ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IV.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 febbraio 1895.

F. Brioschi Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari alle derivate parziali d'ordine superiore.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

« Alla fine della mia Nota precedente [1] ho già accennato ad ulteriori ricerche, relative alla equazione lineare a derivate parziali del 3° ordine:

$$(1)\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}+a\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}+c\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial u}{\partial y}+\gamma\frac{\partial u}{\partial z}+\delta u=0,$$

i cui coefficienti a, b, c, α, β, γ, δ siano funzioni di x, y, z assoggettate alla sola condizione di essere finite e continue in un dato spazio. I miei primi tentativi per applicare alla equazione generale (1) il metodo d'integrazione di Riemann mi fecero credere che soltanto in casi particolari ne fosse possibile la riuscita. Ma la limitazione supposta in effetto non ha luogo e in questa Nota appunto dimostrerò come debba estendersi il metodo di Riemann, per renderlo applicabile alla equazione generale (1). Indico brevemente le circostanze notevoli, che in tale estensione si presentano.

« Se rappresentiamo simbolicamente con $\Omega(u)$ il primo membro della (1), insieme a questa espressione differenziale del 3° ordine, siamo condotti a considerare tre espressioni del 2° ordine

$$\Omega_1(u),\quad \Omega_2(u),\quad \Omega_3(u)$$

[1] Rendiconti del 6 gennaio 1895.

e tre del 1° ordine

$$\Omega_{23}(u), \quad \Omega_{13}(u), \quad \Omega_{12}(u)$$

che si deducono da $\Omega(u)$ nel modo seguente.

« Consideriamo in $\Omega(u)$ l'aggregato dei termini che contengono $\frac{\partial u}{\partial x}$ e le sue derivate; se in questo aggregato sostituiamo a $\frac{\partial u}{\partial x}$ la u stessa, otteniamo appunto $\Omega_1(u)$; così:

$$\Omega_1(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + b\frac{\partial u}{\partial z} + c\frac{\partial u}{\partial y} + \alpha u$$

similmente

$$\Omega_2(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z} + c\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial u}{\partial z} + \beta u$$

$$\Omega_3(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + a\frac{\partial u}{\partial y} + b\frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u.$$

Operando in modo analogo colle derivate seconde, otterremo

$$\Omega_{23}(u) = \frac{\partial u}{\partial x} + au, \quad \Omega_{13}(u) = \frac{\partial u}{\partial y} + bu,$$

$$\Omega_{12}(u) = \frac{\partial u}{\partial z} + cu.$$

« Ciò premesso, chiameremo *soluzione principale relativa al punto* $(x_0\, y_0\, z_0)$ della $\Omega(u) = 0$ quella sua soluzione regolare che è perfettamente definita dalle condizioni seguenti:

« 1ª *di assumere nel punto* $P_0 \equiv (x_0\, y_0\, z_0)$ il valore $u = 1$;

« 2ª *di soddisfare lungo le tre parallele agli assi coordinati, condotte per* P_0, *alle rispettive equazioni di* 1° *ordine*

$$\Omega_{23}(u) = 0, \quad \Omega_{13}(u) = 0, \quad \Omega_{12}(u) = 0.$$

« 3ª *di soddisfare sui tre piani condotti per* P_0 *parallelamente ai piani coordinati alle rispettive equazioni di* 2° *ordine*

$$\Omega_1(u) = 0, \quad \Omega_2(u) = 0, \quad \Omega_3(u) = 0.$$

« Il problema fondamentale da porsi per la integrazione della (1) consiste ora nel ricercarne una soluzione regolare, che sui tre piani coordinati assuma valori arbitrariamente dati. Col metodo delle approssimazioni successive di Picard si dimostra facilmente che la soluzione cercata esiste; su ciò credo inutile insistere nella presente Nota, non essendovi alcuna circostanza nuova da rilevare.

« Mi diffonderò invece sulla estensione enunciata del metodo di Riemann, dimostrando come per calcolare il valore della soluzione cercata in un punto P_0 basterà che della equazione aggiunta della (1):

$$(2)\quad \Phi(v)=\frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2(av)}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2(bv)}{\partial x\,\partial z}-\frac{\partial^2(cv)}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial(\alpha v)}{\partial x}+\frac{\partial(\beta v)}{\partial y}+ \\ +\frac{\partial(\gamma v)}{\partial z}-\delta v=0$$

si sappia determinare la soluzione principale, relativa appunto a P_0. Tale soluzione v si dirà anche il moltiplicatore principale.

