ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IV.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

« Dagli elementi suddetti si vede che l'orbita è iperbolica, caso alquanto raro e perciò maggior importanza ha la ricerca.

« Considerando l'orbita iperbolica quasi parabolica, il Mattina fece la rappresentazione dei luoghi normali, questi non vennero che poco ben rappresentati. Per allontanare qualunque dubbio di errore di calcolo, il Mattina rinnovò i calcoli indipendentemente da cima a fondo più volte, ma sempre ricadde negli stessi risultati. Ciò che diede però più da pensare fu il valore negativo $[ff5]$ che teoricamente è essenzialmente positivo.

Rappresentazione dei luoghi normali.

	Nov. 19.5	Dic. 3.5	Dic. 12.5	Dic. 31,5
A_α	$+2.'29'',7$	$+2.'12,''1$	$+1.'34,''8$	$+24.''4$
A_δ	$-1.\ 5,\ 8$	$-\ 27,\ 8$	$-\ 10,\ 3$	$+\ 9,\ 2$

Soluzione diretta $[ff5] = -0{,}0130$
Soluzione inversa $[ff5] = -0{,}0006$.

« Il caso potrebbe tuttavia spiegarsi così (come opina anche il Mattina): $[ff5]$ è positivo, ma nella pratica, per un cumulo di piccole differenze nelle ultime cifre decimali e combinazioni di speciali elementi, può risultare come quì risultò, infatti, negativo.

« Quanto alla non buona rappresentazione dei luoghi normali, può attribuirsi ad una fortuita combinazione dei coefficienti delle equazioni la cui risoluzione diede origine a coefficienti ausiliari molto piccoli; una prova che così sia, sta nel fatto che i due sistemi di valori ottenuti, risolvendo le equazioni normali differiscono non poco, e ciò è naturalmente da attribuirsi alla piccolezza dei detti coefficienti ausiliari ».

Matematica. — *Sulle superficie che, da un doppio sistema di traiettorie isogonali sotto un angolo costante delle linee di curvatura, sono divise in parallelogrammi infinitesimi equivalenti.* Nota del prof. Cesare Fibbi, presentata dal Socio Dini.

« Di queste superficie hanno trattato, primieramente il prof. Bianchi in una sua Memoria inserita negli Annali di Matematica (1) e posteriormente il Guichard (2) e lo stesso prof. Bianchi (3), per avere occasione di considerare

(1) *Sopra una nuova classe di superficie* ecc. (1890).
(2) Comptes rendus de l'Académie des Sciences (1893, pag. 483).
(3) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (agosto 1894).

quella classe delle superficie in discorso, per le quali le distanze dei piani principali da un punto fisso o sono eguali o hanno tra loro un rapporto costante, e in ciascuno dei ricordati lavori è posta in evidenza l'intima relazione che lega la teoria di queste superficie a quella delle congruenze pseudosferiche, o, che è lo stesso, della trasformazione di Bäcklund per le superficie a curvatura costante negativa.

« Scopo di questa Nota è d'insistere su questa relazione, e più specialmente su quella che lega le superficie in considerazione con quelle che son conosciute sotto il nome di superficie di Voss e che sono pure strettamente collegate colle superficie pseudosferiche.

« 1. Sia Φ una superficie riferita alle sue linee di curvatura (u, v) e sia

$$ds'^2 = e\,du^2 + g\,dv^2$$

l'elemento lineare della sua rappresentazione sferica. Se definiamo la superficie mediante le sue coordinate tangenziali X, Y, Z, W, e indichiamo con r_1, r_2 i suoi raggi principali di curvatura, avremo per le note formole di Weingarten:

$$(1)\qquad \begin{cases} e r_2 = \dfrac{\partial^2 W}{\partial u^2} - \dfrac{\partial \log \sqrt{e}}{\partial u}\dfrac{\partial W}{\partial u} + \dfrac{e}{g}\dfrac{\partial \log \sqrt{e}}{\partial v}\dfrac{\partial W}{\partial v} + eW, \\[2mm] 0 = \dfrac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial v} - \dfrac{\partial \log \sqrt{e}}{\partial v}\dfrac{\partial W}{\partial u} - \dfrac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u}\dfrac{\partial W}{\partial v}, \\[2mm] g r_1 = \dfrac{\partial^2 W}{\partial v^2} + \dfrac{g}{e}\dfrac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u}\dfrac{\partial W}{\partial u} - \dfrac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial v}\dfrac{\partial W}{\partial v} + gW. \end{cases}$$

Indicando poi con X_1, Y_1, Z_1, W_1; X_2, Y_2, Z_2, W_2 le coordinate dei piani normali π_1, π_2 tangenti alle linee inclinate dell'angolo $\dfrac{\alpha}{2}$ sulle linee di curvatura $v = \text{cost.}$, avremo:

$$(2)\qquad \begin{cases} X_1 = \cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{e}}\dfrac{\partial X}{\partial u} - \operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial X}{\partial v}, \\[2mm] X_2 = \cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{e}}\dfrac{\partial X}{\partial u} + \operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial X}{\partial v}, \end{cases}$$

con le analoghe per Y_1, Z_1, Y_2, Z_2, e quindi:

$$(3)\qquad \begin{cases} W_1 = \Sigma x\, X_1 = \cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{e}}\dfrac{\partial W}{\partial u} - \operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial W}{\partial v}, \\[2mm] W_2 = \Sigma x\, X_2 = \cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{e}}\dfrac{\partial W}{\partial u} + \operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial W}{\partial v}. \end{cases}$$

Si avrà poi per derivazione delle (2):

$$\frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial X}{\partial u} + \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial X}{\partial v}\right) - \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{e}\,X\,,$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial X}{\partial u} + \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial X}{\partial v}\right) + \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{g}\,X\,,$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial X}{\partial u} - \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial X}{\partial v}\right) - \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{e}\,X\,,$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial X}{\partial u} - \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial X}{\partial v}\right) - \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{g}\,X\,;$$

e per derivazione delle (3), in forza delle (1) e delle stesse (3):

$$\frac{\partial W_1}{\partial u} = \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{e}\,(r_2 - W) - \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}(W_1 - W_2\cos\alpha)\,,$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial v} = -\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{g}\,(r_1 - W) + \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}(W_1 - W_2\cos\alpha)\,;$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial u} = \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{e}\,(r_2 - W) - \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}(W_1\cos\alpha - W_2)\,,$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial v} = \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{g}\,(r_1 - W) + \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}(W_1\cos\alpha - W_2)\,.$$

Se da queste si eliminano $r_1 - W$ e $r_2 - W$, si ottengono le altre:

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial W_2}{\partial u} - \frac{\partial W_1}{\partial u} &= \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}(W_2 + W_1)\,, \\ \frac{\partial W_2}{\partial v} + \frac{\partial W_1}{\partial v} &= \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}(W_2 - W_1)\,; \end{aligned}\right.$$

che legano fra loro le distanze dall'origine dei piani tangenti alle due superficie Σ_1, Σ_2 inviluppate dai piani π_1, π_2. Notiamo infine che per i coefficienti degli elementi lineari sferici di queste superficie, avremo rispettivamente:

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\right)^2 + \cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot e\,,\quad g_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\right)^2 + \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\cdot g\,,$$

$$f_1 = -\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u} - \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{eg}\,;$$

$$e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\right)^2 + \cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot e\,,\quad g_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\right)^2 + \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\cdot g\,,$$

$$f_2 = -\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u} + \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{eg}\,.$$

