ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IV.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

i quali passano per S′ tagliano s'. La retta PQ è la retta della congruenza giacente in σ.

« Ad una retta qualunque a condotta per P in σ, corrisponde in π una conica formata dalla retta P′S′, corrispondente a P, e da una retta a' la quale taglia a e passa per Q′. Le rette della congruenza determinano sulle rette a, a' due punteggiate prospettive, al punto di a infinitamente vicino a P corrisponde il punto a'. $S'P' \equiv M'$ ed al punto della retta a' infinitamente vicino a Q′ corrisponde il punto a. $SQ \equiv N$, quindi il centro del fascio di rette della congruenza, giacenti nel piano aa', è il punto di incontro delle rette PM′, Q′N, ma ciascuna di queste due rette taglia la retta P′Q esterna al loro piano, quindi il centro del fascio è il punto ove la retta P′Q taglia il piano aa'.

« Indicando con u e v le due rette P′Q, PQ′, si ha:

« Ogni piano del fascio che ha per asse la retta $u(v)$ è eccezionale per la congruenza, e contiene un fascio di rette il cui centro è l'intersezione del piano con la retta $v(u)$.

« Ogni retta della congruenza taglia u e v; e viceversa; cioè la congruenza lineare è il luogo delle rette che tagliano le due rette u, v.

« Queste due rette u, v singolari per la congruenza si dicono assi ».

Fisica terrestre. — *Sulla velocità superficiale di propagazione dei terremoti.* Nota di F. Bonetti e G. Agamennone, presentata dal Socio Tacchini.

« In una nota precedente (¹) abbiamo asserito, senza dimostrarlo, che nell'ipotesi della propagazione rettilinea dell'urto sismico dal centro di scuotimento, la velocità superficiale, lungo gli archi di circolo massimo, è diversa da quella nell'interno della terra e variabile. Nella presente nota veniamo a dare la dimostrazione e qualche sviluppo di quel nostro assunto.

« Il calcolo che siamo per fare è basato sulle stesse ipotesi dei calcoli fatti nella Nota suaccennata, cioè:

1°) che la massa terrestre possa ritenersi in un primo studio ed approssimativamente come omogenea ed isotropa.

2°) che l'ipocentro possa considerarsi sensibilmente come un punto.

« Supponiamo di più che la scossa sentita alla superficie provenga direttamente dall'ipocentro.

« Sia I l'ipocentro (fig. 1), cioè il punto donde ha origine la scossa al tempo $t = 0$: supponiamo che questa si propaghi tutt'intorno nella massa solida terrestre, con una velocità u uniforme e costante, in modo che i punti

(¹) V. pag. 38.

colpiti nello stesso tempo dalla scossa stiano sempre sulla superficie di una sfera. Dei punti della superficie il primo a risentire l'urto sarà l'epicentro E (cioè l'estremo più vicino ad I del diametro passante per I); poi successivamente la risentiranno gli altri punti a partire da E, in modo che in un dato istante i punti della superficie terrestre colpiti staranno tutti sopra un circolo minore, avente il centro sul diametro condotto per E. Sembrerà quindi alla superficie l'urto irradiare da E, seguendo i circoli massimi, che passano per

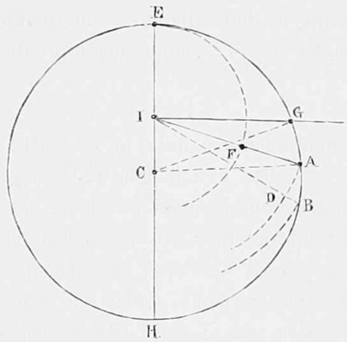

Fig. 1

questo punto. Sia v la velocità di propagazione dell'urto lungo il circolo massimo. Alla fine del tempo t esso sarà giunto in A, avendo percorso lungo il raggio il tratto $IA = ut$, e lungo il circolo massimo sulla superficie l'arco $EA = s$. Nel tempuscolo successivo dt la scossa si sarà avanzata sul raggio per un tratto $DB = udt$, e sul circolo massimo per un tratto $AB = ds$. Ora nel triangolo infinitesimo ADB, detto α l'angolo IAC, si ha

$$DB = AB \operatorname{sen} DAB = AB \operatorname{sen} \alpha\,;$$

quindi

$$u\,dt = ds \operatorname{sen} \alpha \quad \text{e} \quad \frac{ds}{dt} = v = \frac{u}{\operatorname{sen} \alpha}\,. \tag{α}$$