§ 1.

« Se v è una soluzione dell'equazione aggiunta (2), si ha identicamente, qualunque sia u:

$$(3)\qquad 3v\Omega(u)=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z},$$

essendo X, Y, Z espressioni lineari omogenee in u e nelle derivate prime e seconde della forma seguente:

$$(4)\qquad \begin{cases} X=v\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}+A\dfrac{\partial u}{\partial y}+B\dfrac{\partial u}{\partial z}+Cu \\ Y=v\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}+B'\dfrac{\partial u}{\partial x}+A'\dfrac{\partial u}{\partial z}+C'u \\ Z=v\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+A''\dfrac{\partial u}{\partial x}+B''\dfrac{\partial u}{\partial y}+C''u. \end{cases}$$

« Basta infatti per ciò che A, B, C; A', B', C'; A'', B'', C'' soddisfino alle sei relazioni:

$$\begin{cases} A'+B''=3av-\dfrac{\partial v}{\partial x},\ A''+B=3bv-\dfrac{\partial v}{\partial y},\ A+B'=3cv-\dfrac{\partial v}{\partial z} \\ C+\dfrac{\partial B'}{\partial y}+\dfrac{\partial A''}{\partial z}=3\alpha v,\ C'+\dfrac{\partial B''}{\partial z}+\dfrac{\partial A}{\partial x}=3\beta v,\ C''+\dfrac{\partial B}{\partial x}+\dfrac{\partial A'}{\partial y}=3\gamma v. \end{cases}$$

« Ora indicando con λ, μ, ν tre funzioni affatto arbitrarie, si soddisfa nel modo più generale alle equazioni precedenti, ponendo

$$A=\frac{1}{2}\left(3cv-\frac{\partial v}{\partial z}\right)+3\lambda,\quad A'=\frac{1}{2}\left(3av-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+3\mu,$$
$$A''=\frac{1}{2}\left(3bv-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+3\nu$$
$$B'=\frac{1}{2}\left(3cv-\frac{\partial v}{\partial z}\right)-3\lambda,\quad B''=\frac{1}{2}\left(3av-\frac{\partial v}{\partial x}\right)-3\mu,$$
$$B=\frac{1}{2}\left(3bv-\frac{\partial v}{\partial y}\right)-3\nu$$

e ricavando dalle seconde di esse i valori di C, C′, C″. Conseguentemente alle espressioni (4) di X, Y, Z potremo dare la forma seguente:

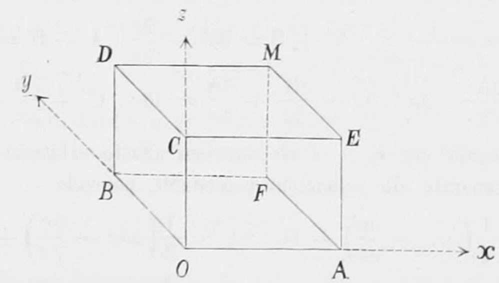
$$
(5)\quad \left\{\begin{aligned}
X &= \frac{\partial^2(uv)}{\partial y\,\partial z} + \frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\left(cv - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial z}\left(bv - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \\
&\quad + 3u\left\{\alpha v - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(cv) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}(bv)\right\} + 3\,\frac{\partial(\lambda u)}{\partial y} - 3\,\frac{\partial(\nu u)}{\partial z} \\
Y &= \frac{\partial^2(uv)}{\partial x\,\partial z} + \frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial z}\left(av - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\left(cv - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \\
&\quad + 3u\left\{\beta v - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}(av) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(cv)\right\} + 3\,\frac{\partial(\mu u)}{\partial z} - 3\,\frac{\partial(\lambda u)}{\partial x} \\
Z &= \frac{\partial^2(uv)}{\partial x\,\partial y} + \frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\left(bv - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\left(av - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \\
&\quad + 3u\left\{\gamma v - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(bv) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(av)\right\} + 3\,\frac{\partial(\nu u)}{\partial z} - 3\,\frac{\partial(\mu u)}{\partial y}\,.
\end{aligned}\right.
$$

§ 2.

