ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCII.

1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IV.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

14. *Timol.*

N. d'ord.	concentr.	abbass. termom.	coeffic. abbassam.	abbassam. molecolare.
136	0,369	0,20	0,542	92,68
137	3,402	1,76	0,517	88,46
138	5,128	2,55	0,497	85,03
139	7,527	3,51	0,466	79,74
140	9,933	4,38	0,441	75,399
141	13,057	5,48	0,419	71,768

" Da una semplice ispezione delle tavole che precedono si vede subito che il bromotoluene si comporta in modo analogo agli idrocarburi ed ai loro prodotti di sostituzione alogenici o nitrici (benzina, p. xilene, bromuro di etilene, bromoformio, nitrobenzina). Si ottengono cioè risultati normali con le sostanze neutre in generale e con gli alcaloidi, circa metà dei normali per gli acidi; in quanto agli alcooli ed i fenoli si hanno risultati normali o prossimi ai normali in soluzioni molto diluite, i quali col crescere della concentrazione si allontanano sempre più ed in modo rapidissimo per gli alcooli, meno rapido pei fenoli.

" In quanto al numero da scegliere per costante dell' abbassamento molecolare, risulta quanto segue dalle esperienze indicate.

Per la benzina	le esp. n°	1 a 5	danno in media	79,22
" toluene	"	" 14 a 17	" " "	84,16
Per il bromuro di etilene	"	" 25 a 28	" " "	83,47
Per l'ossalato di etile	"	" 46 a 50	" " "	79,91
Per il veratrol	"	" 54 a 59	" " "	82,03
" tiofene	"	" 68 a 71	" " "	83,93
Per l' anilina	"	" 77 a 80	" " "	81,99

Media generale 82,10.

" Numero che può dirsi coincidente con quello calcolato con la formola di van't Hoff.

" Il bromotoluene per le sue estese proprietà solventi, per la facilità di averlo puro e conservarlo lungamente inalterato e più di tutto perchè non presenta fenomeni di surfusione, è uno dei solventi più raccomandabili per le determinazioni crioscopiche ".

Matematica. — *Sulle soluzioni coniugate nelle equazioni lineari differenziali e alle differenze.* Nota del Corrispondente S. Pincherle.

" Nello studio delle equazioni differenziali lineari si sono presentati sistemi di r integrali tali che se φ denota uno di essi, gli altri sono $x\varphi$, $x^2\varphi, \ldots x^{r-1}\varphi$. Questi integrali, chiamati con espressione forse non molto felice « soluzioni coniugate » dell'equazione, sono stati considerati dal Brassine [1] e dal Floquet [2]: essi sono per un'equazione differenziale lineare l'analogo di ciò che è una radice dell'ordine r di multiplicità per un'equazione algebrica, e la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un tale sistema di soluzioni è stato dato dal Brassine nei seguenti termini. Sia

$$F = \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + a_n(x)$$

la forma differenziale lineare che, uguagliata a zero, dà l'equazione che si considera. Si moltiplichi ogni termine della forma per l'indice di derivazione e si diminuisca quest'indice di un'unità: si ottiene la forma, già considerata dal D'Alembert:

$$F' = n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + (n-1)\,a_1(x)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}(x)\,,$$

chiamata dal Brassine *prima coniugata* della forma data: applicando da capo la medesima regola, si ottengono le forme F'', F''', ... seconda, terza, ... coniugate della data. Or bene, condizione necessaria e sufficiente affinchè la $F = 0$ abbia il sistema di soluzioni coniugate $\varphi, x\varphi, \ldots x^{r-1}\varphi$, è che φ ha soluzione di $F = 0$, $F' = 0$, $F'' = 0$, ... fino ad $F^{(r-1)} = 0$.

« Una questione analoga è stata studiata per le equazioni lineari alle differenze finite, in una Nota interessante recentissimamente pubblicata dal prof. Torelli [3]. Egli ha chiamate « soluzioni coniugate » di una equazione lineare alle differenze r soluzioni tali che denotando con $\varphi(x)$ una di esse, le altre siano date da $x\varphi$, $x(x+1)\varphi$, ... $x(x+1)\ldots(x+r-1)\varphi$; ha designato col nome di « forma prima derivata » della forma lineare alle differenze

$$F = f(x+n) + a_1(x)f(x+n-1) + \cdots + a_n(x)f(x)$$

la F' ottenuta moltiplicando ogni termine per l'indice aggiunto ad x e diminuendo questo indice di un'unità, talchè

$$F' = nf(x+n-1) + (n-1)\,a_1(x)f(x+n-2) + \cdots + a_{n-1}(x)f(x);$$

così, applicando reiteratamente la medesima regola, si hanno le forme F'', F''', ... o seconda, terza, ... derivata della forma data. Egli ha trovato che la condizione necessaria e sufficiente affinchè la F abbia il sistema di soluzioni coniugate $\varphi, x\varphi, \ldots x(x+1)\ldots(x+r-1)\varphi$ è che essendo φ soluzione di $F = 0$, $\varphi(x+1)$ lo sia di $F' = 0$, $\varphi(x+2)$ di $F'' = 0$, ... fino a $\varphi(x+r-1)$ che deve soddisfare $F^{(r-1)} = 0$.

