

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IV.

1° SEMESTRE



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta dell' 8 giugno 1895.

F. BRIOSCHI Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sui complessi generati da due piani in corrispondenza birazionale reciproca.* Nota di P. VISALLI, presentata dal Socio CREMONA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulle aree d'isteresi elastica* (1). Nota del dottore M. CANTONE, presentata dal Socio BLASERNA.

« Assodata per alcune mie precedenti ricerche la esistenza dei fenomeni d'isteresi nei cicli di deformazione, importava di esaminare (analogamente a quanto si è praticato dallo Steinmetz nel caso del magnetismo), come varia il lavoro consumato nel corpo in un *ciclo bilaterale* tra le forze estreme P_1 e $-P_1$ al variare di questi limiti, e poichè lo studio da me fatto *sulla flessione dell'ottone* (2) e *sull'attrito interno dei metalli* (3) forniva un materiale sufficientemente esteso per tale indagine, ho voluto profittarne per i calcoli di cui qui espongo i risultati.

« Ho già mostrato nel lavoro sulla flessione che in un ciclo bilaterale la curva rappresentante la legge di deformazione delle lastre è sensibilmente simmetrica rispetto al punto medio del tratto dell'asse delle deformazioni

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di fisica della R. Università di Palermo.

(2) V. Rend. Acc. dei Lincei, 1893 e 1894.

(3) V. Nuovo Cimento, marzo e aprile 1895.

compreso fra i punti d'incontro con quella curva. Ciò si verifica ancora meglio nei diagrammi relativi alla torsione ed in ispecie ad *accomodazione* innoltrata, tuttavia non mancano anche qui lievi imperfezioni di simmetria, le quali più che alla disposizione sperimentale parmi sieno da attribuire al comportamento stesso del corpo per i fenomeni d'isteresi (1). A parte però queste anomalie di ordine secondario, resta come carattere essenziale di aversi nel passaggio da $-P_1$ a P_1 una legge di deformazione presso a poco uguale a quella inerente al passaggio da P_1 a $-P_1$, e rappresentata nei due casi da archi la cui convessità è rivolta all'esterno della curva e le cui ordinate, per uno stesso valore della forza, presentano la massima differenza all'incirca per $P = 0$.

« Or se la legge di Hooke fosse seguita esattamente, noi avremmo per una variazione armonica della forza una variazione parimenti armonica della deformazione, od in altri termini, se ci riferiamo per fissare le idee alla torsione, dato per il momento torcente M :

$$(1) \quad M = M_1 \cos \alpha$$

si avrebbe per l'angolo ω relativo ad M :

$$\omega = \omega_1 \cos \alpha,$$

dove ω_1 è l'angolo dovuto al momento estremo M_1 , ed α serve a denotare una variabile che lungo il ciclo assume valori da *zero* a 2π .

« Ma, tenendo conto delle precedenti considerazioni, i corpi nel deformarsi invece che rispondere ad una legge così semplice, presentano da essa deviazioni stando alle quali converrà tentare di assumere simultaneamente alla (1)

$$\omega = k \cos \alpha + k' \sin \alpha,$$

o ciò che è lo stesso

$$(2) \quad \omega = A \cos (\alpha - \lambda).$$

« Senza insistere per ora sull'ammissibilità delle (1) e (2) che porterebbe a supporre una differenza di fase fra le variazioni di M e di ω (2), vogliamo, mantenendoci nel campo delle relazioni puramente empiriche, andar oltre esprimendo la ω per mezzo della serie di Fourier:

$$(3) \quad \omega = \sum_{m=1}^{m=\infty} A_m \cos m (\alpha - \lambda)$$

« Per lo scopo prefissoci, occorrendo avere il valore dell'area racchiusa

(1) Poichè, infatti, operando fra limiti ristretti di deformazione quella dissimetria tende a sparire, è poco probabile, specialmente nel caso della torsione, che le anomalie di cui sopra è fatto cenno, sieno dovute ai mezzi sperimentali impiegati.

