

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IV.

1° SEMESTRE



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

• Queste sono le formole che fanno riscontro alle (4)_b rispetto alla ipotesi isotermica, la quale fa sempre in tal qual modo eccezione. Nel caso, più comunemente considerato, che le variabili geometriche v si riducano ad una sola (volume specifico), la funzione K_1 corrisponde a ciò che il Sig. Duhem chiama (in un senso differente) potenziale termodinamico a pressione costante.

• In realtà questa funzione K_1 , che non è più un vero potenziale nel preciso significato della parola, si riferisce sempre ai processi isotermi ($u = t$). Volendo invece considerare, per esempio, i processi isentropici ($u = F$), basta ricorrere alle formole più generali (4)_b, prendendo per K una funzione delle forze p e dell'entropia F e ponendo (3)_c $\psi = tF$ (ommissa, per semplicità, la funzione additiva). Si trova così:

$$v = \frac{\partial K}{\partial p}, \quad t = \frac{\partial K}{\partial F}, \quad E = K - \Sigma p \frac{\partial K}{\partial p},$$

formole che si possono immediatamente verificare mercè le equazioni fondamentali (1).

• È quasi superfluo avvertire che il concetto di potenziale termodinamico, nel senso qui considerato, non coincide punto necessariamente con quello di *funzione caratteristica*.

Matematica. — *Sui complessi generati da due piani in corrispondenza birazionale reciproca.* Nota di P. VISALLI.

• 1. Sieno α, β due piani in corrispondenza birazionale reciproca di grado n (1). Ad un punto di α corrisponde una retta di β , polare del punto; e ad una retta qualunque a di α , corrisponde un involuppo φ'_a , razionale di classe n . Ad una retta qualunque di β corrisponde un punto di α , polo della retta; e ad ogni punto A' di β corrisponde in α una curva φ , razionale di ordine n , la quale è il luogo dei poli delle rette di β uscenti per A' . Alla retta $\alpha\beta \equiv d$, corrisponde in α un punto D ed in β uno involuppo φ'_d . Le curve φ hanno in comune un certo numero di punti, x_1 semplici, x_2 doppi, x_r r -pli, ecc., i quali si dicono punti fondamentali; e gli involuppi φ' hanno in comune x'_1 tangenti semplici, x'_2 doppie, $x'_{r'}$, r' -ple, ecc., che si dicono rette fondamentali. Fra i numeri $x_2, x'_{r'}, n$, esistono le note relazioni:

$$\Sigma r^2 x_r = \Sigma r'^2 x'_{r'} = n^2 - 1$$

$$\Sigma r(r-1)x_r = \Sigma r'(r'-1)x'_{r'} = (n-1)(n-2).$$

• Una retta a di α ed una retta a' di β si dicono *coniugate*, se a passa

(1) Iung, *Sulle superficie generate da due sistemi Cremoniani reciproci di grado m* . Rendiconti R. Accademia dei Lincei, a. 1885.

per il polo di a' ; o, ciò che è lo stesso, se a' è tangente all'inviluppo corrispondente ad a .

« Un punto A di α ed un punto A' di β si dicono *coniugati* se A' giace sulla retta polare di A ; e quindi se A è un punto della curva φ corrispondente ad A' .

« Un punto qualunque di α (o β) ha un numero semplicemente infinito di punti coniugati, e perciò *le rette che uniscono le coppie di punti coniugati formano un complesso C*. Lo studio di questo complesso forma l'oggetto della presente Nota (1).

« 2. Sia π un piano qualunque, e sia $a \equiv \pi\alpha$, $a' \equiv \pi\beta$. Un punto A di a ha un punto coniugato A' su a' , ed ogni punto di a' , ha n punti coniugati su a ; quindi *le rette del complesso, giacenti in π , inviluppano una curva Γ di classe $n + 1$* . Questa curva è tangente alla retta a' , ha la retta a come tangente n -pla ed è dell'ordine $2n$. La curva Γ si chiama *curva del complesso appartenente al piano π* .