Per esprimere sen α in funzione di t, detto r il raggio terrestre e δ la profondità EI dell'ipocentro, si ha dal triangolo IAC

$$\cos \alpha = \frac{u^2 t^2 + (2r - \delta)\,\delta}{2\,urt} \tag{β}$$

donde

$$v = \frac{u}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{u^2 t^2 + (2r - \delta)\,\delta}{2\,urt}\right)^2}}\,. \tag{γ}$$

Per esprimere invece sen α in funzione dell'arco s si ha dal medesimo triangolo IAC

$$\frac{\operatorname{sen} ECA}{\operatorname{sen} IAC} = \frac{IA}{IC}\,, \quad \text{ossia} \quad \frac{\operatorname{sen}\dfrac{s}{r}}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\sqrt{r^2 + (r-\delta)^2 - 2r\,(r-\delta)\cos\dfrac{s}{r}}}{r - \delta}$$

donde

$$v = u \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{r-\delta}\right)^2 - 2\frac{r}{r-\delta}\cos\frac{s}{r}}}{\operatorname{sen}\frac{s}{r}}. \qquad (\gamma')$$

Dalle due formole (γ) e (γ') si ricava che v è funzione della profondità δ dell'ipocentro e del tempo o della distanza superficiale s dall'epicentro.

Dalla (α) si raccoglie che v è sempre maggiore di u, perchè α è sempre minore di $\frac{\pi}{2}$.

L'angolo α evidentemente è nullo in E e all'antipodo di E. Considerando poi il cerchio circoscritto al triangolo IAC, si giunge facilmente a dimostrare per via geometrica che l'angolo α è massimo, quando questo cerchio è tangente internamente al circolo EAH, cioè nel punto G, dove la retta IG, condotta perpendicolarmente al diametro EH, incontra la circonferenza. Ciò è facile vedere anche analiticamente. Infatti all'epicentro E si ha $ut = \delta$ a all'antipodo $ut = 2r - \delta$; quindi dalla (β) in tutti e due i casi si ricava $\cos\alpha = 1$: donde nel caso nostro $\alpha = 0$. Per determinare in modo semplice il massimo di α basta riflettere che, essendo l'angolo IAC sempre compreso

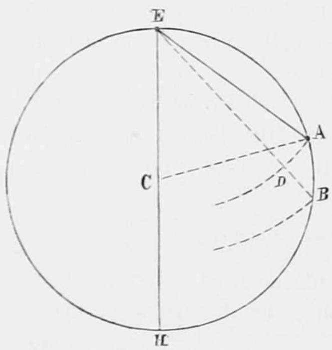

Fig. 2.

nel primo quadrante, il massimo di α corrisponde al minimo di $\cos\alpha$. Eguagliando a zero la derivata prima rispetto a t del secondo membro della (β), si trova questo minimo corrispondere al caso di $(ut)^2 = (2r - \delta)\,\delta$ ossia di IA medio geometrico fra i segmenti in I del diametro: quindi ha luogo, come già si è detto, in G. È chiaro dunque che la v sarà infinita in E, poi andrà diminuendo fino ad avere un minimo in G, poi tornerà a crescere per divenire nuovamente infinita all'antipodo di E.

« Supponiamo ora che l'ipocentro coincida coll'epicentro, cioè a dire sia $\delta = 0$. Dalla figura 2 si ricava anche in questo caso particolare

$$v = \frac{u}{\operatorname{sen} \alpha} \qquad (\alpha')$$

essendo α l'angolo DAB = EAC. Dal triangolo ECA si ha

$$\frac{EA}{2} = AC \cos \alpha\,, \text{ ossia } \frac{ut}{2} = r \cos \alpha\,; \text{ donde}$$

$$v = \frac{u}{\sqrt{1 - \left(\frac{ut}{2r}\right)^2}} \cdot \qquad (\delta)$$

Si può anche in questo caso esprimere v in funzione dell'arco s. Infatti si ha $2\alpha + \frac{s}{r} = \pi$; donde

$$\operatorname{sen} \alpha = \cos \frac{s}{2r} \quad \text{e} \quad v = \frac{u}{\cos \frac{s}{2r}} \cdot \qquad (\delta')$$

