ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IV.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

Matematica. — *Sopra alcune congruenze di grado* n, *dotate di una curva gobba singolare di ordine* n. Nota di P. VISALLI, presentata a nome del Socio CREMONA.

« 1. In una precedente Nota [1] sulle congruenze di grado n, dotate ciascuna di un piano eccezionale σ contenente un numero semplicemente infinito di rette della congruenza, che inviluppano una curva ψ della classe $n-1$, abbiamo tralasciato di occuparci del caso in cui fra i punti del piano σ, eccezionali per la congruenza, fra i quali esiste la relazione $\Sigma_r r^2 x_r = n^2 + 1$, ci fosse un punto P_n, n-plo.

« Lo studio di questo caso particolare forma l'oggetto della presente Nota.

« 2. Ponendo $x_n = 1$, la formola precedente dà anche $x_1 = 1$; cioè nel piano σ vi sono due punti eccezionali, uno n-plo P_n, l'altro semplice P_1. Le rette della congruenza, che passano per P_n, formano un cono di ordine n, quelle uscenti per P_1 formano un fascio.

« 3. Sia π un piano qualunque. Le rette della congruenza determinano fra i punti dei due piani π, σ una corrispondenza $(1, n)$, dicendo corrispondenti un punto di π ed uno di σ che giacciono sulla stessa retta della congruenza.

« Ad un punto della retta $\pi\sigma$, considerato come appartenente a σ, corrisponde il punto medesimo; considerato come appartenente a π corrisponde lo stesso punto ed altri $n-1$ punti del piano σ.

« I punti fondamentali di σ sono il punto P_n, n-plo, il punto P_1 semplice, ed altri n punti semplici, S_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ nei quali le n rette della congruenza, giacenti in π, tagliano σ.

« Al punto P_n corrisponde una curva β di ordine n, intersezione del piano π con il cono (P_n), al punto P_1 corrisponde la retta $\omega_1 \pi$, ove ω_1 indica il piano del fascio di rette della congruenza uscenti per P_1, ed ai punti S corrispondono le rette s'.

« Alle rette del piano π corrispondono curve α di ordine $n+1$, le quali passano con n rami per P_n, e semplicemente per P_1 e per i punti S_i.

« Nel piano σ vi sono $n+1$ rette fondamentali: $P_n P_1$, $P_n S_i$; quindi in π vi sono $n+1$ punti fondamentali semplici, i quali giacciono sulla curva β e sulle rette fondamentali, uno su ciascuna. Indicherò con O' il punto fondamentale corrispondente alla retta $P_n P_1$, e con S'_i quello corrispondente alla retta $P_n S_i$.

« Al punto in cui $P_n P_1$ taglia $\pi\sigma$ corrisponde il punto medesimo; ma a tutti i punti di $P_n P_1$ corrisponde O', quindi O' coincide col punto $P_n P_1 . \pi\sigma$ ed il piano ω_1 passa per P_n.

(1) V. pag. 33.

« Da quanto si è detto risulta che ogni piano che passa per P_n e per una retta s'_i della congruenza, non passante per P_n è eccezionale, giacchè contiene un numero semplicemente infinito di rette della congruenza formanti un fascio il cui centro è uno dei punti in cui s'_i taglia il cono (P_n).

« Il centro di questo fascio lo chiameremo *polo* del piano $P_n S'_i$.

« 4. La curva α, corrispondente alla retta $\pi\sigma$, si compone della retta medesima, della retta $P_n P_1$, e di altre $n-1$ retta m_i uscenti per P_n. Una curva qualunque α corrispondente ad una retta a' di π, taglia $\pi\sigma$, oltre che nei punti S, nel punto per il quale passa a', e taglia in un punto, fuori di P_n, ciascuna delle $n-1$ rette m_i. Questi $n-1$ punti comuni alla curva α ed alle rette m_i, corrispondono al punto $a'.\pi\sigma$; quindi: ad ogni punto di $\pi\sigma$ corrisponde il punto medesimo ed altri $n-1$ punti situati sulle $n-1$ rette m_i, uno su ciascuna.

« 5. Le rette fondamentali di σ sono di prima specie; perciò ognuna ha $n-1$ punti congiunti. I punti congiunti alla retta $P_n P_1$, si trovano sulle rette m_i, uno su ciascuna. Risulta quindi che in un piano qualunque π non passante per P_n vi sono n punti eccezionali per la congruenza e che, per ognuno di essi, passa un fascio di rette della congruenza ed altre $n-1$ rette della congruenza medesima, esterne al piano del fascio.

« 6. La curva doppia del piano σ è una curva dell'ordine $2n$-1 con un punto $(2n-2)$-plo in P_n, e passa semplicemente per gli altri punti fondamentali.

« Essa taglia le rette fondamentali solo nei punti fondamentali, e taglia la retta $\pi\sigma$, nei punti S_i e negli $n-1$ punti ove π è tagliato dalle rette m_i.