Supponiamo ora che si cerchi una soluzione regolare u della $\Omega(u)=0$, la quale sui piani coordinati $x=0$, $y=0$, $z=0$ assuma valori prestabiliti. Di questa soluzione, la cui esistenza è accertata come si è detto dal metodo delle approssimazioni successive, vogliasi calcolare il valore in un punto $M \equiv (x_0, y_0, z_0)$. Conducendo per M i tre piani

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0$$

paralleli ai tre piani coordinati, formeremo il parallelepipedo della figura.



Applichiamo allo spazio racchiuso da questo parallelepipedo la nota formola:

$$\iiint_S \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = -\iint_\Sigma \left\{X \cos \widehat{nx} + Y \cos \widehat{ny} + Z \cos \widehat{nz}\right\} d\sigma.$$

« Se per X, Y, Z sostituiamo le espressioni (5), l'integrale triplo si si annulla e resta quindi

$$\text{(B)}\qquad \iint\limits_{(x=x_0)} \mathrm{X}\,dy\,dz + \iint\limits_{(y=y_0)} \mathrm{Y}\,dx\,dz + \iint\limits_{(z=z_0)} \mathrm{Z}\,dx\,dy = \iint\limits_{(x=0)} \mathrm{X}\,dy\,dz + \iint\limits_{(y=0)} \mathrm{Y}\,dx\,dz + \iint\limits_{(z=0)} \mathrm{Z}\,dx\,dy.$$

« Una volta fissato il moltiplicatore v e le funzioni λ, μ, ν, tutto sarà noto nel secondo membro della (B) per mezzo dei valori assegnati ad u sulle faccie $x=0$, $y=0$, $z=0$. Per calcolare altresì il primo membro, disporremo di v e λ, μ, ν in guisa che per $x=x_0$ l'espressione X si riduca al suo primo termine $\frac{\partial^2(uv)}{\partial y\,\partial z}$ e similmente Y, Z si riducano rispettivamente per $y=y_0$, $z=z_0$ ai loro primi termini $\frac{\partial^2(uv)}{\partial x\,\partial z}$, $\frac{\partial^2(uv)}{\partial x\,\partial y}$.

« Ammessa la possibilità di una tale determinazione, che fra un momento effettueremo, il 1° membro della (B), effettivamente calcolato, è dato da

$$3\,(uv)_{\mathrm{M}} + \left\{ (uv)_{\mathrm{A}} + (uv)_{\mathrm{B}} + (uv)_{\mathrm{C}} \right\} - 2 \left\{ (uv)_{\mathrm{D}} + (uv)_{\mathrm{E}} + (uv)_{\mathrm{F}} \right\},$$

le notazioni $(uv)_{\mathrm{M}}$, $(uv)_{\mathrm{A}}$, $(uv)_{\mathrm{B}}$ ... indicando i valori di uv nei punti rispettivi M, A, B.... La formola (B) si muta quindi nella seguente

$$\text{(6)}\qquad 3\,(uv)_{\mathrm{M}} = 2 \left\{ (uv)_{\mathrm{D}} + (uv)_{\mathrm{E}} + (uv)_{\mathrm{F}} \right\} - \left\{ (uv)_{\mathrm{A}} + (uv)_{\mathrm{B}} + (uv)_{\mathrm{C}} \right\} + \iint\limits_{(x=0)} \mathrm{X}\,dy\,dz + \iint\limits_{(y=0)} \mathrm{Y}\,dx\,dz + \iint\limits_{(z=0)} \mathrm{Z}\,dx\,dy,$$

che contiene già il risultato richiesto.

§ 3.