« *Il complesso C è dell'ordine $n + 1$.*

« 3. Ad un punto P_r , fondamentale r -plo di α , corrisponde in β un inviluppo razionale di classe r ; quindi ogni punto A' di β è coniugato a P_r ; e poichè per A' passano r rette dell'inviluppo, si può dire:

« *La stella di rette avente per vertice un punto P_r , fondamentale r -plo di α , contata r volte, fa parte del complesso C.*

« 4. Ogni punto A di α , giacente sulla retta $d \equiv \alpha\beta$, ha un punto coniugato A' situato sulla stessa retta; e viceversa, un punto A' di β , giacente su d , ha n punti coniugati su d ; quindi:

« *Sulla retta d vi sono $n + 1$ punti U_i , ciascuno dei quali è coniugato a se stesso.*

« *Le $n + 1$ stelle di rette, avente i vertici nei punti U_i , fanno parte del complesso.*

« Indicheremo con $u'_1, u'_2, u'_3, \dots; u'_{n+1}$ le rette polari dei punti $U_1, U_2, U_3, \dots U_{n+1}$, rispettivamente.

« 5. Se a è una retta di α , il punto ad di β ha n punti coniugati su a , quindi *tutte le rette di a sono rette n -ple del complesso*. Analogamente si dimostra che *tutte le rette di β sono rette semplici del complesso*.

« 6. Sia π un piano tale che il polo della retta $a' \equiv \pi\beta$ sia un punto A della retta $a \equiv \pi\alpha$. Tutte le rette di π , uscenti per A , sono rette del complesso. Inoltre, ogni punto di a ha per coniugato un punto di a' ; e viceversa, ogni punto di a' , ha per coniugati, oltre A , altri $n - 1$ punti di a ; segue quindi che *le rette di C, giacenti nel piano di due rette coniugate, formano un fascio, ed inviluppano una curva di classe n e di ordine $2(n - 1)$, avente la retta a come tangente $(n - 1)$ pla.*

(1) Hirst, *On the complexes generated by two correlative planes*. Collectanea Mathematica in Memoriam Dominici Chelini. Milano, Hoepli, 1881.

« Fra i punti di a' ve n'è uno, il punto di contatto di a' con l'involuppo φ' corrispondente ad a , al quale corrisponde una curva φ tangente in A ad a . La retta che unisce al il punto A col punto di contatto di a' con φ' , appartiene al fascio di centro A ed è tangente alla curva del complesso di classe n .

« Un piano π , la cui curva del complesso si spezza, si dice eccezionale.

« 7. Se un piano π passa per U_i , le rette del complesso, giacenti nel piano, formano il fascio U_i , ed involuppano una curva Γ_n di classe n . Se poi il piano passa per U_i e contiene due rette coniugate, le rette del complesso formano un fascio di centro U_i , un fascio che ha per centro il polo della retta $\pi\beta$, ed involuppano una curva di classe $n - 1$.

« 8. L'involuppo Γ_{n+1} delle rette del complesso, giacenti in un piano passante per un punto P_r , fondamentale r -plo di α , si compone del punto P_r , contato r volte, e di una curva di classe $n - r + 1$, dell'ordine $2(n - r)$, avente la retta $\pi\alpha$ per tangente $(n - r)$ pla, e tangente alla retta che unisce P_r col punto in cui $\pi\beta$ taglia la tangente comune, non fondamentale, alla curva fondamentale corrispondente a P_r e all'involuppo corrispondente alla retta $\pi\alpha$.

« Se il piano passa per P_r e per un punto U_i , l'involuppo delle rette del complesso giacenti in esso, si comporrà del punto P_r , del punto U_i , e di un involuppo della classe $n - r$.

« 9. Se un piano π passa per due punti fondamentali P_r , P_s , di α , di cui uno sia r -plo e l'altro s -plo, l'involuppo Γ_{n+1} , si comporrà del punto P_r , contato r volte, del punto P_s , contato s volte e di un involuppo di classe $n - r - s + 1$.

