ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME V.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

Geodesia. — *Sopra un punto della teoria di Laplace relativa alla figura di equilibrio di una massa fluida rotante.* Nota di PAOLO PIZZETTI, presentata dal Socio BELTRAMI.

1. Consideriamo una massa animata da un moto di rotazione uniforme attorno ad un asse, e terminata da una superficie poco diversa da una sfera. Laplace ha dimostrato (*Méc. cél.*, livre III^e) che la superficie esteriore di una tal massa, supposta in equilibrio relativo deve, in un determinato ordine di approssimazione, essere quella di un ellissoide di rotazione in uno di questi casi:

1° che la massa sia omogenea, e sia o tutta fluida o fluida soltanto in superficie,

2° che la massa sia fluida e non omogenea, in guisa che la densità diminuisca in modo continuo dal centro alla superficie e che le superficie di egual densità siano poco diverse da sfere concentriche.

Nei calcoli di Laplace, vengono considerati come termini piccoli quelli che contengono a fattori gli scostamenti fra la superficie e la sfera, ovvero il quadrato della velocità angolare, e sono trascurati, rispetto a questi, i termini piccoli del 2° ordine almeno.

Pel 1° caso, ossia per la massa omogenea, si hanno, oltre le due dimostrazioni di Laplace, una dimostrazione di Liouville e un'altra di Poisson, le quali nulla lasciano a desiderare. Ma pel 2° caso, ossia per la massa fluida eterogenea, l'unica dimostrazione data da Laplace si fonda sull'uso delle funzioni sferiche ed è soggetta alla seguente gravissima obbiezione: la funzione potenziale dell'attrazione esercitata dalla massa sopra un punto interno M viene espressa da Laplace come somma di due sviluppi per funzioni sferiche; uno di questi procede secondo le potenze negative del raggio vettore r di M e serve ad esprimere la f. p. di quella porzione di massa, che è interna alla superficie S di equilibrio passante per M; l'altro sviluppo, procedente secondo le potenze positive di r, esprime la f. p. della restante porzione della massa. Affinchè il primo di questi sviluppi fosse legittimo, sarebbe evidentemente necessario che r fosse *non minore* dei raggi vettori dei varî punti della S; e *non maggiore* di tali raggi vettori dovrebbe essere r perchè fosse legittimo l'uso del secondo sviluppo. Queste condizioni non sono evidentemente verificate [1].

[1] Obbiezioni di tal sorta agli sviluppi di Laplace si trovano p. es. in Helmert, *Höhere Geodäsie*, Bd. 2, s. 135, e in Tisserand, *Mécanique céleste*, t^e. II^e, p. 317.

Siccome, per quanto sappiamo, nessun'altra dimostrazione è stata sostituita a quella di Laplace, così è interessante, e ci proponiamo di farlo qui, di tentare una parziale modificazione dei calcoli di Laplace, in guisa da evitare la ora detta obbiezione.

1. Indichiamo con r il raggio vettore di un punto qualsiasi M rispetto ad una origine collocata sull'asse t di rotazione, μ sia il coseno dell'angolo che r fa coll'asse stesso, ψ l'angolo che il piano rt fa con un piano fisso passante per t. Sia poi V la funzione potenziale dell'attrazione di tutta la massa sul punto M, ω la velocità angolare, e si indichi con W il valore che assume nel punto M la somma

$$(1) \qquad f\mathrm{V} + \frac{1}{2}\,\omega^2\,(1-\mu^2)\,r^2.$$

Le superficie d'equilibrio saranno rappresentate dall'equazione

$$\mathrm{W} = \text{costante}$$

e la densità ϱ dovrà, per l'equilibrio della massa fluida, essere funzione di W soltanto. Assumiamo come variabile ausiliaria la quantità a funzione della sola W e legata a questa dall'equazione

$$(2) \qquad \mathrm{W} = \frac{4\pi f}{a}\int_0^a \varrho\,.\,a^2\,.\,da + 4\pi f\int_a^{\mathrm{A}} \varrho\,.\,a\,.\,da$$

dove A è tale che per $a = \mathrm{A}$, W assume quello speciale valore che le compete alla superficie esterna del fluido. Pei punti esterni alla massa, ossia per $a > \mathrm{A}$, si ha $\varrho = 0$ e alla (2) deve sostituirsi la seguente:

$$(2') \qquad \mathrm{W} = \frac{4\pi f}{a}\int_0^{\mathrm{A}} \varrho\, a^2\, da\,.$$

È facile vedere che tanto a quanto la sua derivata prima rispetto a W, variano in modo continuo con W.