(1) Nota III al *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* di Sturm, 3ème édit. Paris, 1868.
(2) Annales de l'École Normale supérieure, S. II, T. VIII, 1879.
(3) Rendiconti della R. Accademia di Napoli, 13 luglio 1895.

« Ora in queste poche righe mi propongo di mostrare con quanta semplicità le proposizioni precedenti si possono ottenere ricorrendo al calcolo generale delle operazioni funzionali distributive, di cui ho recentemente esposto i primi principî in una Nota pubblicata in questi medesimi Rendiconti [1]. Sia, a tale uopo, A una operazione distributiva qualunque ed $A(\varphi)$ il risultato che si ottiene applicandola alla funzione φ, e si consideri l'equazione $A = 0$. Diremo che un sistema di r soluzioni di questa equazione forma un sistema di « soluzioni coniugate », quando le dette soluzioni sono proporzionali ad r funzioni razionali intere di grado non superiore ad $r-1$ e delle quali il determinante dei coefficienti sia differente da zero. Il nome di « soluzioni coniugate » si dà solo per uniformarsi alla denominazione usata nei casi precedentemente ricordati. Siano dunque queste soluzioni

$$\varphi_i = (a_{i1} + a_{i2}x + a_{i3}x^2 + \cdots + a_{ir}x^{r-1})\,\psi \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots r), \tag{1}$$

in cui il determinante

$$D = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \ldots a_{rr}$$

è differente da zero. Moltiplicando le $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_r$ rispettivamente per i quozienti degli elementi reciproci di $a_{1h}, a_{2h}, \ldots a_{rh}$ divisi per D, si avrà, detti $\alpha_{1h}, \alpha_{2h}, \ldots \alpha_{rh}$ questi quozienti:

$$\alpha_{1h}\,\varphi_1 + \alpha_{2h}\,\varphi_2 + \cdots \alpha_{rh}\,\varphi_r = x^{h-1}\,\psi \qquad (h = 1, 2, \ldots r),$$

che saranno altrettante soluzioni della medesima equazione $A = 0$, come è evidente; onde se esiste un sistema di r soluzioni coniugate per l'equazione $A = 0$, esiste anche un sistema di r soluzioni della forma $\psi, x\psi, x^2\psi, \ldots x^{r-1}\psi$, come pure della forma $\psi, x\psi, x(x+1)\psi, \ldots$, cosicchè la definizione nostra racchiude quelle dei due autori ripetutamente citati, nei casi da essi rispettivamente considerati.

« È facile ora di dare una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un tale sistema di soluzioni. Nel lavoro citato [2] ho chiamata *derivata funzionale* di un'operazione distributiva $A(\varphi)$ la nuova operazione

$$A'(\varphi) = A(x\varphi) - xA(\varphi),$$

ed in modo analogo si sono definite le derivate seconda, terza, ... A'', A''', ... Esse danno luogo alle identità

$$\left\{\begin{array}{ll} A(x\varphi) & = A'(\varphi) + xA(\varphi) \\ A(x^2\varphi) & = A''(\varphi) + 2xA'(\varphi) + x^2A(\varphi) \\ \ldots & \ldots \\ A(x^{r-1}\varphi) & = A^{(r-1)}(\varphi) + (r-1)\,xA^{(r-2)}(\varphi) + \cdots + x^{r-1}A(\varphi) \end{array}\right. \tag{2}$$

[1] *Sulle operazioni funzionali distributive.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 17 febbraio 1895.

[2] *Sulle operazioni funzionali distributive*, § 7.

Se dunque è $A(\varphi) = 0$, $A'(\varphi) = 0, \ldots A^{(r-1)}(\varphi) = 0$ per una medesima funzione $\varphi = \psi$, sarà anche $A(\psi) = A(x\psi) = \cdots A(x^{r-1}\psi) = 0$, ed esiste un sistema di soluzioni coniugate: reciprocamente se esiste un tale sistema e quindi una funzione ψ tale che sia $A(\psi) = A(x\psi) = \cdots = A(x^{r-1}\psi) = 0$, dalla forma delle (2) si conclude che deve essere $A'(\psi) = A''(\psi) = \cdots A^{(r-1)}(\psi) = 0$. Talchè:

« Condizione necessaria e sufficiente affinchè un'operazione distributiva A « si annulli per un sistema coniugato di r soluzioni, è che esista una fun- « zione che annulli A e le sue $r-1$ prime derivate funzionali ».