(2) Mi riservo di tornare su questo argomento in una prossima Nota.

nella curva d'isteresi, si tratta di trovare la espressione di $\int M d\omega$ esteso a tutto il ciclo, ovvero tenendo conto delle (1) e (3) di

$$-M_1 \sum_{m=1}^{m=\infty} m A_m \int \sin m(\alpha - \lambda) \cos \alpha d\alpha$$

esteso a due valori di α che differiscano di ω , e stante la natura dei limiti d'integrazione si avrà per l'area cercata L'' :

$$L'' = M_1 A_1 \sin \lambda \int \cos^2 \alpha d\alpha = \pi M_1 A_1 \sin \lambda.$$

« Questa soluzione generale si semplifica ancora quando si ponga per ω il valore dato dalla (2), poichè per la (1), se denotiamo con ω_0 la torsione permanente, si ha in questo caso:

$$\omega_0 = A \sin \lambda,$$

e di conseguenza:

$$(4) \quad L'' = \pi M_1 \omega_0;$$

ed una relazione analoga vale per la flessione, quando si sostituiscano ad M_1 ed ω_0 rispettivamente la forza flettente massima del ciclo e la saetta di deformazione permanente.

« In base alla (4) e servendomi dei dati sperimentali che mi avevano fornito le precedenti ricerche furono da me calcolate tanto per la flessione che per la torsione le L'' che trovansi nelle seguenti tabelle. In ciascuna di esse la prima colonna contiene le date, e la seconda le indicazioni relative ai valori delle successive colonne nelle righe corrispondenti, convenendo di denotare con P_1 la forza massima impiegata in ciascun ciclo ed espressa in grammi, con L il valore dell'area d'isteresi dedotta dall'esperienza, e con L'' il valore calcolato per mezzo della (4). Le L ed L'' sono date in misura assoluta, eccezion fatta per la prima tabella, nella quale i valori di L ed L'' che si riportano vanno moltiplicati per 1000.

« Ho creduto opportuno registrare altresì nelle tabelle che si riferiscono alla torsione le L' che si ebbero col metodo dinamico, cioè i valori delle diminuzioni di energia potenziale corrispondenti alle diminuzioni di ampiezza all'intorno delle ω_1 relative ai singoli cicli, perchè dovremo tenerli presenti nella discussione dei risultati (1).

(1) Per la ristrettezza dello spazio concesso ad una Nota, ho dovuto limitarmi a riportare solo una parte dei risultati ottenuti, ma ho procurato che nulla fosse omissso di ciò che riguarda i particolari salienti da me rilevati.

I.

Flessione dell'ottone

Lastre	Data	P ₁	582	776	970	1164	1358	1552	1649	1746	1843	1940
O ₁	28 nov.	L				65	92	205		513	880	1496
		L''				41	67	191		521	897	1553
"	30 "	L				51	94	211		519	879	1444
		L''				29	84	191		521	902	1487
"	2 dic.	L				44	79	194		501	818	1363
		L''				30	67	172		505	843	1495
"	3 "	L				45	82	200		497	812	1303
		L''				36	67	179		492	848	1371
"	3 "	L				43	85	200		495	829	1270
		L''				30	63	191		500	823	1338
O ₄	8 marzo	L	16	28	57	160	542					
		L''	15	36	69	186	615					
"	10 "	L	17	31	57	164	544					
		L''	19	36	69	186	615					
"	13 "	L		37	59	165	542	1706				
		L''		37	72	193	615	1911				
"	16 "	L		28	57	156	533	1738				
		L''		36	75	179	596	1945				
"	21 "	L	19	38	75	166	534	1688	2819			
		L''	21	45	81	193	610	1892	3163			
O ₄	30 "	L		6.7		23		131		352		
		L''		6.0		23		141		349		
"	6 apr.	L		4.7		20		124		324		798
		L''		4.8		18		122		349		866
O ₇	17 "	L		22	62	225	676					
		L''		22	63	246	742					

II. *Torsione dell'ottone* Ot₁

Data	P ₁	50	75	100	125
11 lugl.	L	42	192	952	5234
	L'	50	337	1316	4921
	L''	39	184	906	5296
17 "	L	30	117	481	1924
	L'	14	111	534	2404
	L''	28	101	408	1987
18 "	L	52	175	505	2070
	L'	16	126	607	2352
	L''	39	112	473	2106
22 "	L	41	137	394	1412
	L'	7	56	354	1697
	L''	42	70	332	1400