Le formole (δ) e (δ') coincidono con quelle, che si otterrebbero facendo nelle (γ) e (γ') $\delta = 0$: ma abbiamo voluto dimostrarle direttamente per evitare l'indeterminazione che si presenta nelle (γ) e (γ'), quando vi si debba fare simultaneamente $\delta = 0$ e $t = 0$ o $s = 0$. L'analisi della (α') ci dice subito che in E la v è eguale ad u, perchè il limite dell'angolo EAC in E è $\frac{\pi}{2}$, e che va crescendo poi continuamente fino a divenire infinita all'antipodo H, dove è nullo il detto angolo. Ciò del resto è facile ricavare anche dall'analisi delle due (δ) e (δ').

« Finalmente, se l'ipocentro si suppone al centro stesso della terra, siccome la scossa giungerà simultaneamente a tutti i punti della superficie terrestre, la velocità superficiale sarà dapertutto infinita. Ed infatti, supposto l'ipocentro I in C, si vede dalla prima figura che l'angolo IAC $= \alpha$ è costantemente nullo, e quindi anche sen α: si ottiene così dalla (α) $v = \infty$.

* * *

« Passiamo ora a calcolare la *velocità superficiale media* V tra l'epicentro E ed un punto qualunque A. Questa è precisamente quella che risulta dal metodo che tengono ordinariamente i sismologi nel calcolare la velocità di propagazione dei terremoti, quando cioè dividono lo spazio percorso per il tempo impiegato a percorrerlo, e contano questo spazio sul circolo massimo passante per l'epicentro.

« Si può trovare la V nel caso generale direttamente, osservando che il tempo impiegato dalla scossa a percorrere l'arco EA (fig. 1) è precisamente quello che vien impiegato a percorrere il tratto $FA = IA - IF = IA - \delta$ nell'interno della massa terrestre. Quindi detto β l'angolo ECA sarà

$$V = \frac{\text{arc. EA}}{\frac{FA}{u}} = u\,\frac{\text{arc. EA}}{FA} = u\,\frac{\beta r}{IA - \delta}\,. \tag{ε}$$

Si può esprimere V in funzione di t o di s, come abbiamo fatto per la v. Infatti si ha $IA = ut$, e dal triangolo IAC si ricava

$$\overline{IA}^2 = (ut)^2 = \delta^2 + 4r(r - \delta)\,\text{sen}^2\frac{\beta}{2} \tag{ζ}$$

donde

$$\text{sen}\,\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(ut)^2 - \delta^2}{r(r - \delta)}}\,. \tag{ζ'}$$

Dalla (ζ') si ottiene

$$\beta = 2\,\text{arc. sen}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(ut)^2 - \delta^2}{r(r - \delta)}}$$

e quindi

$$V = u\,\frac{2r\,\text{arc. sen}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(ut)^2 - \delta^2}{r(r - \delta)}}}{ut - \delta} \tag{η}$$

Così sostituendo nella (ε) ad IA il suo valore tratto dalla (ζ) si ha

$$V = u\,\frac{\beta r}{\sqrt{4r(r - \delta)\,\text{sen}^2\frac{\beta}{2} + \delta^2} - \delta} \tag{η'}$$

Dalle due espressioni (η) ed (η') di V si vede che anche la velocità media è funzione della profondità dell'ipocentro, e del tempo o della distanza superficiale dall'epicentro.

Essendo l'arco EA maggiore della corda EA, e questa maggiore della differenza tra i due lati IA ed IE del triangolo EIA, cioè di $IA - \delta$, sarà $\frac{\beta r}{IA - \delta} > 1$; e però la V sarà sempre maggiore della u.

Si capisce facilmente che la velocità media ha da avere per limite in E la velocità vera in questo punto, e quindi avrà per limite anch'essa l'infinito. Infatti se l'arco EA diviene infinitesimo, la differenza FA diviene infinitesima di ordine superiore. I secondi membri delle (η) ed (η') per $ut - \delta = 0$ o per $\beta = 0$ si presentano sotto la forma $\frac{0}{0}$; ma facendo il quoziente delle derivate prime dei numeratori e denominatori si ottiene da tutte e due l'espressioni $V = \infty$.