« Esaminiamo ora se si possono effettivemente assumere il moltiplicatore v e le funzioni λ, μ, ν in guisa da soddisfare sulle rispettive faccie $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ del parallelepipedo alle condizioni sopra enunciate. Dovremo avere per ciò:

$$\text{(7)}\qquad \left.\begin{aligned} &\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - cv\right), \qquad \nu = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} - bv\right) \\ &\frac{\partial \lambda}{\partial y} - \frac{\partial \nu}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}(bv) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(cv) - av \end{aligned}\right\} \textit{sulla faccia } x=x_0$$

$$(7'')\quad \left.\begin{aligned} &\mu = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - av\right), \qquad \lambda = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - cv\right) \\ &\frac{\partial \mu}{\partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(cv) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}(av) - \beta v \end{aligned}\right\}\ \textit{sulla faccia } y = y_0$$

$$(7''')\quad \left.\begin{aligned} &\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} - bv\right), \qquad \mu = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - av\right) \\ &\frac{\partial \nu}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(av) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(bv) - \gamma v \end{aligned}\right\}\ \textit{sulla faccia } z = z_0.$$

Intanto dal confronto dei due valori di λ per $x = x_0$, $y = y_0$ simultaneamente, cioè lungo lo spigolo MF del parallelepipedo, segue che lungo di esso deve essere $\frac{\partial v}{\partial z} - cv = 0$ e così

$$\frac{\partial v}{\partial x} = av \textit{ lungo } \mathrm{MD}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = bv \textit{ lungo } \mathrm{ME}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = cv \textit{ lungo } \mathrm{MF}.$$

Sostituendo poi nella terza della (7) i valori di λ, ν dati dalle prime due, deduciamo che *sulla faccia* $x = x_0$ il moltiplicatore v deve soddisfare alla equazione

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} - c\frac{\partial v}{\partial y} - b\frac{\partial v}{\partial z} + \left(\alpha - \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right)v = 0.$$

Similmente dovrà v soddisfare alle equazioni

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - a\frac{\partial v}{\partial z} - c\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\beta - \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}\right)v = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - b\frac{\partial v}{\partial x} - a\frac{\partial v}{\partial y} + \left(\gamma - \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right)v = 0$$

sulle rispettive faccie $y = y_0$, $z = z_0$.

Disponendo in fine della costante moltiplicativa arbitraria, che le condizioni precedenti lasciano in v, in guisa che sia $v_M = 1$, vediamo che la soluzione v così definita dell'equazione aggiunta è appunto il moltiplicatore principale, relativo al punto M. Basterà dopo ciò scegliere per λ una funzione di x, y, z che sulle faccie $w = x_0$, $y = y_0$ assuma i rispettivi valori dati dalle (7), (7'), restando del resto affatto arbitraria. Similmente disponendo di μ, ν, le condizioni imposte saranno tutte soddisfatte e sarà quindi applicabile la formola (6). Nel secondo membro della (6) compariscono per altro i valori di λ, μ, ν sulle faccie $x=0$, $y=0$, $z=0$, valori che essendo in parte arbitrarii converrà opportunamente eliminare [1].

§ 4.

« Prendiamo dunque a trasformare i tre integrali doppî che figurano nel secondo membro della (6). Abbiamo

$$\iint_{(x=0)} \mathrm{X}\, dy\, dz = \iint_{\mathrm{OCDB}} \frac{\partial^2 (uv)}{\partial y\, \partial z}\, dy\, dz + \frac{3}{2} \iint_{\mathrm{OCDB}} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y}\left(cv - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial u}{\partial z}\left(bv - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + u\left(2av - \frac{\partial}{\partial y}(cv) - \frac{\partial}{\partial z}(bv)\right) \right\} dy\, dz +$$

$$+ 3 \iint_{\mathrm{OCDB}} \frac{\partial(\lambda u)}{\partial y}\, dy\, dz - 3 \iint_{\mathrm{OCDB}} \frac{\partial(\nu u)}{\partial z}\, dy\, dz\,.$$

