$\varphi^{\frac{nm}{2}}\psi = \Psi$$

essendo Ψ lo stesso invariante formato colle $A_o, A_1 \ldots$, vedesi tosto come il teorema precedente debba estendersi a forme d'ordine superiore.

« Supponendo come sopra $n = 6$, $\varphi = h$, $z_1 = \frac{t}{2h^{\frac{3}{4}}} z_1$, il modulo della trasformazione diventa $th^{\frac{1}{4}}$, e quindi:

$$\left(\frac{t^3h^{\frac{3}{4}}}{8}\right)^m \psi = \Psi.$$

« Ma per $m = 2, 4, 6, 10$, si deducono da quest'ultima:

$$-\left(\frac{t^4}{4^2h^{\frac{3}{4}}}\right)^2\psi = \Psi, \quad \left(\frac{t^4}{4^2h^{\frac{3}{4}}}\right)^4\psi = \Psi, \quad \ldots\ldots$$

per ciò indicando con $F(z_1, z_2)$ il polinomio:

$$F(z_1, z_2) = z_2 (6z_1^5 - g_2 z_1^3 z_2^2 - g_3 z_1^2 z_2^3 - g_4 z_1 z_2^4 - g_5 z_2^5) \tag{6}$$

si avrà che gli invarianti della forma $f(x_1, x_2)$ saranno eguali agli invarianti della forma $F(z_1, z_2)$, col segno cambiato nei casi di $m = 2, 6, 10$. Si ottengono in tal modo le:

$$A = \frac{1}{5 \,.\, 8} g_2^2 - g_4, \quad B = \frac{1}{3 \,.\, 4^2 \,.\, 5^4} g_2^4 - \frac{1}{6 \,.\, 5^2} g_2^2 g_4 + \frac{1}{6 \,.\, 5^3} g_2 g_3^2 + \frac{1}{5} g_3 g_5$$

e così via; come dalle sigizie sopra indicate.

« Dalle relazioni (4) si deduce la:

$$\varrho^2 (x_2 dx_1 - x_1 dx_2) = \varphi (z_2 dz_1 - z_1 dz_2) .$$

« Pel caso di n $= 4$, posto, come sopra, $\varphi = h$ e $\dfrac{t}{2h} z_1$ in luogo di z_1, si ha:

$$\frac{x_2 dx_1 - x_1 dx_2}{\sqrt{(f x_1, x_2)}} = \frac{z_2 dz_1 - z_1 dz_2}{\sqrt{F(z_1, z_2)}}$$

essendo $F(z_1, z_2) = z_2 (4z_1^3 - g_2 z_1 z_2^2 - g_3 z_2^3)$; cioè la nota trasformazione dell'integrale elittico.

« Pel caso di $n = 6$, posto $\varphi = h$, $\dfrac{t}{2h^{\frac{3}{4}}} z_1$ in luogo di z_1, si giunge alla:

$$\frac{x_1 (x_2 dx_1 - x_1 dx_2)}{\sqrt{f(x_1, x_2)}} = (\alpha z_1 + \beta z_2) \frac{z_2 dz_1 - z_1 dz_2}{\sqrt{F(z_1, z_2)}}$$

$$\frac{x_2 (x_2 dx_1 - x_1 dx_2)}{\sqrt{f(x_1, x_2)}} = (\gamma z_1 + \delta z_2) \frac{z_2 dz_1 - z_1 dz_2}{\sqrt{F(z_1, z_2)}}$$

nelle quali $F(z_1, z_2)$ ha il valore (6) ed

$$\alpha = \frac{y_1}{h^{\frac{1}{8}}}, \quad \gamma = \frac{y_2}{h^{\frac{1}{8}}}, \quad \beta = -2 \frac{h^{\frac{5}{8}}}{t} h_2, \quad \delta = 2 \frac{h^{\frac{5}{8}}}{t} h_1$$

« 4°. Supponiamo ora che $f(y_1, y_2)$ non sia eguale a zero. Dalla equazione (5), rammentando la proprietà dei covarianti $A_2, A_3 \ldots$ (equaz. 2 . S. 1°), si deduce la:

$$\varrho^n f^{n-1} f(x_1, x_2) = \varphi^n (\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n)(X, 1)^n$$

posto:

$$X = \frac{f z_1 + A_1 z_2}{\varphi}$$

ed f in luogo di $f(y_1, y_2)$.