« La curva limite di π è dell'ordine $2(n-1)$, della classe n, di genere zero, non passa per i punti fondamentali S' ed O', tocca in un punto ciascuna retta s' e la retta $\pi\omega_1$, in $2(n-1)$ punti la curva β, e tocca la retta $\pi\sigma$ negli $n-1$ punti per i quali passano le rette m_i.

« La curva limite non taglia in altri punti la retta $\pi\sigma$, quindi la curva ψ, inviluppo delle rette della congruenza, giacenti nel piano σ, è di ordine zero, cioè è formata da $n-1$ punti, che dirò punti Q; o in altri termini: le rette della congruenza, giacenti in σ formano $n-1$ fasci aventi i centri nei punti Q.

« Il cono (P_n) taglia il piano σ secondo la retta $P_n P_1$ ed altre $n-1$ rette r_i. Ad uno degli $n-1$ punti $\pi\sigma.r_i$ corrispondono il punto medesimo, un punto infinitamente vicino a P_n ed altri $n-2$ punti; quindi è necessario che uno dei punti Q sia della retta r_i; cioè:

« I punti Q si trovano sulle $n-1$ rette r_i, uno su ciascuna.

7. Come è noto, la curva limite di π, è la sezione di π con la superficie focale, segue quindi che la superficie focale, è dell'ordine $2(n-1)$, tocca il piano σ secondo le $n-1$ rette m_i, ed ha un punto $2(n-1)$-plo in P_n; cioè

La superficie focale della congruenza è un cono razionale di ordine $2(n-1)$ della classe n, il quale ha per vertice P_n e tocca il piano σ lungo le $n-1$ rette m_i, ed il cono (P_n) secondo $2(n-1)$ generatrici.

8 Le curve congiunte alle rette di σ (nella trasformazione π, σ) sono dell'ordine n^2+n-1, passano con n rami per ogni punto S e per P_1 e con n^2-1 rami per P_n. La curva congiunta ad un punto S è di ordine n, passa semplicemente per i punti S e per P_1 e con $n-1$ rami per P_n. La curva congiunta a P_n è dell'ordine n^2-1, passa con $n-1$ rami per i punti S e per P_1 e con n^2-n rami per P_n.

Ad una retta a per P_n in σ corrisponde in π una retta a' e la curva β corrispondente a P_n. Ad a' corrisponde a ed una curva α_n di ordine n, che è la curva congiunta ad a, in modo che ad ogni punto di a' corrisponde un punto di a ed $n-1$ punti della curva α_n. I punti corrispondenti determinano sulle rette a, a' due punteggiate prospettive, quindi le rette della congruenza, giacenti nel piano $a\,a'$, formano un fascio. Poichè al punto di a infinitamente vicino a P_n, corrisponde un punto d'intersezione di β con a', risulta che il centro del fascio giace su una generatrice del cono (P_n); quindi si ha:

Per il punto P_n passa un numero semplicemente infinito di piani eccezionali per la congruenza, che dirò piani ω, in ciascuno dei quali vi è un fascio di rette della congruenza, avente il centro sul cono (P_n).

La curva doppia taglia la retta $a=\omega\sigma$ in un punto, fuori di P_n; quindi la retta a' è tangente alla curva limite, cioè:

Il cono focale della congruenza è inviluppato dai piani ω.

0 Abbiamo dimostrato che in un piano qualunque π vi sono n punti S', centri di n fasci di rette della congruenza, giacenti in piani ω, e che questi punti S' giacciono sul cono (P_n). Anche nel piano σ vi sono n centri di fasci di rette della congruenza, e sono il punto P_1 ed i punti Q, giacenti sulle n generatrici in cui il piano σ taglia il cono (P_n).

Consideriamo ora un piano qualunque γ passante per P_n. Esso taglia la curva β del piano π in n punti B'_1, $B'_2 \ldots$, B'_n ad ognuno dei quali corrisponde un punto infinitamente vicino a P_n, in una data direzione.

Indichiamo con b_1, $b_2, \ldots b_n$ le n rette di σ condotte per P_n, secondo le direzioni corrispondenti rispettivamente a B'_1, $B'_2, \ldots, B'_n$. I piani $B'_1\, b_1$, $B'_2\, b_2, \ldots$, $B'_n\, b_n$ sono piani ω, su ciascuno di essi vi è un fascio di rette della congruenza, ed i centri S' di questi fasci sono sulle generatrici $P_n B'_1$, $P_n B'_2, \dots, P_n B_n$, e quindi sul piano γ. Si ha perciò:

« Nella congruenza, oltre al punto eccezionale n-plo, vi è un numero semplicemente infinito di punti eccezionali semplici, il luogo dei quali è una curva gobba di ordine n tracciata sul cono (P_n)

« 10. Riepilogando si può dire:

« Le rette della congruenza formano un cono (P_n), di ordine n, ed un numero semplicemente infinito di fasci. Il luogo dei centri di questi fasci è una curva gobba (curva singolare della congruenza), tracciata sul cono P_n, ed i piani dei fasci medesimi inviluppano la superficie focale, che è un cono avente il vertice in P_n, dell'ordine $2(n-1)$, tangente lungo $2(n-1)$ rette al cono (P_n), e tangente secondo $n-1$ rette al piano σ.