« 2. Ciò posto, se ricorriamo ai lavori citati del prof. Bianchi, vediamo che la condizione necessaria e sufficiente affinchè la superficie Φ sia tagliata dalle traiettorie sotto l'angolo $\frac{\alpha}{2}$ delle linee di curvatura $v = \text{cost}$ in parallelogrammi infinitesimi equivalenti, è data dalla relazione:

$$(5) \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\right) = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\right),$$

alla quale si soddisfa, ponendo

$$\sqrt{e}\cos\frac{\alpha}{2} = \operatorname{sen}(\omega_2 + \omega_1) \quad , \quad \sqrt{g}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{sen}(\omega_2 - \omega_1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v} = \cos(\omega_2 + \omega_1) \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u} = \cos(\omega_2 - \omega_1);$$

dove ω_1, ω_2 sono due angoli legati dalle relazioni:

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(\omega_2 - \omega_1)}{\partial u} = \dfrac{1 + \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\operatorname{sen}(\omega_2 + \omega_1), \\[2ex] \dfrac{\partial(\omega_2 + \omega_1)}{\partial v} = \dfrac{1 - \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\operatorname{sen}(\omega_2 - \omega_1), \end{cases}$$

avendo posto $\sigma = \alpha - \frac{\pi}{2}$, ed essendo essi angoli soluzioni della stessa equazione

$$(7) \qquad \frac{\partial^2 2\omega}{\partial u\,\partial v} = \operatorname{sen} 2\omega\,.$$

« Sono questi i risultati che dànno ragione del nesso che si è asserito esistere fra la teoria delle congruenze pseudosferiche e quella delle superficie Φ, giacchè è noto che se x_1, y_1, z_1 sono le coordinate di una superficie pseudosferica S_1 riferita alle sue linee assintotiche (u, v) inclinate fra loro di un angolo $2\omega_1$, soluzione della (7), se si costruisce la congruenza determinata dalle formole

$$(8) \qquad x_2 = x_1 + \cos\sigma\,(\operatorname{sen}\omega_2\,X' + \cos\omega_2\,X''),$$

dove $X', X'', \ldots$ sono i coseni di direzione delle linee di curvatura della S_1, e ω_2 è legato a ω_1 dalle (6), le x_2, y_2, z_2 saranno le coordinate della seconda falda S_2 della superficie focale, riferita essa pure alle sue linee assintotiche, il cui angolo d'inclinazione sarà $2\omega_2$. E siccome i coefficienti della rappresentazione sferica della congruenza così definita soddisfano la (5), si ha che le linee richieste sulla superficie Φ e sulla sfera rappresentativa sono quelle che corrispondono alle linee assintotiche della superficie focale di una qualunque congruenza pseudosferica.

« A questo risultato ottenuto dal prof. Bianchi possiamo aggiungere che avendosi ora

$$e_1 = 1 \quad , \quad f_1 = -\cos 2\omega_1 \quad , \quad g_1 = 1 \, ,$$
$$e_2 = 1 \quad , \quad f_2 = -\cos 2\omega_2 \quad , \quad g_2 = 1 \, ;$$

le linee (u, v) sulle superficie Σ_1, Σ_2 sono rispettivamente le immagini delle assintotiche delle superficie pseudosferiche S_1, S_2. Di più, se dalle (4), che ora si scrivono:

$$(4^*) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial(W_2 - W_1)}{\partial u} = \dfrac{1 + \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}(W_2 + W_1)\cos(\omega_2 + \omega_1) \, , \\[2ex] \dfrac{\partial(W_2 + W_1)}{\partial v} = \dfrac{1 - \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}(W_2 - W_1)\cos(\omega_2 - \omega_1) \, , \end{cases}$$

si eliminano successivamente W_1, W_2, tenendo conto delle (6), si trova:

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 W_1}{\partial u \, \partial v} = W_1 \cos 2\omega_1 \quad , \quad \frac{\partial^2 W_2}{\partial u \, \partial v} = W_2 \cos 2\omega_2 \, ;$$

e queste esprimono che le linee (u, v) sulle superficie Σ_1, Σ_2 sono geodetiche e coniugate e perciò le Σ_1, Σ_2 appartengono a quella classe di superficie che son conosciute sotto il nome di superficie di Voss [1]. Si ha dunque il teorema:

Se sopra una superficie Φ le traiettorie isogonali sotto l'angolo costante $\frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{2}$ di un sistema di linee di curvatura la dividono in parallelogrammi infinitesimi equivalenti, i piani normali tangenti alle dette linee inviluppano due superficie di Voss Σ_1, Σ_2 associate, secondo il senso stabilito dal prof. Bianchi [2], alle due falde di una congruenza pseudosferica, e saranno legate fra di loro dalle relazioni (4*).

« 3. Alla dimostrazione del teorema reciproco faremo precedere l'osservazione seguente. Siano Σ_1, Σ_2 due superficie definite dalle loro coordinate tangenziali

$$X_1 \, , \; Y_1 \, , \; Z_1 \, , \; W_1 \, ;$$
$$X_2 \, , \; Y_2 \, , \; Z_2 \, , \; W_2 \, ,$$

che supporremo funzioni delle stesse variabili u, v per le due superficie. I piani tangenti

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} X_1 x + Y_1 y + Z_1 z = W_1 \, , \\ X_2 x + Y_2 y + Z_2 z = W_2 \end{cases}$$

(1) Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu München, 1888.

(2) *Sulle deformazioni infinitesime delle superficie flessibili ed inestendibili.* Rend. della R. Accademia dei Lincei (luglio 1892).

in due punti corrispondenti s'intersecheranno secondo i raggi di una congruenza, e se si pone:

$$a = Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1 \quad , \quad b = Z_1 X_2 - Z_2 X_1 \quad , \quad c = X_1 Y_2 - X_2 Y_1 \, ,$$
$$a' = W_2 X_1 - W_1 X_2 \quad , \quad b' = W_2 Y_1 - W_1 Y_2 \quad , \quad c' = W_2 Z_1 - W_1 Z_2 \, ,$$

le equazioni di un raggio della congruenza potranno scriversi

$$bz - cy + a' = 0 \quad , \quad cx - az + b' = 0 \quad , \quad ay - bx + c' = 0 \, ,$$

e la condizione necessaria e sufficiente affinchè la congruenza sia normale è che l'espressione

$$(a^2 + b^2 + c^2)^{-\frac{2}{3}} \begin{vmatrix} da \, , & db \, , & dc \\ a \, , & b \, , & c \\ a' \, , & b' \, , & c' \end{vmatrix}$$

sia un differenziale esatto (¹).

« Introducendo i coseni di direzione X, Y, Z dei raggi della congruenza e l'angolo Ω dei piani (α), l'espressione precedente prende la forma:

$$(\beta) \qquad \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \Omega} \left\{ (W_2 \cos \Omega - W_1) \, \Sigma X \, dX_1 + (W_1 \cos \Omega - W_2) \, \Sigma X \, dX_2 \right\} .$$

Ciò posto, si abbia una congruenza pseudosferica, e le Σ_1, Σ_2 siano due superficie corrispondenti rispettivamente per parallelismo delle normali alle falde S_1, S_2 della sua superficie focale. Completando le formole della trasformazione di Bäcklund, aggiungendo alle (6), (7), (8) del numero precedente le altre

