

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
ANNO CCXCII.
1895

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IV.

2° SEMESTRE



ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1895

sarà nulla per $g(x+2)$, ecc.: con ciò si ha precisamente il teorema del prof. Torelli ricordato in principio.

« Sotto la forma generale che abbiamo data al problema, è dunque risolta la questione dei sistemi coniugati di soluzioni per operazioni distributive di qualunque natura, e quindi in particolare anche per equazioni lineari differenziali od alle differenze ad infiniti termini ».

Matematica. — *Sulla teoria degli iperspazi.* Nota del prof. GREGORIO RICCI, presentata dal Socio CREMONA.

• 1. Si abbia una forma fondamentale ad n variabili

$$g = \sum_{s,s} a_{rs} dx_r dx_s,$$

e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ siano gli elementi di un sistema semplice covariante, pel quale valga la identità

$$(1) \quad \sum_r \lambda^{(r)} \lambda_r = 1.$$

• Le equazioni

$$(2) \quad \lambda^{(r)} = \frac{dx_r}{\sqrt{g}},$$

in cui con \sqrt{g} designerò il valore assoluto di questo radicale, rappresenteranno una congruenza di linee tracciate nella varietà g ⁽¹⁾ e determinate per ogni punto anche quanto alla loro direzione positiva; e reciprocamente ogni congruenza di linee così determinata potrà considerarsi come rappresentata da un sistema di equazioni (2), i cui primi membri $\lambda^{(r)}$ siano funzioni date delle variabili x_1, x_2, \dots, x_n legate fra loro dalla relazione (1). Chiamo il sistema $\lambda^{(r)}$ (rispettivamente λ_r) *sistema coordinato controvariante (covariante)* della congruenza di linee rappresentata dalle equazioni (2).

• Indico con $\lambda_{1/r}, \lambda_{2/r}, \dots, \lambda_{n/r}$ i sistemi coordinati covarianti di n congruenze di linee ortogonali fra di loro due a due o, come dirò, costituenti un sistema ortogonale nella varietà g . Si avranno le identità

$$(3) \quad \sum_r \lambda_h^{(r)} \lambda_{k/r} = \epsilon_{hk} \quad (h, k = 1, 2, \dots, n)$$

il simbolo ϵ_{hk} rappresentando lo 0 o l'unità, secondo che gli indici h e k sono distinti o coincidono. Ad esse equivalgono le

$$(3') \quad \sum_h \lambda_{h/r} \lambda_{h/s} = a_{rs}$$

(1) Chiamo così brevemente la varietà ad n dimensioni, il cui elemento lineare è espresso da \sqrt{g} .

« 2. Dalle (3) per derivazione covariante secondo la forma fondamentale \mathfrak{g} si traggono le

$$(4) \quad \sum_r \lambda_h^{(r)} \lambda_{k/rs} + \sum_r \lambda_k^{(r)} \lambda_{h/rs} = 0.$$

« Posto

$$(5) \quad \lambda_{h/rs} = \sum_{ij} \gamma_{hij} \lambda_{i/r} \lambda_{j/s},$$

abbiamo quindi le

$$(6) \quad \gamma_{hjk} + \gamma_{khj} = 0$$

e in particolare le

$$(6') \quad \gamma_{hhj} = 0.$$

« Dalle (5) risulta che i coefficienti γ_{hij} sono invarianti e dalle (6) che essi sono in numero $\frac{n^2(n-1)}{2}$ essenzialmente distinti.

« Gli invarianti γ_{hij} sono legati fra loro e coi sistemi coordinati delle n congruenze ortogonali qui considerate, dalle equazioni differenziali

$$(7) \quad \frac{d\gamma_{hik}}{ds_l} - \frac{d\gamma_{hil}}{ds_k} + \sum_j \gamma_{nij} (\gamma_{jhl} - \gamma_{jlk}) + \sum_j (\gamma_{jhl} \gamma_{jik} - \gamma_{jhk} \gamma_{jil}) = \\ = \sum_{qrst} \lambda_h^{(q)} \lambda_i^{(r)} \lambda_k^{(s)} \lambda_l^{(t)} a_{qr, st},$$

in cui con ds_l si rappresenta l'elemento d'arco delle linee della congruenza, che ha il sistema $\lambda_{l/r}$ come sistema coordinato covariante, o, come dirò brevemente, della congruenza $\lambda_{l/r}$. — Queste equazioni si stabiliscono derivando anche le (5) covariantemente secondo \mathfrak{g} e facendo uso delle relazioni note tra le $\lambda_{h/rst}$ e le $\lambda_{h/rts}$. — Nel caso di $n=2$ le (7) si riducono ad una sola; e precisamente alla formola, che dà in coordinate ortogonali la nota espressione di Liouville per la curvatura delle superficie, di cui $\sqrt{\mathfrak{g}}$ rappresenta l'elemento lineare.