Se la velocità di rotazione fosse nulla, se le superficie di egual densità fossero sfere concentriche, e se fosse A il raggio della sfera limite, la formola (2) darebbe il valore della funzione (1) per ogni punto distante di a dall'origine. È quindi naturale, nel caso nostro, di esprimere il raggio vettore r di un punto M, nel quale la espressione (1) assume il valore W, colla formola

$$(3) \qquad r = a\,(1 + \alpha\, s)$$

dove s è funzione finita di a, μ, ψ ed α è una costante piccolissima, della quale trascureremo le potenze superiori alla prima.

Deriviamo parzialmente i due membri della (3) rispetto ad r, osservando che, nel 2° membro, a è funzione di W e che questa è funzione di r, μ, ψ. Avremo

$$1 = \left(1 + \alpha s + a\alpha \frac{\partial s}{\partial a}\right) \frac{da}{d\mathrm{W}} \cdot \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial r}. \tag{4}$$

Ora ponendo $\int_0^a \varrho \, . \, a^2 . \, da = \mathrm{U}$, dalla (2) otteniamo

$$\frac{d\mathrm{W}}{da} = -\frac{4\pi f}{a^2}\,\mathrm{U}.$$

Quindi la (4), a meno di termini in α^2, dà

$$\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial r} = -\frac{4\pi f}{a^2}\,\mathrm{U}\left(1 - \alpha s - \alpha a \frac{\partial s}{\partial a}\right). \tag{5}$$

3. Indichiamo, come d'uso, con P_n la funzione di Laplace dell'ordine n, ossia il coefficiente di r^n nello sviluppo di

$$\left[1 + r^2 - 2r\left(\mu\,\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\psi - \psi')\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Si ha, com'è noto:

$$\varDelta_2 (r^n \mathrm{P}_n) = 0. \tag{6}$$

Se ora nella formola di Green

$$\int (\mathrm{V} . \varDelta_2 \mathrm{U} - \mathrm{U} . \varDelta_2 \mathrm{V})\, d\sigma = \int \left(\mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} - \mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial n}\right) d\mathrm{S}$$

poniamo $r^n \mathrm{P}_n$ in luogo di V, e W in luogo di U, estendendo l'integrazione destra a tutta la superficie S di equilibrio passante per il punto M, e quindi l'integrazione a sinistra a tutto lo spazio σ racchiuso dalla S, avremo

$$\int r^n \mathrm{P}_n . \varDelta_2 \mathrm{W} . \, d\sigma = \int \mathrm{W} . \frac{\partial}{\partial n}(r^n \mathrm{P}_n)\, d\mathrm{S} - \int r^n \mathrm{P}_n \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial n}\, d\mathrm{S}. \tag{7}$$

In questa formola dn indica l'elemento di normale interna alla S. Ora lungo la S si ha W = costante; sicchè il 1° integrale nel 2° membro della (7) si può scrivere

$$\mathrm{W}\int \frac{\partial}{\partial n}(r^n \mathrm{P}_n)\, d\mathrm{S} = -\,\mathrm{W}\int \varDelta_2 (r^n \mathrm{P}_n)\, d\sigma = 0$$

in virtù della (6). Osservando poi ancora che per la (1) si ha

$$\varDelta_2 \mathrm{W} = -4\pi f \varrho + 2\omega^2,$$

la (7) diverrà

$$\int r^n \mathrm{P}_n (2\omega^2 - 4\pi f \varrho)\, d\sigma = -\int r^n \mathrm{P}_n \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial n}\, d\mathrm{S}. \tag{8}$$