« Ora osservando che si ha:

$$\iint_{\mathrm{OCDB}} \frac{\partial^2 (uv)}{\partial y\, \partial z}\, dy\, dz = (uv)_{\mathrm{O}} + (uv)_{\mathrm{D}} - (uv)_{\mathrm{B}} - (uv)_{\mathrm{C}}$$

$$\iint_{\mathrm{OCDB}} \frac{\partial(\lambda u)}{\partial y}\, dy\, dz = - \int_{\mathrm{OC}} \lambda u\, dz + \int_{\mathrm{BD}} \lambda u\, dz$$

$$\iint_{\mathrm{OCDB}} \frac{\partial(\nu u)}{\partial z}\, dy\, dz = \int_{\mathrm{OB}} \nu u\, dy - \int_{\mathrm{CD}} \nu u\, dy$$

ed operando nello stesso modo sugli altri due integrali $\iint_{(y=0)} \mathrm{Y} dx\, dz$, $\iint_{(z=0)} \mathrm{Z} dx\, dz$, vediamo che gli integrali estesi agli spigoli OA, OB, OC, nei quali figurerebbero i valori non dati di λ, μ, ν, si distruggono. Se nei rimanenti integrali semplici sostituiamo a λ, μ, ν i loro valori dati sulle faccie $x = x_0$,

[1] Essendo identicamente

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial(\lambda u)}{\partial y} - \frac{\partial(\nu u)}{\partial z}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial(\mu u)}{\partial z} - \frac{\partial(\lambda u)}{\partial x}\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial(\nu u)}{\partial x} - \frac{\partial(\mu u)}{\partial y}\right\} = 0,$$

se si applica la formola (A) si vede a *priori* che i valori di λ, μ, ν nelle faccie $x=0$, $y=0$, $z=0$ non hanno influenza sul secondo membro della (6).

$y = y_0$, $z = z_0$ in funzione del moltiplicatore principale v dalle (7), (7'), (7''), troviamo infine la formola:

$$\text{(B)} \quad u_M = (uv)_O + \{(uv)_D + (uv)_E + (uv)_F\} - \{(uv)_A + (uv)_B + (uv)_C\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\!\!\int_{OCDB} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y}\left(cv - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \frac{\partial u}{\partial z}\left(bv - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + u\left[2\alpha v - \frac{\partial}{\partial y}(cv) - \frac{\partial}{\partial z}(bv)\right]\right\} dy\, dz$$

$$+ \frac{1}{2}\int\!\!\int_{OAEC} \left\{ \frac{\partial u}{\partial z}\left(av - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial x}\left(cv - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + u\left[2\beta v - \frac{\partial}{\partial z}(av) - \frac{\partial}{\partial x}(cv)\right]\right\} dx\, dz$$

$$+ \frac{1}{2}\int\!\!\int_{OBFA} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}\left(bv - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\left(av - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + u\left[2\gamma v - \frac{\partial}{\partial x}(bv) - \frac{\partial}{\partial y}(av)\right]\right\} dx\, dy$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{BD} u\left(cv - \frac{\partial v}{\partial z}\right) dz + \frac{1}{2}\int_{AE} u\left(cv - \frac{\partial v}{\partial z}\right) dz + \frac{1}{2}\int_{CE} u\left(av - \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{BF} u\left(av - \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + \frac{1}{2}\int_{AF} u\left(bv - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy + \frac{1}{2}\int_{CD} u\left(bv - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy\ .$$

« Questa ci esprime appunto, come si voleva, il valore di u in M per mezzo dei valori assegnati sulle faccie $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e per il moltiplicatore che supponiamo già calcolato.

« Alla formola (B) possiamo dare una nuova forma, facendo sparire dagli integrali doppî con integrazioni per parti le derivate della u, otteniamo così la nuova formola:

$$(\mathrm{B}^{\star}) \quad u_M = (uv)_O + \{(uv)_D + (uv)_E + (uv)_F\} - \{(uv)_A + (uv)_B + (uv)_C\} +$$

$$+ \int\!\!\int_{OCDB} u \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial}{\partial y}(cv) - \frac{\partial}{\partial z}(bv) + \alpha v \right\} dy\, dz +$$

$$+ \int\!\!\int_{OAEC} u \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial z} - \frac{\partial}{\partial z}(av) - \frac{\partial}{\partial x}(cv) + \beta v \right\} dx\, dz +$$

$$+ \int\!\!\int_{OBFA} u \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(bv) - \frac{\partial}{\partial y}(av) + \gamma v \right\} dx\, dy +$$

$$+ \int_{BD} u\left(cv - \frac{\partial v}{\partial z}\right) dz + \int_{CE} u\left(av - \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + \int_{AF} u\left(bv - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy +$$

$$+ \int_{AE} u\left(cv - \frac{\partial v}{\partial z}\right) dz + \int_{BF} u\left(av - \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + \int_{CD} u\left(bv - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy -$$

$$- \int_{OA} u\left(av - \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx - \int_{OB} u\left(bv - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy - \int_{OC} u\left(cv - \frac{\partial v}{\partial z}\right) dz\, .$$