« 3. Si supponga la varietà \mathfrak{g} immersa in una varietà ad $n+m$ dimensioni, i cui punti, almeno in un intorno C di \mathfrak{g} , possano determinarsi mediante le coordinate x_1, x_2, \dots, x_n di \mathfrak{g} e mediante altre m coordinate $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$. Il quadrato dell'elemento lineare di C avrà una espressione della forma

$$\psi = \sum_{rs}^{n+m} a_{rs} dx_r dx_s,$$

i coefficienti a_{rs} nei punti di \mathfrak{g} e per r ed s non maggiori di n , essendo gli stessi, che appaiono nella espressione di \mathfrak{g} . Se poi si considera in \mathfrak{g} un sistema S ortogonale di congruenze $\lambda_1^{(r)} \lambda_2^{(r)} \dots \lambda_n^{(r)}$ e si fanno le posizioni

$$u_h^{(r)} = \lambda_h^{(r)} \quad (h = 1, 2, \dots, n; r = 1, 2, \dots, n)$$

$$u_h^{(n+r)} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n; r = 1, 2, \dots, m)$$

i sistemi $\mu_h^{(1)}, \mu_h^{(2)}, \dots, \mu_h^{(n+m)}$ rappresenteranno n congruenze di linee ortogonali fra di loro due a due in C , e tali di più che nei punti della varietà \mathcal{G} le loro linee coincidono con quelle del sistema S . Se ad esse, come è sempre possibile, si aggiungono altre m congruenze $\mu_{n+1}^{(r)}, \mu_{n+2}^{(r)}, \dots, \mu_{n+m}^{(r)}$ ortogonali fra di loro ed alle precedenti si ottiene un sistema di $n+m$ congruenze ortogonali nella varietà C ad $n+m$ dimensioni, e questo sistema è tale che dalle posizioni

$$\mu_{hirs} = \sum_{ij}^{n+m} \gamma'_{hij} \mu_{i/r} \mu_{j/s},$$

analoghe alle (5) risultano le identità

$$\gamma'_{hij} = \gamma_{hij},$$

tutte le volte che nessuno degli indici h, i, j è maggiore di n . Ne segue che

- Gli invarianti γ_{hij} non cambiano valore anche se in vece della forma \mathcal{G}
- si considera come forma fondamentale la espressione ψ del quadrato dell'elemento lineare di una varietà ad $n+m$ dimensioni, in cui la varietà \mathcal{G}
- si trovi immersa •.

• Poichè una varietà qualunque può sempre riguardarsi come immersa in uno spazio piano, il teorema precedente conduce ad una interpretazione geometrica assai semplice ed importante per gli invarianti γ_{hki} . Sia la varietà \mathcal{G} immersa in uno spazio piano S e, scelto ad arbitrio un punto P di \mathcal{G} , si designi con T_{hkl} il triedro delle tangenti in P alle linee delle congruenze $\lambda_{h/r}, \lambda_{k/r}, \lambda_{l/r}$; con i uno qualunque degli indici h, k, l . — L'invariante γ_{hki} rappresenta la componente secondo la tangente alla linea $\lambda_{h/r}$, che passa per P , della rotazione subita dal triedro T_{hkl} per uno spostamento infinitesimo del suo vertice lungo la linea $\lambda_{i/r}$. — In particolare se i coincide con h , si ha che l'invariante γ_{lkh} rappresenta la curvatura della proiezione della linea $\lambda_{k/r}$ sul piano determinato dalle tangenti alla linea stessa ed alla linea $\lambda_{l/r}$ sempre che la direzione positiva di quest'ultima si faccia coincidere con quella della normale positiva alla prima.

• 4. Dirò ora dei risultati ottenuti applicando le teorie precedentemente esposte alla risoluzione di speciali problemi.