Il valore della V tra l'epicentro e il suo antipodo si vede direttamente che deve essere

$$V = u\,\frac{\pi}{2}\,\frac{r}{r - \delta}$$

e questo valore appunto ci danno le (η) ed (η'), quando si faccia nella prima $t = \dfrac{2r - \delta}{u}$, e nella seconda $\beta = \pi$.

« Per dare un'idea delle variazioni della V, abbiamo calcolato nella seguente tabella in base alla formola (η') i valori che assume il coefficiente di u di dieci in dieci gradi fra 0° e 180°, in un caso particolare molto semplice, cioè posto $r = 1$ e $\delta = \frac{1}{2}$. Fra 0° e 10°, come fra 90° e 110°, abbiamo inserito dei punti intermedi.

β		β	
0°	∞	90°	2,5416
1	114,6357	95	2,5262
3	38,2580	100	2,5179
5	23,0200	105	2,5161
10	11,6604	110	2,5203
20	6,1183	120	2,5452
30	4,3758	130	2,5907
40	3,5679	140	2,6563
50	3,1252	150	2,7423
60	2,8610	160	2,8502
70	2,6977	170	2,9822
80	2,5978	180	3,1416

« Si vede da questa tabella che fra 100° e 110° la funzione ha un minimo. D'altronde l'esistenza almeno di un minimo si può dimostrare anche in generale, osservando che il valore del coefficiente di u per $\beta = \frac{\pi}{2}$ è minore di quello per $\beta = \pi$, mentre per $\beta = 0$ è infinito. Infatti ponendo nella (η') $\beta = \frac{\pi}{2}$, si ha per il detto valore

$$\frac{\dfrac{\pi r}{2}}{\sqrt{r^2 + (r-\delta)^2} - \delta}$$

che è evidentemente minore di

$$\frac{\dfrac{\pi r}{2}}{r - \delta}$$

valore già trovato di sopra per $\beta = \pi$.

« Consideriamo in ultimo anche per la velocità media il caso particolare, in cui l'ipocentro coincida coll'epicentro, cioè sia $\delta = 0$. Trattiamo anche questa questione direttamente per evitare l'indeterminazione, di cui già si è parlato. Dalla figura 2 si ha

$$V = \frac{\text{arc. EA}}{t} = \frac{\beta r}{t} \cdot$$

Per esprimere tutto in funzione di β si osservi che dal triangolo ECA si ha $\frac{\mathrm{EA}}{2} = \frac{ut}{2} = r \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \; (\theta)$, donde $t = \frac{2r}{u} \operatorname{sen} \frac{\beta}{2}$; e quindi

$$V = u \frac{\frac{\beta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\beta}{2}} \cdot \qquad (\lambda)$$

« Volendo esprimere invece tutto in funzione di t, si ottiene dalla (θ) $\beta = 2 \text{ arc. sen } \frac{ut}{2r}$: quindi

$$V = \frac{2r}{t} \text{ arc sen } \frac{ut}{2r} \cdot \qquad (\lambda')$$

Dalla (λ) si ricava che V è sempre maggiore di u, salvo in E dove finisce per essere eguale ad u. Va crescendo poi continuamente finchè in H si ha $V = u \frac{\pi}{2}$ ».

Chimica. — *Sulla struttura degli acidi santonosi.* Nota di Americo Andreocci, presentata dal Socio S. Cannizzaro.

« In una mia Memoria: *Sopra due nuovi isomeri della santonina e due nuovi isomeri dell'acido santonoso* (¹), dimostrai che la desmotropo-santonina, da me ottenuta per azione dell'acido cloridrico sulla santonina, contiene al posto del CO cetonico di questa l'OH naftolico, essendosi cangiato per desmotropia il lato della molecola

$$\begin{array}{ccc} \diagdown CH^2 & & \diagdown CH \\ | & \text{in} & \| \\ \diagup CO & & \diagup COH\,; \end{array}$$

e che l'azione dell'idrato potassico a 200° trasforma questo nuovo isomero della sàntonina in un altro, da me chiamato iso-desmotropo-santonina, contenente l'OH naftolico.

(¹) Gazz. chim. ital., vol. XXIII, parte 2ª p. 468.