IV. *Torsione del ferro* Fe₁

Data	P ₁	100	150	200	250	300
8 ag.	L	29	104	185	304	432
	L'	30	77	134	205	335
	L''	17	77	152	214	287
9 "	L	42	106	205	327	458
	L'	30	76	135	200	360
	L''	32	72	137	214	309
10 "	L	33	96	171	283	415
	L'	30	77	138	194	273
	L''	25	68	130	205	276
	P ₁	200	300	400	500	600
13 "	L	147	371	752	1268	1873
	L'	137	283	436	634	—
	L''	128	324	513	937	1294
14 "	L	150	373	708	1134	1647
	L'	137	270	422	628	—
	L''	144	324	524	873	1155

III. *Torsione dell'ottone* Ot₂

Data	P ₁	100	150	200	250	300
27 lugl.	L	40	171	658	2771	
	L'	14	110	553	2620	
	L''	23	121	585	2843	
28 "	L	41	136	507	2080	
	L'	13	69	374	2045	
	L''	35	93	428	2091	
30 "	L	44	313	1223	3915	
	L'	33	330	1452	4569	
	L''	54	321	1269	4295	
1 ag.	L	41	141	581	2560	12760
	L'	13	79	668	3010	11270
	L''	29	105	531	2621	13420
4 "	L	53	180	582	2419	9131
	L'	7	77	474	2549	9169
	L''	29	87	453	2353	9640

V. *Torsione del ferro* Fe₂

Data	P ₁	100	150	200	250	300
20 ag.	L	56	195	392	722	1162
	L'	28	75	152	273	—
	L''	44	108	232	412	818
22 "	L	60	172	430	790	1207
	L'	28	70	147	257	—
	L''	41	108	216	412	733
	P ₁	200	300	400	500	
24 "	L	392	1461	4024	11290	
	L'	198	742	2746	9319	
	L''	304	1166	3582	10710	
25 "	L	406	1311	3619	9778	
	L'	198	703	2248	8251	
	L''	319	1104	3232	9329	
30 "	L	447	1524	3824	8008	
	L'	211	755	2040	6861	
	L''	371	1251	3232	7708	
	P ₁	100	150	200	250	300
31 "	L	65	220	457	949	1497
	L'	29	89	202	354	836
	L''	57	151	345	682	1189

VI. *Torsione del ferro* Fe₃

Data	P ₁	50	75	100	125	150
14 ott.	L	43	170	873	3347	
	L'	55	213	972	3505	
	L''	43	135	851	3534	
15 "	L	46	119	560	2204	
	L'	52	160	599	2381	
	L''	48	149	541	2404	
16 "	L	47	109	319	1646	
	L'	52	131	394	1750	
	L''	44	119	354	1740	
17 "	L	59	127	255	1242	5009
	L'	55	139	378	1598	5390
	L''	70	144	252	1227	5145
19 "	L	67	162	341	595	2955
	L'	57	133	270	747	3109
	L''	87	151	289	567	2899
22 "	L	83	175	295	458	
	L'	51	117	203	376	
	L''	82	126	295	412	

VII. *Torsione del ferro* Fe₄

Data	P ₁	200	300	400	500	600
23 ott.	L	444	1274			
	L'	139	939			
	L''	404	1074			
24 "	L	398	1260	3377		
	L'	166	602	2736		
	L''	361	1046	2925		
26 "	L	434	1412	3663	12870	
	L'	194	723	2813	14640	
	L''	386	1064	3199	11760	
27 "	L	416	1412	4303	13850	45720
	L'	283	1040	4364	17420	47380
	L''	398	1335	3983	13940	47480
28 "	L	507	1696	5216	15110	40770
	L'	355	1280	4861	17540	42550
	L''	504	1718	5028	15150	42680

VIII. *Torsione del nichel* Ni₉

Data	P ₁	100	150	200	250	300
12 gin.	L	49	184	480	1162	2758
	L'	43	115	298	944	2384
	L''	45	167	424	1073	2692
20 "	L	75	184	372	835	1982
	L'	50	132	292	700	1863
	L''	78	176	346	745	1898
21 "	L	81	238	522	1192	2969
	L'	72	191	447	1242	3278
	L''	78	226	457	1129	2976
23 "	L	83	250	576	1271	3042
	L'	75	208	467	1167	3174
	L''	84	234	485	1129	2851