« Dall'una o dall'altra di queste formole risulta evidente che se una soluzione regolare u della nostra equazione $\Omega(u) = 0$ si annulla sui tre piani coordinati, è nulla dovunque e ne segue il teorema d'unicità:

« Esiste una sola soluzione regolare della $\Omega(u) = 0$ che sui piani coordinati assume valori prefissati.

§ 5.

« Come nel caso particolare considerato nella mia Nota precedente, e in perfetta analogia col teorema di Darboux [1] per il caso di due variabili, sussiste anche qui per le soluzioni principali di una equazione e della sua aggiunta una sorta di teorema di reciprocità, cioè: Se si considerano due punti qualunque M, M′ dello spazio e con u, v si indicano rispettivamente le soluzioni principali della $\Omega(u) = 0$ e della sua aggiunta $\Phi(v) = 0$, relativa la prima al punto M′ la seconda al punto M, si avrà la relazione

$$u_{\mathrm{M}} = v_{\mathrm{M}'} .$$

« Per la dimostrazione supponiamo semplicemente M′ nell'origine O, talchè lungo gli assi coordinati la u soddisferà alle rispettive equazioni

$$\frac{\partial u}{\partial x} + au = 0 \,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + bu = 0 \,, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + cu = 0$$

e sui piani coordinati alle altre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \, \partial z} + b \frac{\partial u}{\partial z} + c \frac{\partial u}{\partial y} + \alpha u = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial z} + c \frac{\partial u}{\partial z} + a \frac{\partial u}{\partial z} + \beta u = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial y} + b \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u = 0 .$$

« Allora se ricorriamo alla formola (B), facendone questa volta sparire con integrazioni per parti le derivate della v, troviamo facilmente

$$u_{\mathrm{M}} = v_0 .$$

§ 6.

« Non sarà inutile osservare che se in luogo della equazione omogenea $\Omega(u) = 0$ si ha l'altra non omogenea

$$\Omega(u) = \mathrm{F}\,(x\,, y\,, z)\,,$$

essendo F un'assegnata funzione di x, y, z, e si vuole nuovamente integrare

[1] Tome II, pag. 81.

in guisa che la u sui piani coordinati assuma valori dati, i calcoli verranno in ciò solo modificati che si avrà

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 3v\mathrm{F} .$$

« Perciò, onde rendere la formola (B), o la (B*), applicabile al caso attuale, basterà aggiungere al secondo membro l'integrale triplo

$$\int_0^{x_0}\int_0^{y_0}\int_0^{z_0} v\,\mathrm{F}(x\,,y\,,z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

« In particolare la soluzione u di $\Omega(u) = \mathrm{F}$, che si annulla sui piani coordinati è data semplicemente dalla formola

$$u(x_0\,,y_0\,,z_0) = \int_0^{x_0}\int_0^{y_0}\int_0^{z_0} v\,\mathrm{F}(x\,,y\,,z)\,dx\,dy\,dz\,,$$

essendo v il moltiplicatore principale relativo al punto $(x_0\,,y_0\,,z_0)$. Da questa soluzione particolare, si ottiene ogni altra soluzione aggiungendovi una soluzione della equazione omogenea $\Omega(u) = 0$.

§ 7.