Ora si ha, a meno di quantità dell'ordine di α^2

$$r^n = a^n(1 + n s \alpha)$$
$$dS = a^2(1 + 2\alpha s)\, d\mu \,.\, d\psi$$
$$d\sigma = r^2 . dr . d\mu . dv = a^2\left(1 + 3\alpha s + \alpha a \frac{\partial s}{\partial a}\right) da . d\mu . d\psi .$$

Osserviamo poi che si ha

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial n} \cos(rn) ;$$

e poichè $\cos(rn)$ differisce da -1 di quantità dell'ordine di α^2, potremo, nel nostro ordine di approssimazione, porre, ricordando la (5)

$$\frac{\partial W}{\partial n} = \frac{4\pi f}{a^2} U\left(1 - \alpha s - \alpha a \frac{\partial s}{\partial a}\right).$$

Con queste sostituzioni la (8) diverrà finalmente

$$\int_0^a \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} P_n(2\omega^2 - 4\pi f \varrho)\, a^{n+2}\left[1 + (n+3)\alpha s + a\alpha \frac{\partial s}{\partial a}\right] da . d\mu . d\psi$$
$$= -4\pi f U a^n \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} P_n \left[1 + (n+1)\alpha s - a\alpha \frac{\partial s}{\partial a}\right] d\mu . d\psi . \tag{9}$$

Esprimiamo s per serie di funzioni sferiche, ossia poniamo

$$s = \sum_0^\infty Y_n , \qquad r = a(1 + \alpha Y_0 + \alpha Y_1 + \alpha Y_2 + \cdots) \tag{10}$$

dove Y_n è funzione sferica, dell'ordine n, delle variabili μ e ψ, e, del resto, funzione qualsiasi di a.

Sostituendo nella (9) e ricordando che

$$\int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} P_n Y_m . d\mu . d\psi = \begin{cases} \text{zero}, & \text{per } n \gtrless m \\ \dfrac{4\pi}{2n+1} Y_n , & \text{per } n = m \end{cases}$$

avremo per $n > 0$, sopprimendo un fattore comune $\dfrac{4\pi}{2n+1}$,

$$\alpha \int_0^a (2\omega^2 - 4\pi f \varrho)\left[(n+3)\, a^{n+2} Y_n + a^{n+3} \frac{\partial Y_n}{\partial a}\right] . da$$
$$= -4\pi f \alpha U a^n \left[(n+1) Y_n - a \frac{\partial Y_n}{\partial a}\right]. \tag{11}$$

Nell'ordine di approssimazione qui tenuto, il prodotto $\omega^2 \alpha$ è trascurabile, quindi la (11) può scriversi, con ovvie semplificazioni

$$\int_0^a \varrho \frac{\partial}{\partial a}(a^{n+3} Y_n)\, da - a^n \left[(n+1) Y_n - a \frac{\partial Y_n}{\partial a} \right] U = 0 . \tag{12}$$

Da questa derivando rispetto ad a e dividendo per $a^{n+1} U$,

$$\frac{\partial^2 Y_n}{\partial a^2} + \frac{2 \varrho a}{U}\left(Y_n + a \frac{\partial Y_n}{\partial a} \right) - \frac{n(n+1)}{a^2} Y_n = 0 . \tag{13}$$

È questa l'equazione differenziale alla quale Laplace è pervenuto (*Méc. cél.* livre III°, n. 29) partendo dai ricordati sviluppi, per funzioni sferiche, della funzione potenziale dell'attrazione sopra un punto interno alla massa.

Moltiplicando la (12) per a^{-2n-2} ed eseguendo la integrazione rispetto ad a, si può dare all'integrale questa forma

$$\int_0^a \varrho \frac{\partial}{\partial a}(a^{2-n} Y_n) . da + (2n+1) a^{-n-1} Y_n U - \tag{14}$$
$$- a^{-2n-1} \int_0^a \varrho \frac{\partial}{\partial a}(a^{n+3} Y_n) . da = c$$

dove c deve riguardarsi come funzione di μ e ψ. Indicando con A_n un'altra funzione di μ e ψ, si potrà anche porre la (14) sotto la forma

$$\int_a^A \varrho \frac{\partial}{\partial a}(a^{2-n} Y_n) . da - (2n+1) a^{-n-1} Y_n U + \tag{15}$$
$$+ a^{-2n-1} \int_0^a \varrho \frac{\partial}{\partial a}(a^{n+3} Y_n)\, da = A_n .$$

Resta ora a determinare la A_n.