1.° Si vogliono stabilire le condizioni necessarie e sufficienti perchè le linee di una congruenza definita nella varietà \mathcal{G} mediante il suo sistema coordinato λ_r risultino ortogonali alle varietà ad $n-1$ dimensioni di un sistema qualunque; analiticamente, perchè gli elementi λ_r siano proporzionali alle derivate di una funzione delle variabili x_1, x_2, \dots, x_n . Se per uniformità colle notazioni usate nei §§ precedenti si pongono le $\lambda_r = \lambda_{n/r}$ e con $\lambda_{1/r}, \lambda_{2/r}, \dots, \lambda_{n-1/r}$ si denotano gli elementi dei sistemi coordinati covarianti di $n-1$

congruenze di linee formanti colla data un sistema ortogonale, le condizioni cercate sono rappresentate dalle equazioni

$$\gamma_{nhh} = \gamma_{nhh}.$$

« Il teorema del § precedente dà poi la interpretazione geometrica di queste condizioni.

2°. Si ricerchino le condizioni necessarie e sufficienti perchè le linee della congruenza considerata sopra siano geodetiche. Perciò lungo le linee di questa si considerino le variabili x_r come funzioni della sola variabile indipendente t e si facciano le posizioni

$$x_r' = \frac{dx_r}{dt}, \quad s' = \frac{ds}{dt},$$

rappresentando con s l'arco delle linee λ_r . Le (2) assumeranno la forma

$$x_r' = s' \lambda^{(r)}$$

e, indicando con $a_{rs,t}$ i noti simboli di Christoffel a tre indici, avremo

$$s' \delta s' = \sum_{rs} a_{rs} x_r' \delta x_s' + \sum_{rst} a_{rs,t} x_r' x_s' \delta x_t,$$

ovvero

$$\delta s' = \sum_r \lambda_r \delta x_r' + s' \sum_r \delta x_r \sum_{st} a_{rt,s} \lambda^{(s)} \lambda^{(t)}.$$

« Posto

$$s = \int_{t_0}^{t_1} s' dt,$$

avremo quindi anche facilmente le

$$\delta s = - \int_{t_0}^{t_1} ds \sum_r \delta x_r \sum_s \lambda^{(s)} \lambda_{rs}.$$

Dunque le condizioni cercate sono espresse dalle equazioni

$$\sum_s \lambda^{(s)} \lambda_{rs} = 0,$$

le quali per le (5) assumono la forma

$$\gamma_{inn} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

« Si supponga ora che le linee della congruenza λ_r non siano geodetiche, si ponga

$$\gamma^2 = \sum_i \gamma_{inn}^2,$$

assumendo per γ il valore positivo, che soddisfa a questa equazione; e di più

$$\gamma \lambda_r' = \sum_i \gamma_{inn} \lambda_{i,r}.$$

È facile riconoscere che le λ_r' sono gli elementi del sistema coordinato covariante di una congruenza di linee ortogonali a quelle della congruenza λ_r . Per un punto qualunque P della varietà g si consideri il vettore di grandezza γ e la cui direzione coincide con quella della linea λ_r' passante per quel punto; e lo si chiami *curvatura geodetica* della linea λ_r passante per P. Si avrà:

a) Che l'annullarsi identicamente della curvatura geodetica di una congruenza di linee, dà la condizione necessaria e sufficiente perchè queste linee siano geodetiche.

b) Che per una congruenza di linee non geodetiche la curvatura geodetica di una linea in un determinato punto è rappresentata da un vettore normale alla linea in quel punto.

c) Che la proiezione della curvatura geodetica sopra una direzione qualunque r normale alla linea dà la flessione della proiezione di questa sul piano formato dalla linea considerata e dalla direzione r .

* Per precisare il senso di questi due ultimi enunciati conviene riguardare, come è sempre permesso, la varietà g come immersa in una varietà piana.