« Se $r + s = n$, la retta $P_r P_s$ è fondamentale, e tutti i suoi punti sono i poli di una stessa retta p'_1 , fondamentale semplice di β ; quindi:

« *Per ogni retta fondamentale di α passa un fascio di piani eccezionali per il complesso, in ciascuno dei quali l'involuppo Γ è composto di tre punti dei quali due sono i punti fondamentali situati sulla retta, ciascuno contato tante volte quanto è la sua molteplicità per le curve φ , e l'altro è il punto ove il piano taglia la retta fondamentale di β , corrispondente alla retta fondamentale per la quale passa il piano medesimo.*

« 10. Anche i piani uscenti per le rette fondamentali di β sono eccezionali. Se $p'_{r'}$ è una retta fondamentale r' -pla di β , essa ha infiniti poli situati sulla curva $\psi_{r'}$, di ordine r' , corrispondente; e quindi l'involuppo Γ delle rette del complesso, giacenti in un piano qualunque uscente per $p'_{r'}$, si compone degli r' punti in cui il piano taglia la curva $\psi_{r'}$, e di un involuppo di classe $n - r + 1$ ed ordine $2(n - r)$, avente per tangente $(n - r)$ pla la retta $\pi\alpha$.

« 11. È degno di nota il caso in cui nel piano α vi sia un punto P_{n-1} fondamentale $(n - 1)$ plo, e quindi in β una retta p'_{n-1} fondamentale $(n - 1)$ pla. Vi saranno in α altri $2(n - 1)$ punti fondamentali semplici, ed in β altre

$2(n-1)$ rette fondamentali semplici. Ai punti fondamentali semplici corrispondono altrettanti punti di β , ciascuno dei quali, è l'intersezione di una retta fondamentale semplice con la retta $(n-1)$ pla; ed al punto P_{n-1} corrisponde un involuppo di classe $n-1$, tangente a tutte le rette fondamentali semplici di β ed avente la retta p'_{n-1} per tangente $(n-2)$ pla. Le curve fondamentali di α sono: le $2(n-1)$ rette, che uniscono il punto P_{n-1} con i punti semplici, e una curva di ordine $n-1$, che passa per i punti fondamentali semplici ed ha un punto $(n-2)$ plo in P_{n-1} .

« Ad una retta e di α , uscente per P_{n-1} , corrisponde l'involuppo fondamentale di classe $n-1$, che propriamente corrisponde a P_{n-1} , ed un punto E' situato su p'_{n-1} , centro del fascio di rette polari dei punti di e . Viceversa ogni punto E' di p'_{n-1} , corrisponde ad una retta e per P_{n-1} in una data direzione.

« Risulta chiaramente che l'involuppo Γ delle rette del complesso giacenti in un piano π uscente per il punto P_{n-1} , si compone del punto P_{n-1} contato $n-1$ volte e di una conica. Se poi il piano π su detto passa per il punto E' , corrispondente alla retta $\pi\alpha$, essendo E' coniugato a tutti i punti di $\pi\alpha$, vi sarà su questa retta un punto M polo della retta $\pi\beta$, e quindi l'involuppo Γ si comporrà del punto P_{n-1} , contato $n-1$ volte, del punto M e del punto E' . Inoltre è facile vedere che le tracce su β dei piani che passano per P_{n-1} e contengono una retta e ed il punto corrispondente E' , involuppano una conica; quindi possiamo conchiudere: *Se nel piano α vi è un punto fondamentale $(n-1)$ plo per questo punto passa un numero semplicemente infinito di piani eccezionali, che involuppano un cono di secondo ordine, e tali che la curva del complesso, appartenente a ciascuno di essi, si riduce a tre punti.*

« Per il § 9 si ha ancora: *Per ciascuna delle $2(n-1)$ rette fondamentali di α passa un fascio di piani eccezionali per il complesso, in ciascuno dei quali l'involuppo Γ è composto di tre punti, dei quali due sono su α e l'altro sul piano β .*

« Consideriamo ora un piano π passante per $P_{n-1} U_i$, ($i = 1, 2, \dots, n-1$). Le rette polari dei punti di $P_{n-1} U_i$ formano un fascio di centro $Q' \equiv p'_{n-1} u'_i$, il quale determina sulla retta $\pi\beta$ una punteggiata prospettiva alla punteggiata $P_{n-1} U_i$ dei poli delle rette del fascio; quindi l'involuppo Γ , appartenente al piano π , si comporrà del punto P_{n-1} , contato $n-1$ volte, del punto U_i e di un altro punto, che diremo Q , esterno ai piani α, β , per il quale passano le rette di π che uniscono le coppie di punti coniugati delle punteggiate prospettive $\pi\alpha, \pi\beta$. Si ha quindi:

« *Esistono $n-1$ fasci di piani eccezionali aventi per assi le rette $P_{n-1} U_i$, tali che l'involuppo Γ , appartenente a ciascun piano, è composto del punto P_{n-1} , contato $n-1$ volte, del punto U_i e di un'altro punto Q esterno ai piani α, β .*

• Consideriamo due piani π_1, π_2 uscenti per la retta $P_{n-1} U_i$, e sieno A'_1, B'_1 i punti della retta $\pi_1 \beta$, e A'_2, B'_2 i punti della retta $\pi_2 \beta$, coniugati rispettivamente, ai punti A, B , della retta $\pi \alpha$. I due triangoli $AA'_1A'_2, BB'_1B'_2$ sono prospettivi, avendo per centro di prospettiva U_i , quindi i tre punti $Q' \equiv A'_1A'_2 \cdot B'_1B'_2, Q_1 \equiv AA'_1 \cdot BB'_1, Q_2 \equiv AA'_2 \cdot BB'_2$ sono in linea retta; perciò:

• I punti Q , appartenenti ai piani del fascio avente per asse $P_{n-1} U_i$, giacciono sopra una retta, che dirò q_i , passante per il punto $Q' \equiv p'_{n-1} \cdot u'_i$.

• È bene osservare che ogni piano uscente per una retta q_i è eccezionale per il complesso, perchè taglia i piani α, β secondo due rette coniugate.

• 12. I piani eccezionali del complesso sono di due specie: 1° piani che tagliano i piani α e β secondo rette coniugate, e sono in numero doppiamente infinito ed involuppano una superficie S .

• 2° piani che non tagliano i due piani α e β secondo rette coniugate. Tali sono i piani delle stelle aventi per centri i punti fondamentali di α , od i punti U_i .

• 13. Sia r una retta qualunque, ed A, A' i punti $r\alpha, r\beta$. Preso su d un punto M , le n tangenti condotte per A' all'involuppo g' , corrispondente alla retta AM , determinano su d n punti che dirò M' . Viceversa, dato un punto M' su d alla retta $A'M'$ corrisponde in α un punto, che unito ad A dà una retta che taglia d in un punto M . Vi sono sulla retta d $n+1$ punti M , ciascuno dei quali coincide con uno dei suoi corrispondenti punti M' , e perciò per r passano $n+1$ piani contenenti, ciascuno, due rette coniugate; quindi:

• La superficie S è della classe $n+1$.

• 14. Per una retta r di α passano n piani, individuati dalla retta r e dalle n tangenti condotte per il punto rd all'involuppo corrispondente, i quali sono tangenti ad S e non coincidono con α ; quindi il piano α è tangente alla superficie.

• Se la retta r passa per D uno degli n piani precedenti coincide con α , e quindi il punto D è il punto di contatto di α con la superficie S .

• 15. Se la retta r è tangente alla sezione αS , due delle n tangenti che si possono condurre per il punto rd all'involuppo g' , corrispondente ad r , coincidono; e ciò avviene quando g' passa per rd . Ora, se g' passa per il punto rd , viceversa la curva g corrispondente al punto rd di β , è tangente ad r ; quindi la curva αS si può definire come l'involuppo delle rette, condotte per ogni punto di d , tangenti alla curva g , corrispondente a questo punto, considerato come appartenente al piano β .

• Per ogni punto di β , situato d , passano $2(n-1)$ tangenti alla curva g corrispondente; inoltre, vi sono nel fascio di curve g , corrispondenti ai punti di d , $2(n-1)$ curve tangenti alla retta d ; quindi la curva αS è della classe $4(n-1)$ ed ha la retta d per tangente $2(n-1)$ pla.

« Questa curva αS , tocca d nei $2(n-1)$ punti ove d taglia l'involuppo \mathcal{G}'_a , corrispondente a d , passa per i punti U_i , ed ha un punto r' -plo nel punto in cui d è tagliata da una retta fondamentale r' -pla di β . Risulta quindi che l'ordine della curva αS , e quindi della superficie S , è

$$4(n-1) + n + 1 + \Sigma r'x_{r'} = 8n - 6$$

« 16. Una retta di β ha, in generale, una sola retta coniugata che la taglia; quindi per essa passa un solo piano tangente alla superficie S , e non coincidente con β . Se poi la retta è tangente all'involuppo \mathcal{G}'_a il polo di essa giace su d , e quindi, oltre al piano β , nessun altro piano tangente passa per la retta medesima. Segue da ciò che il piano β è piano tangente n -plo della superficie S , e \mathcal{G}'_a è la curva di contatto.