« Le n rette della congruenza, uscenti per un punto qualunque A dello spazio, sono quelle che congiungono A con i poli S' degli n piani ω, che per A si possono condurre tangenti al cono focale.

« Le n rette della congruenza, giacenti in un piano qualunque π dello spazio, sono quelle in cui π è tagliato dagli n piani ω, polari dei punti S' in cui π taglia la curva singolare.

« Se il punto A (il piano π) è eccezionale, per esso passano (in esso giacciono) un fascio di rette della congruenza ed altre $n-1$ rette esterne al piano (non passanti per il centro) del fascio.

« 11. I risultati ottenuti precedentemente nell'ipotesi di $x_n = 1$ non si possono applicare se è $n = 1$, perchè in tal caso l'equazione $\Sigma r^2 x_r = n^2 + 1$ dà $x_1 = 2$. Sebbene la congruenza lineare sia abbastanza nota [1], tuttavia non crediamo superfluo far vedere come il metodo da noi seguito sinora si presti facilmente alla ricerca delle sue proprietà.

« Chiamiamo con P e Q i punti eccezionali semplici della congruenza situati sul piano σ. Fra i punti σ e quelli di un piano qualunque π, le rette della congruenza determinano una corrispondenza univoca di secondo grado.

« I punti fondamentali di σ sono i punti P, Q ed il punto S ove la retta s' della congruenza, giacente in π taglia σ. Le rette fondamentali di σ sono le rette dei lati del triangolo PQS. Alla retta PQ corrisponde in π il punto $S' \equiv \pi\sigma . PQ$, alle rette PS, QS corrispondono rispettivamente i punti P', Q' ove i piani dei fasci di rette della congruenza di centro P e Q,

(1) Vedi Reye, *Geometria di posizione*.

i quali passano per S' tagliano s'. La retta PQ è la retta della congruenza giacente in σ.

« Ad una retta qualunque a condotta per P in σ, corrisponde in π una conica formata dalla retta P'S', corrispondente a P, e da una retta a' la quale taglia a e passa per Q'. Le rette della congruenza determinano sulle rette a, a' due punteggiate prospettive, al punto di a infinitamente vicino a P corrisponde il punto a'. S'P' $\equiv$ M' ed al punto della retta a' infinitamente vicino a Q' corrisponde il punto a. SQ $\equiv$ N, quindi il centro del fascio di rette della congruenza, giacenti nel piano aa', è il punto di incontro delle rette PM', Q'N, ma ciascuna di queste due rette taglia la retta P'Q esterna al loro piano, quindi il centro del fascio è il punto ove la retta P'Q taglia il piano aa'.

« Indicando con u e v le due rette P'Q, PQ', si ha:

« Ogni piano del fascio che ha per asse la retta $u(v)$ è eccezionale per la congruenza, e contiene un fascio di rette il cui centro è l'intersezione del piano con la retta $v(u)$.

« Ogni retta della congruenza taglia u e v; e viceversa; cioè la congruenza lineare è il luogo delle rette che tagliano le due rette u, v.

« Queste due rette u, v singolari per la congruenza si dicono assi ».

Fisica terrestre. — *Sulla velocità superficiale di propagazione dei terremoti.* Nota di F. Bonetti e G. Agamennone, presentata dal Socio Tacchini.

« In una nota precedente [1] abbiamo asserito, senza dimostrarlo, che nell'ipotesi della propagazione rettilinea dell'urto sismico dal centro di scuotimento, la velocità superficiale, lungo gli archi di circolo massimo, è diversa da quella nell'interno della terra e variabile. Nella presente nota veniamo a dare la dimostrazione e qualche sviluppo di quel nostro assunto.

« Il calcolo che siamo per fare è basato sulle stesse ipotesi dei calcoli fatti nella Nota suaccennata, cioè:

1°) che la massa terrestre possa ritenersi in un primo studio ed approssimativamente come omogenea ed isotropa.

2°) che l'ipocentro possa considerarsi sensibilmente come un punto.

« Supponiamo di più che la scossa sentita alla superficie provenga direttamente dall'ipocentro.

« Sia I l'ipocentro (fig. 1), cioè il punto donde ha origine la scossa al tempo $t = 0$: supponiamo che questa si propaghi tutt'intorno nella massa solida terrestre, con una velocità u uniforme e costante, in modo che i punti

[1] V. pag. 38.