« Come casi particolari si deducono immediatamente le proposizioni del Brassine e del Torelli. Si ammetta dapprima che A sia una forma differenziale lineare, e si ricordi (¹) che la derivata funzionale dell'operazione $\dfrac{d^n}{dx^n}$ o D^n è nD^{n-1}, e si ha senz'altro la proposizione del Brassine. Si supponga poi che A sia una forma lineare alle differenze

$$F = f(x+n) + a_1(x) f(x+n-1) + \cdots a_{n-1}(x) f(x+1) + a_n(x) f(x)$$

o simbolicamente

$$\theta^n + a_1(x)\theta^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)\theta + a_n(x),$$

e si ricordi che la derivata funzionale di θ^h è $h\theta^h$ (²), e si avrà che se la F ammette r soluzioni coniugate (che è indifferente di prendere nella forma $\varphi, x\varphi, x(x+1)\varphi, \ldots$ data dal Torelli) φ annullerà la F e le derivate funzionali

$$F' = n\theta^n + a_1(x)(n-1)\theta^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)\theta,$$
$$F'' = n^2\theta^n + a_1(x)(n-1)^2\theta^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)\theta,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Per dare a questa condizione la forma stessa che vi dà il prof. Torelli, osserviamo che se $F'(\varphi(x)) = 0$, la forma

$$n\theta^{n-1} + a_1(x)(n-1)\theta^{n-2} + \cdots + a_{n-1}(x)$$

sarà annullata per $\varphi(x+1)$: ma questa è annullata anche per $x\varphi(x+1)$ per ipotesi, onde sarà nulla per $\varphi(x+1)$ anche la sua derivata funzionale, vale a dire

$$n(n-1)\theta^{n-1} + a_1(x)(n-1)(n-2)\theta^{n-2} + \cdots + a_{n-2}(x)\theta$$

e quindi

$$n(n-1)\theta^{n-2} + a_1(x)(n-1)(n-2)\theta^{n-3} + \cdots + a_{n-2}(x)$$

(¹) Ibid. § 9 *c*.
(²) Ibid. § 9 *d*.

sarà nulla per $\varphi(x+2)$, ecc.: con ciò si ha precisamente il teorema del prof. Torelli ricordato in principio.

« Sotto la forma generale che abbiamo data al problema, è dunque risoluta la questione dei sistemi coniugati di soluzioni per operazioni distributive di qualunque natura, e quindi in particolare anche per equazioni lineari differenziali od alle differenze ad infiniti termini ».

Matematica. — *Sulla teoria degli iperspazi.* Nota del prof. GREGORIO RICCI, presentata dal Socio CREMONA.

« 1. Si abbia una forma fondamentale ad n variabili

$$\varphi = \Sigma_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ siano gli elementi di un sistema semplice covariante, pel quale valga la identità

(1) $$\Sigma_r\, \lambda^{(r)}\, \lambda_r = 1\,.$$

« Le equazioni

(2) $$\lambda^{(r)} = \frac{dx_r}{\sqrt{\varphi}}\,,$$

in cui con $\sqrt{\varphi}$ designerò il valore assoluto di questo radicale, rappresenteranno una congruenza di linee tracciate nella varietà φ (1) e determinate per ogni punto anche quanto alla loro direzione positiva; e reciprocamente ogni congruenza di linee così determinata potrà considerarsi come rappresentata da un sistema di equazioni (2), i cui primi membri $\lambda^{(r)}$ siano funzioni date delle variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$ legate fra loro dalla relazione (1). Chiamo il sistema $\lambda^{(r)}$ (rispettivamente λ_r) *sistema coordinato controvariante (covariante)* della congruenza di linee rappresentata dalle equazioni (2).

« Indico con $\lambda_{1/r}, \lambda_{2/r}, \ldots \lambda_{n/r}$ i sistemi coordinati covarianti di n congruenze di linee ortogonali fra di loro due a due o, come dirò, costituenti un sistema ortogonale nella varietà φ. Si avranno le identità

(3) $$\Sigma_r\, \lambda_h^{(r)}\, \lambda_{k/r} = \varepsilon_{hk} \quad (h\,, k = 1\,, 2\,, \ldots n)$$

il simbolo ε_{hk} rappresentando lo 0 o l'unità, secondo che gli indici h e k sono distinti o coincidono. Ad esse equivalgono le

(3′) $$\Sigma_h\, \lambda_{h/r}\, \lambda_{h/s} = a_{rs}$$

(1) Chiamo così brevemente la varietà ad n dimensioni, il cui elemento lineare è espresso da $\sqrt{\varphi}$.