$$\frac{\partial X_1}{\partial u} = \cos \omega_1 X' + \operatorname{sen} \omega_1 X'' \quad , \quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = - \cos \omega_1 X' + \operatorname{sen} \omega_1 X'' \, ,$$
$$\frac{\partial X'}{\partial u} = \frac{\partial \omega_1}{\partial u} X'' - \cos \omega_1 X_1 \quad , \quad \frac{\partial X'}{\partial v} = - \frac{\partial \omega_1}{\partial v} X'' + \cos \omega_1 X_1 \, ,$$
$$\frac{\partial X''}{\partial u} = - \frac{\partial \omega_1}{\partial u} X' - \operatorname{sen} \omega_1 X_1 \quad , \quad \frac{\partial X''}{\partial v} = \frac{\partial \omega_1}{\partial v} X' - \operatorname{sen} \omega_1 X_1 \, ,$$
$$X_2 = - \cos \sigma \cos \omega_2 X' + \cos \sigma \operatorname{sen} \omega_2 X'' - \operatorname{sen} \sigma X_1 \, ,$$

colle analoghe per Y_1, Z_1; Y_2, Z_2; Y', Z'; Y'', Z'', si avrà

$$X = \operatorname{sen} \omega_2 X' + \cos \omega_2 X'' \, ,$$

colle analoghe per Y, Z e $\Omega = \frac{\pi}{2} + \sigma$.

« Con queste formole è facile verificare che si ha:

$$\Sigma X \frac{\partial X_1}{\partial u} = \quad \Sigma X \frac{\partial X_2}{\partial u} = \quad \operatorname{sen} (\omega_2 + \omega_1) \, ,$$
$$\Sigma X \frac{\partial X_1}{\partial v} = - \Sigma X \frac{\partial X_2}{\partial v} = - \operatorname{sen} (\omega_2 - \omega_1) \, ,$$

(¹) Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, deuxième partie, pag. 277.

e conseguentemente la (β) diventa, a meno del segno:

$$\frac{1}{1-\operatorname{sen}\sigma}(W_2+W_1)\operatorname{sen}(\omega_2+\omega_1)\,du+\frac{1}{1+\operatorname{sen}\sigma}(W_2-W_1)\operatorname{sen}(\omega_2-\omega_1)dv,$$

e sarà un differenziale esatto se fra le W_1, W_2 sussisteranno le relazioni (4*). Ponendo allora

$$W=\int\frac{1}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}(W_2+W_1)\operatorname{sen}(\omega_2+\omega_1)\,du+\frac{1}{2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}(W_2-W_1)\operatorname{sen}(\omega_2-\omega_1)dv,$$

dove si è tornati a porre $\alpha=\frac{\pi}{2}+\sigma$, le coordinate tangenziali X , Y , Z , W definiranno una superficie per la quale si avrà:

$$e=\frac{\operatorname{sen}^2(\omega_2+\omega_1)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\quad,\quad f=0\quad,\quad g=\frac{\operatorname{sen}^2(\omega_2-\omega_1)}{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial\log\sqrt{e}}{\partial v}\frac{\partial W}{\partial u}+\frac{\partial\log\sqrt{g}}{\partial u}\frac{\partial W}{\partial v},$$

ed essendo soddisfatta la (5), sarà una superficie Φ, sulla quale le u, v saranno le linee di curvatura.

« Si ha dunque il teorema:

Se Σ_1, Σ_2 sono due superficie di Voss, associate rispettivamente alle due falde S_1, S_2 di una congruenza pseudosferica, e legate dalle relazioni (4*), i loro piani tangenti nei punti corrispondenti s'intersecano secondo i raggi di una congruenza normale ad una superficie Φ, sulla quale le linee tangenti a detti piani sono inclinate di uno stesso angolo costante sulle linee di curvatura e la dividono in parallelogrammi infinitesimi equivalenti.

« Osserviamo infine che le (9) ci forniscono per le (4*) i due sistemi di soluzioni particolari

$$W_1=\frac{\partial\omega_1}{\partial u}\quad,\quad W_2=\frac{\partial\omega_2}{\partial u},$$

$$W_1=\frac{\partial\omega_1}{\partial v},\quad W_2=\frac{\partial\omega_2}{\partial v},$$

e che per $W_1=0$ si ritrovano le superficie Φ studiate dal prof. Bianchi nella Nota citata in principio ».