« Suppongo che le z_1, z_2, φ abbiano i seguenti valori:

$$z_1 = \frac{1}{2} f^{\frac{1}{2}} z\,, \quad z_2 = x\,, \quad \varphi = fy + h \text{ e quindi } A_1 = -\frac{1}{2} t$$

sarà:

$$X = \frac{1}{2} \frac{f^{\frac{3}{2}} z - t}{fy + h}\,.$$

« Sia $n = 4$, si avrà dalla superiore:

$$\varrho^4 f^3 f(x_1\,, x_2) = (fy + h)^4 (X^4 + 6h X^2 + 4tX + g_2 f^2 - 3\, h^2)\,.$$

« Pongasi infine:

$$y = \wp(u)\,, \quad z = \wp'(u)\,, \quad \frac{h}{f} = -\wp(v)$$

sarà, come è noto:

$$\frac{t}{f^{\frac{3}{2}}} = \wp'(v)$$

e quindi:

$$X = \frac{1}{2} f^{\frac{1}{2}} \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}$$

« Ma (¹)

$$g_2 = 12\wp^2(v) - 2\wp''(v)$$

$$\wp''(v) = \wp(v) \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} + 2 \big(\wp(u) - \wp(v)\big) \big[\wp(u+v) - \wp(v)\big]$$

$$\frac{1}{4} \left[\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\gamma(u) - \gamma(v)}\right]^2 = \wp(u+v) + \wp(u) + \wp(v)$$

e per queste note relazioni si giungerà alla:

$$\varrho^2 \sqrt{f(x_1\,, x_2)} = f^{\frac{3}{2}} \big[\wp(u) - \wp(v)\big]^2 \big[\wp(u) - \wp(u+v)\big]$$

la quale equivale alla seguente (²):

$$\varrho^2 \sqrt{f(x_1\,, x_2)} = \frac{1}{2} \Big[t\wp'(u) + f^{\frac{1}{2}} h\, \wp''(u) + f^{\frac{3}{2}} \big(\wp(u)\, \wp''(u) - \wp'^2(u)\big) \Big]\,.$$

« Notisi che essendo nel caso generale:

$$\varrho x_1 = \frac{1}{2} f^{\frac{1}{2}} z\,.\, y_1 - (f_2 y + h_2)\,, \qquad \varrho\, x_2 = \frac{1}{2} f^{\frac{1}{2}} z\,.\, y_2 + (f_1 y + h_1)$$

(¹) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*. Première partie, pag. 120.

(²) Klein, *Ueber hyperellitische Sigmafunctionen*, Math.e Annalen, Bd. XXVII, pag. 458, trovasi questa stessa formola ma l'ultimo termine del secondo membro non è esatto.

si ha supponendo z funzione di y:

$$\varrho^2\left(x_2\frac{dx_1}{dy}-x_1\frac{dx_2}{dy}\right)=(fy+h)\left[\frac{1}{2}f^{\frac{1}{2}}\frac{dz}{dy}-X\right]$$

dalla quale, pel valore di X, ottiensi la:

$$\varrho^2(x_2\,dx_1-x_1\,dx_2)=\frac{(fy+h)^2}{f}\,dX\,.$$

« Se $n=4$ si ha per una nota formola:

$$\frac{dX}{du}=f^{\frac{1}{2}}\left[\wp(u)-\wp(u+v)\right]$$

e per essa siamo ricondotti alla:

$$\frac{x_2dx_1-x_1dx_2}{\sqrt{f(x_1,x_2)}}=du\,.$$

Astronomia. — *Sulla distribuzione in latitudine dei fenomeni solari osservati al R. Osservatorio del Collegio romano nel 1° trimestre del 1895.* Nota del Socio P. Tacchini.

« Come fu dichiarato nella mia precedente Nota il numero dei giorni di osservazione fu per le protuberanze di 40 e di 57 per le facole e macchie. Ecco i risultati ottenuti per la frequenza nelle diverse zone in ciascun emisfero del sole:

1° trimestre 1895.

Latitudine	Protuberanze		Facole		Macchie	
90° + 80°	0,000					
80 + 70	0,000					
70 + 60	0,005					
60 + 50	0,009					
50 + 40	0,009	0,505	0,000			
40 + 30	0,054		0,006			
30 + 20	0,116		0,055	0,423	0,056	
20 + 10	0,138		0,178		0,296	0,465
10 . 0	0,174		0,184		0,113	
0 — 10	0,089		0,184		0,183	
10 — 20	0,125		0,221		0,253	0,535
20 — 30	0,111		0,123	0,577	0,099	
30 — 40	0,049		0,043			
40 — 50	0,094	0,495	0,006			
50 — 60	0,022					
60 — 70	0,000					
70 — 80	0,005					
80 — 90	0,000					