« Se $p'_{r'}$ è una retta fondamentale r' -pla di β , ogni piano uscente per $p'_{r'}$ è piano tangente r' -plo della superficie S , perchè contiene r' poli di $p'_{r'}$; quindi questa retta è r' -pla per la superficie S . Inoltre ogni piano uscente per u'_i è tangente alla superficie S ; e perciò questa superficie contiene le rette u'_i . Segue da ciò che il piano β taglia la superficie S secondo le rette fondamentali, secondo le rette u'_i , e la tocca lungo la curva \mathcal{G}'_a , che è dell'ordine $2(n-1)$.

« 17. Sia P' un punto fondamentale di β , corrispondente ad un punto P_1 fondamentale semplice di α , e sieno $p'_{r'}$, $p'_{s'}$ le due rette fondamentali ($r' + s' = n$), che passano per P'

« I piani tangenti ad S , condotti per una retta m passante per P' , sono: il piano $m \cdot p'_{r'}$, r' -plo; il piano $m \cdot p'_{s'}$, s' -plo; ed il piano mP_1 ; quindi ogni piano condotto per la retta P_1P' è tangente alla superficie, e perciò P_1P' è una retta della superficie medesima.

« 18. Oltre alle rette fondamentali di β , alle rette u'_i , ed alle x_1 rette P_1P' non giacenti in β , vi possono essere sulla superficie altre ε rette, ove ε indica il numero dei punti non fondamentali di β , per i quali passano n rette (per equivalenza) semplici della superficie.

« 19. Se la reciprocità fra i due piani è tale che nel piano β ci sia una retta fondamentale p'_{n-1} , $(n-1)$ -pla, questa retta sarà pure $(n-1)$ pla per la superficie S , la quale conterrà ancora $3n-1$ rette semplici, giacenti sul piano β . Per ciascuno dei $3n-1$ punti, ove queste rette semplici di S tagliano la retta p'_{n-1} , passa una retta semplice della superficie, non situata sul piano β . Queste rette, non situate sul piano β , sono le $2(n-1)$ rette P_1P' , e le $n+1$ rette q_i , luogo dei punti Q (11).

« 20. Proiettiamo da un punto qualunque O dello spazio il piano α sul piano β , e indichiamo con α_1 il piano β considerato come proiezione di α , e con A_1 , a_1 , g_1 le proiezioni del punto A , della retta a e della curva \mathcal{G} ,

rispettivamente. Fra i due piani sovrapposti α_1 , β vi è una reciprocità birazionale ⁽¹⁾ e si sa che:

• 1° Il luogo dei punti di α_1 , che si trovano sulle rette corrispondenti di β , è una curva G_{n+1} dell'ordine $n+1$, della classe $2(2n-1)$, e di genere $n-1$. Questa curva passa per i punti fondamentali di α_1 (proiezioni dei punti fondamentali di α), come le curve φ_1 corrispondenti ai punti di β , passa per i punti U_i e per i punti d'incontro di ogni retta fondamentale di β con la curva fondamentale corrispondente.

• 2° L'involuppo delle rette di β , che passano per i corrispondenti punti di α_1 è una curva G'_{n+1} di classe $n+1$, dell'ordine $2(2n-1)$ e di genere $n-1$. Ogni retta fondamentale r' -pla di β è tangente r' -pla della curva G'_{n+1} , la quale tocca le rette u'_i e le tangenti che da ogni punto fondamentale r -plo di α_1 si possono condurre alla curva fondamentale corrispondente.

• In tal modo, per ogni punto O dello spazio vengono determinate sul piano β due curve, la G_{n+1} e la G'_{n+1} , che diremo curve corrispondenti al punto O .