IX. *Torsione del nichel* Ni₁₀

Data	P ₁	200	250	300	350	400
21 nov.	L	806	2128	5327	14420	27700
	L'	1023	2870	6874	17440	32510
	L''	949	2253	5746	14940	33140
23 "	L	730	1842	4161	10960	24090
	L'	811	2131	5733	12960	24380
	L''	836	1963	4508	11590	26200
24 "	L	734	1712	3926	9738	22770
	L'	796	2057	5381	11960	22500
	L''	842	1815	4246	10790	24720
25 "	L	637	1653	3724		
	L'	710	1891	4665		
	L''	740	1780	4178		

X. *Torsione del nichel* Ni₁₁

Data	P ₁	200	250	300	350	400
27 nov.	L	639	1664	3853	9819	20370
	L'	631	1756	5214	11980	22030
	L''	657	1658	4196	10450	22590
	P ₁	100	150	200	250	300
29 "	L	101	301	682	1507	3434
	L'	67	212	581	1488	3663
	L''	92	259	624	1498	3561

XI. *Torsione del platino Pt₁*

Data	P ₁	100	125	150	175	200
26 sett.	L		296	912		
	L'		58	418		
	L''		170	701		
28 "	L		281	664		
	L'		68	424		
	L''		189	520		
29 "	L	213	510	1136	3924	10940
	L'	132	314	911	3772	9613
	L''	257	465	1132	3738	10980
11 ott.	L	296	688	1493	4410	10560
	L'	219	495	1285	4711	10850
	L''	246	623	1413	4214	10750

XIV. *Torsione del rame Cu₁*

Data	P ₁	50	75	100	125
3 sett.	L	77	320	1220	
	L'	71	344	1180	
	L''	90	307	1325	
6 "	L	71	303	1009	
	L'	71	310	1033	
	L''	72	324	1130	
6 "	L	69	330	1329	4608
	L'	73	378	1526	4254
	L''	72	351	1433	5044
7 "	L	72	360	1262	4494
	L'	77	378	1459	4094
	L''	68	351	1374	4819

XII. *Torsione dell'alluminio Al₁*

Data	P ₁	50	75	100	125
2 nov.	L	257	1073	3079	
	L'	247	986	3081	
	L''	256	1050	3118	
2 "	L	295	901	2955	11310
	L'	225	923	3303	8537
	L''	312	928	3078	11420
5 "	L	151	681	2562	9516
	L'	183	745	3090	8008
	L''	146	705	2576	9783
10 "	L	163	710	2869	9674
	L'	140	803	3436	9026
	L''	178	720	2989	10180

XV. *Torsione del rame Cu₂*

Data	P ₁	50	75	100
11 sett.	L	66	285	1070
	L'	63	292	1091
	L''	64	313	1176
12 "	L	58	262	940
	L'	60	272	947
	L''	54	264	1037

XIII. *Torsione dell'alluminio Al₂*

Data	P ₁	100	150	200	250
12 nov.	L	86	2120		
	L'	36	1310		
	L''	80	2059		
13 "	L	68	583		
	L'	26	458		
	L''	60	591		
14 "	L	77	289	1810	17690
	L'	61	388	2471	11620
	L''	73	268	1812	17040
16 "	L	40	159	808	7353
	L'	16	112	1136	5860
	L''	40	137	772	7324

XVI. *Torsione del rame Cu₃*

Data	P ₁	50	75	100	125	150
13 sett.	L	15	51	144	397	1151
	L'	11	41	155	447	1078
	L''	13	47	138	408	1209
14 "	L	17	56	140	375	974
	L'	11	43	143	415	981
	L''	13	54	143	398	1016
14 "	L	14	54	134	340	
	L'	11	39	134	368	
	L''	11	50	131	372	

XVII. *Torsione dell'argento Ag.*

Data	P ₁	50	75	100
19 sett.	L	45	176	770
	L'	44	182	764
	L''	44	177	789
19 "	L	49	180	669
	L'	44	176	665
	L''	42	170	685
20 "	L	42	158	607
	L'	40	162	649
	L''	44	154	610
22 "	L	55	166	626
	L'	42	158	668
	L''	53	163	627
24 "	L	45	156	570
	L'	42	141	585
	L''	46	140	569

« Nella flessione risulta un discreto accordo fra i valori di L e di L''. Le divergenze si rendono sensibili nei cicli di grande estensione, e sempre nel senso di aversi $L > L''$.