« Benchè non possa qui trovar posto la generalizzazione dei risultati ottenuti al caso di n variabili, possiamo indicare fin d'ora in qual modo tale generalizzazione si effettuerà. Essendo u una funzione incognita di n variabili $x_1\,,x_2\,,\ldots x_n$, le equazioni da considerarsi avranno la forma:

$$\Omega(u) = \frac{\partial^n u}{\partial x_1\,\partial x_2 \ldots \partial x_n} + \sum_i a_i \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_1 \ldots \partial x_{i-1}\,\partial x_{i+i} \ldots \partial x_n} + \sum_{i_1 k} a_{ik} \frac{\partial^{n-2}}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} +$$

$$+ \sum_{i_1 k_1 l} a_{ikl} \frac{\partial^{n-3} u}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} + \cdots + a_{12\ldots n}\, u = 0\;,$$

i coefficienti $a_i\,,a_{ik}\,,a_{ikl}\ldots$ essendo funzioni date di $x_1\,,x_2\,,\ldots x_n$ e indicando in generale

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_r}$$

il coefficiente di quella derivata $(n-r)^{ma}$ in cui si deriva una volta rispetto a ciascuna variabile eccetto le r:

$$x_{i_1}\,x_{i_2}\ldots x_{i_r}\,.$$

« Allora per definire la soluzione principale di $\Omega(u) = 0$, relativa per esempio al punto $x_1 = 0\,,x_2 = 0 \ldots x_n = 0$, procederemo nel modo seguente.

« Separiamo da $\Omega(u)$ l'aggregato di quei termini che contengono una determinata derivata r^{ma} p. e.

$$\frac{\partial^r u}{\partial x_{i_1}\,\partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_r}}$$

e le sue derivate e sostituiamo in esso a questa derivata r^{ma} la u stessa. L'espressione differenziale che per tal modo risulta s'indicherà con

$$\Omega_{i_1 i_2 \ldots i_r}$$

e si dirà una *componente* d'ordine $n-r$ di $\Omega(u)$. La soluzione principale di $\Omega(u)=0$ verrà allora definita dalle condizioni seguenti: nel punto $(0,0,0\ldots 0)$ assumerà il valore 1; lungo gli assi coordinati $(x_1)(x_2)\ldots(x_n)$ soddisferà alle rispettive equazioni componenti del 1° ordine

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_1 u=0\,,\ \frac{\partial u}{\partial x_2}+a_2 u=0\ldots\frac{\partial x_n}{\partial u}+a_n u=0\,;$$

sui piani coordinati $(x_i\, x_k)$ soddisferà alle equazioni componenti del 2° ordine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k}+a_i\frac{\partial u}{\partial x_k}+a_k\frac{\partial u}{\partial x_i}+a_{ik}\, u=0\,;$$

sopra gli spazii S_3 coordinati alle equazioni componenti del 3° ordine ecc. e infine sugli iperpiani coordinati S_{n-1} alle equazioni componenti d'ordine $n-1$.

« Il problema di trovare una soluzione u della $\Omega(u)=0$ che su ciascuno degli iperpiani coordinati $x_1=0$, $x_2=0$, $\ldots x_n=0$ si riduca ad una funzione arbitrariamente data delle rimanenti variabili, si risolverà quando della equazione aggiunta alla $\Omega(u)=0$ si sappia determinare la soluzione principale relativa a quel punto, ove si vuole determinare il valore di u.

« Mi riservo di sviluppare in altro lavoro i risultati sommariamente qui indicati, e di proseguire inoltre anche in altro senso la ricerca, in analogia col noto metodo d'integrazione di Laplace pel caso $n=2$.

Osservazione

« Nella Nota del dott. Niccoletti, che presento alla R. Accademia, si vedrà come il metodo di Riemann può estendersi senza difficoltà alcuna ai sistemi di equazioni del 2° ordine a due variabili della forma

$$[i=1,2,3\therefore n]\ \frac{\partial^2 z_i}{\partial x\, \partial y}=\sum_r\left(a_{ir}\frac{\partial z_r}{\partial x}+b_{ir}\frac{\partial z_r}{\partial y}+c_{ir}\, z_r\right).$$

« Non sarà inutile osservare come lo stesso possa ripetersi dei sistemi analoghi di grado superiore e così dei sistemi di 3° ordine:

$$[i=1\,2,3\ldots n]\ \frac{\partial^3 u_i}{\partial x\, \partial y}+$$
$$\sum_k\Big\{a_{ik}\frac{\partial^2 u_k}{\partial y\, \partial z}+b_{ik}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x\, \partial z}+c_{ik}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x\, \partial y}+\alpha_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial x}+\beta_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial y}+\gamma_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial z}+$$
$$+\delta_{ik}u\Big\}=F_i(x,y,z)\text{ ».}$$