• 21. Se un punto A_1 di α_1 si trova sulla retta corrispondente a' di β , che è la retta polare del punto A di α di cui A_1 è la proiezione, la retta OA_1 è una retta del complesso ed il piano Oa' è un piano tangente alla superficie S , e viceversa; perciò la curva G_{n+1} , corrispondente ad un punto O , è l'intersezione di β col cono del complesso avente il vertice in O , e la curva G'_{n+1} è l'involuppo delle rette in cui β taglia i piani tangenti al cono circoscritto alla superficie S , condotto per il punto O a cui la curva G'_{n+1} corrisponde.

• Si ha quindi:

• 1° *Il cono del complesso, appartenente ad un punto O , è dell'ordine $n+1$, della classe $2(2n-1)$ e del genere $n-1$. Esso ha x_r ($r=1, 2, \dots$) generatrici r -ple, passanti per i punti fondamentali di α , e passa per i punti U_i .*

• 2° *Il cono circoscritto alla superficie S , condotto per un punto O , è della classe $n+1$, dell'ordine $2(2n-1)$ e genere $n-1$. Fra i piani tangenti a questo cono vi sono quelli che passano per le rette fondamentali di β , o per le rette u'_i o per le rette P_iP' .*

• 22. Il cono del complesso, appartenente ad un punto O , ed il cono circoscritto alla superficie S , condotto per lo stesso punto, sono correlativi. Alle generatrici del primo corrispondono i piani tangenti del secondo, passanti per le generatrici medesime. Se il cono del complesso si spezza in

⁽¹⁾ Vedi Iung: *Sulle superficie generate da due sistemi Cremoniani reciproci di grado m* . Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, a. 1885; od anche una Nota del sig. Lazzeri pubblicata l'anno 1886 negli stessi Rendiconti ed intitolata: *Sulle reciprocità birazionali nel piano*.

un piano ed in un cono di ordine n , quello circoscritto si comporrà di una retta e di un cono di classe n .

« 23. Sia r una generatrice comune al cono del complesso, appartenente ad un punto qualunque O dello spazio, ed al cono circoscritto alla superficie S ; e sia $A \equiv rd$, ed a' la polare di A . Il piano $\pi \equiv Aa'$ passa per r ed è tangente alla superficie S . Ora, perchè un altro piano uscente per r e tangente ad S , coincida con π è necessario che l'involuppo \mathcal{G}' , corrispondente alla retta $\pi\alpha$, sia tangente ad a' nel punto ra' ; ma in tal caso la retta r conta per due rette del complesso infinitamente vicine (§ 6), e quindi π è piano tangente al cono del complesso. Segue da ciò che:

« *Il cono del complesso, appartenente ad un punto O , ed il cono circoscritto alla superficie S , condotto per lo stesso punto, si toccano lungo le generatrici che hanno di comune.*

« 24. Il cono del complesso, appartenente ad un punto qualunque O del piano α , si compone del piano α , contato n volte, e del piano che passa per O e per la retta o' polare di O . Questi due piani si tagliano secondo la retta $O.do'$, che appartiene al complesso ed è una retta singolare del complesso medesimo. Ogni retta a di α è singolare per il complesso, perchè su essa vi sono n punti, quelli coniugati al punto ad , tali che il cono del complesso, appartenente ad uno qualunque di essi, si compone di due piani (di cui uno è α) passanti per la retta medesima.

« Il cono del complesso, appartenente al punto D , è formato dal piano α contato $n+1$ volte. Di modo che il punto D presenta una singolarità, rispetto al complesso, differente di quella degli altri punti del piano α .

« Il cono del complesso appartenente ad un punto del piano β si compone del piano β e di un cono di ordine n . Le n rette comuni al piano β ed al cono, sono rette singolari del complesso. Per ogni punto di β passano quindi n di queste rette singolari, e sopra una retta qualunque di β vi è un sol punto, tale che il cono del complesso, appartenente ad esso, si compone del piano β e di un cono di ordine n che ha per generatrice la retta medesima.

« Le rette u'_i e la retta d presentano maggiore singolarità: ogni punto di una retta u'_i è il vertice di un cono del complesso composto del piano β e di un cono di ordine n avente la stessa retta per generatrice; ed il cono del complesso, appartenente ad un punto qualunque di d , si compone del piano α e del piano β ».