« Anche nella torsione l'accordo è in generale raggiunto, ma vi ha qualche fatto che importerà di mettere in evidenza.

« Il filo Ot₁, che, come si è visto⁽¹⁾, presenta nei valori di L' un andamento il quale accusa effetti assai sensibili dell'accomodazione, si comporta in modo più regolare nelle ricerche col metodo statico per riguardo alla verifica della (4), tuttavia i risultati delle ultime serie manifestano qualche disaccordo rilevante che potrebbe essere dovuto alla stessa causa ora citata. A conferma di questo modo di vedere starebbero l'esperienze col filo Ot₂, per il quale si è mostrato⁽²⁾ essere più forti gli effetti dell'accomodazione sin dalle prime serie, e concordemente qui troviamo sin da principio alquanto accentuata la divergenza fra le L e le corrispondenti L''.

« È notevole che il filo Fe₁, il quale nell'esperienze col metodo dinamico presentava un'accomodazione con caratteri opposti a quelli dell'ottone⁽³⁾ fornisce valori di L'' quasi sempre più vicini alle L' anzichè alle L, e ciò si verifica tanto meglio a misura che si va alle ultime serie, beninteso purchè non si oltrepassi la forza massima di 300 gr.: infatti al di là di questo limite le L'' tendono ad avvicinarsi alle medie di L ed L'. Uguale tendenza si rivela per il filo Fe₂ nell'esperienze dal 20 al 22 agosto, mentre

(1) V. Nuovo Cimento 1, p. 174.

(2) V. loc., cit.

(3) V. loc. cit., p. 179.

in quelle successive, con limiti di deformazione più estesi, le L'' risultano più vicine alle L che alle L' . Si vede pertanto come al crescere della plasticità della sostanza, per l'accresciuta ampiezza dei cicli, il comportamento del ferro si avvicina a quello caratteristico dell'ottone. E che ciò sia vero si argomenta anche dall'esame delle tabelle relative ai fili Fe_3 ed Fe_4 , che danno in generale valori di L'' assai concordanti con quelli di L e quasi sempre compresi fra le L e le corrispondenti L' .

« Presso a poco come questi ultimi si comportano i tre fili di nichel.

« Il platino per forze contenute entro limiti ristretti accusa una legge di deformazione alquanto diversa da quella da noi ammessa, ma per valori di P_1 piuttosto grandi, analogamente a quanto si ha per il ferro, diminuiscono le divergenze fra i valori di L e di L' , ed al tempo stesso le L ed L'' si avvicinano fra loro.

« I fili di alluminio, rame ed argento presentano nell'attuale studio un comportamento quasi del tutto normale, solo è da notare che i valori di L'' relativi ai cicli di maggiore estensione risultano per i fili di rame e per Al_1 un poco superiori a quelli che si hanno per le corrispondenti L ed L' .

« Il complesso dei fatti esposti tende a mostrare che, se non si va a deformazioni assai grandi, la (4) resta verificata per i metalli la cui plasticità è apprezzabile, e ciò porta implicitamente ad ammettere come in tal caso il sistema delle (1) e (2) possa servire a rappresentare la legge di deformazione del corpo al variare della forza nei processi ciclici senza bisogno di ricorrere ad uno sviluppo in serie per la espressione di ω , giacchè solo quando ci si arresti al primo termine di questo sviluppo risulta $A_1 \text{ sen } \lambda = \omega_0$.

« Una deduzione si può trarre dalla (4) riportandoci allo studio delle proprietà elastiche col metodo dinamico. Si è constatato nel lavoro *sull'attrito interno dei metalli* che in un filo oscillante, la diminuzione di energia potenziale per il decremento di ampiezza $A\omega$ all'intorno della deformazione corrispondente al momento M_1 , è presso a poco uguale all'area d'isteresi del ciclo bilaterale fra i momenti estremi M_1 e $-M_1$, onde si può porre:

$$L = M_1 A \omega;$$

ma per la (4)

$$L = \pi M_1 \omega_0$$

sicchè avremo:

$$A \omega = \pi \omega_0;$$

cioè il rapporto fra il decremento di ampiezza del filo oscillante e la deformazione permanente del ciclo statico che gli corrisponde è costante ed uguale a π .