3.° *Equazioni fondamentali della Geometria differenziale negli iperspazi.* Ho dimostrato altrove che, data una forma fondamentale g ad n variabili, perchè questa rappresenti il quadrato dell'elemento lineare di una superficie ad n dimensioni, cioè di una varietà immersa in uno spazio piano ad $n+1$ dimensioni, è necessario e basta che si possa determinare un sistema doppio simmetrico, i cui elementi b_{rs} soddisfacciano alle equazioni algebriche

$$(g) \quad b_{rt} b_{su} - b_{ru} b_{ts} = a_{rs, tu}$$

ed alle equazioni a derivate parziali

$$(c) \quad b_{rst} = b_{rtc}.$$

Per $n=2$ le formole (g) e (c) danno rispettivamente il teorema di Gauss e le formole di Codazzi (1). Per n qualunque si perviene collo stesso metodo a formole, che sono da riguardare come la generalizzazione di quelle, e come fondamentali per la teoria delle superficie negli iperspazi.

* Per ciò nella varietà proposta g si consideri un sistema di congruenze ortogonali $\lambda_{1/r}, \lambda_{2/r}, \dots, \lambda_{n/r}$ e, come è permesso, si determinino $\frac{n(n+1)}{2}$ quantità $\omega_{hk} = \omega_{kh}$ mediante le posizioni

$$(\beta) \quad b_{rs} = \sum_{hk} \omega_{hk} \lambda_{h/r} \lambda_{k/s}.$$

(1) Vedasi il capitolo I della mia Memoria *Sulla teoria intrinseca delle superficie ed in specie di quelle di 2.° grado.* (Atti del R. Istituto Veneto di scienze lettere ed arti, serie VII, tomo VI).

Le (g) si trasformano senz'altro nelle

$$(g') \quad \omega_{hk} \omega_{ij} - \omega_{hj} \omega_{ik} = \sum_{rstu} a_{rstu} \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} \lambda_i^{(t)} \lambda_j^{(u)}.$$

Derivando poi le (β) covariantemente secondo g le (c) alla loro volta, tenuto conto delle (5), si trasformano nelle

$$(c') \quad \frac{d\omega_{hl}}{ds_j} - \frac{d\omega_{hj}}{ds_l} = \sum_k \{ \omega_{hk} (\gamma_{hjl} - \gamma_{hlj}) + \omega_{jk} \gamma_{hkl} - \omega_{lk} \gamma_{hkl} \}.$$

Le (g') e (c') sono dunque rispettivamente le formole di Gauss e di Codazzi generalizzate.

« Ci sono già noti i significati dei coefficienti γ_{hkl} e sarebbe facile riconoscere che le ω_{hkl} sono da riguardarsi come *curvature normali*, e per $h < l$ le ω_{hl} cambiate di segno come *torsioni geodetiche*.

« Combinando le (g') colle formole (7) del § 1 si perviene alle

$$(g'') \quad \omega_{hk} \omega_{ij} - \omega_{hj} \omega_{ik} = \frac{d\gamma_{hki}}{ds_j} - \frac{d\gamma_{hkj}}{ds_i} + \sum_l \gamma_{hkl} (\gamma_{li} - \gamma_{lj}) + \sum_l (\gamma_{lhj} \gamma_{lki} - \gamma_{lki} \gamma_{lhj}).$$

« 5. Dal § precedente segue che se le n congruenze del sistema ortogonale risultano come intersezioni di n sistemi di varietà ad $n - 1$ dimensioni ortogonali fra di loro due a due, assieme alle (6) del § 1 si hanno le

$$\gamma_{hkl} = \gamma_{ljk},$$

quando gli indici h, k, j siano tutti distinti fra di loro. Queste poi combinate colle (b) ci danno per questo caso le $\gamma_{hkl} = 0$.

« Nella ipotesi qui ammessa i risultati esposti si semplificano assai. In particolare le formole (c') e (g'') coincidono con quelle già date dal prof. Cesàro, le quali valgono appunto nel caso qui considerato, come risulta implicitamente dalle considerazioni, da cui egli è partito per stabilirle ».

Fisica. — *Sopra la corrispondenza polare fra coniche involuppo e coniche luogo stabilita da una quartica piana.* Nota di E. CIANI, presentata dal Corrispondente BERTINI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulle leggi di propagazione della luce nei cristalli magnetici.* Nota di ALFONSO SELLA, presentata dal Socio BLASERNA.

« Nella teoria elettromagnetica della luce si suppone per giungere alle leggi di Fresnel che le costanti di permeabilità magnetica sieno eguali in tutte le direzioni. Questa ipotesi appare giustificata solo sino ad un certo punto, e ad ogni modo spetta alla esperienza il decidere in proposito. Perciò sarebbe interessante di ricercare con misure molto precise se nei cristalli