4. Consideriamo, a tale scopo, un punto M esteriore alla massa e tale che la sua distanza r dall'origine sia maggiore del massimo raggio vettore della superficie esterna della massa stessa. Per un tal punto sarà lecito esprimere la funzione potenziale V dell'attrazione collo sviluppo di Laplace procedente secondo le potenze negative di r. In tal modo si ottiene notoriamente:

$$V = \frac{M}{r} + 4 \pi \alpha \sum_1^\infty \frac{1}{(2n+1) r^{n+1}} \int_0^A \varrho \frac{\partial}{\partial a}(a^{n+3} Y_n) . da \tag{16}$$

dove M è la massa totale. Quando ad r si sostituisca la sua espressione (10), la somma

$$f V + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 (1 - \mu^2)$$

deve risultare funzione della sola a. Vale a dire che nel solito ordine di approssimazione dev'essere

$$(17) \qquad \frac{M}{a}(1 - \alpha Y_0 - \alpha Y_1 - \cdots) - \frac{1}{2f}\omega^2 \mu^2 a^2 +$$

$$+ 4\pi\alpha \sum_1^{\infty} \frac{1}{(2n+1)a^{n+1}} \int_0^A \varrho \frac{\partial}{\partial a}(a^{n+3} Y_n)\, da = F(a).$$

Osservando che, nei termini moltiplicati per α si può sostituire al posto di M il prodotto

$$4\pi \int_0^A \varrho a^2\, da = 4\pi\, U_1$$

ed eguagliando a zero, nella (17), le somme di funzioni sferiche di egual grado si ha, per $n > 0$ e differente da 2,

$$(18) \qquad U_1 Y_n - \frac{a^{n-1}}{2n+1} \int_0^A \varrho \frac{\partial}{\partial a}(a^{n+3} Y_n)\, da = 0,$$

e per $n = 2$:

$$(19) \qquad U_1 Y_2 - \frac{1}{5a^2} \int_0^A \varrho \frac{\partial}{\partial a}(a^5 Y_2)\, da = \frac{1}{8\pi f}\omega^2 a^3 \left(\frac{1}{3} - \mu^2\right).$$

Queste relazioni ci dànno modo di determinare A_n nel 2 membro delle (15). Se infatti le (15) si applicano al punto M esterno ora considerato, osservando che per $a > A$ si ha $\varrho = 0$, e $U = U_1$, si ottiene

$$-(2n+1)\, a^{-n-1} Y_n U_1 + a^{-2n-1} \int_0^A \varrho \frac{\partial}{\partial a}(a^{n+3} Y_n) . da = A_n .$$

Paragonando questa colle (18) (19) si vede che per $n > 0$ e diverso da 2 si ha $A_n = 0$, e per $n = 2$, $\quad A_2 = -\frac{5\omega^2}{8\pi f}\left(\frac{1}{3} - \mu^2\right)$.

Sicchè finalmente la (15) si scinde nelle due seguenti:

$$(20) \qquad \int_a^A \varrho \frac{\partial Y_2}{\partial a}\, da - \frac{5}{a^3} Y_2 U + \frac{1}{a^5} \int_0^a \varrho \frac{\partial}{\partial a}(a^5 Y_2)\, da = \frac{5\omega^2}{8\pi f}\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right).$$

$$(21) \quad \int_a^A \varrho \frac{\partial}{\partial a}(a^{2-n} Y_n) da - (2n+1) a^{-n-1} Y_n U + a^{-2n-1} \int_0^a \varrho \frac{\partial}{\partial a}(a^{n+3} Y_n) da = 0$$

per $n > 0$ e diverso da 2.

Queste equazioni, nella teoria di Laplace, direttamente si deducono dagli sviluppi esprimenti la f. p. dell'attrazione per un punto qualunque *interno* alla massa. Da esse si parte per dimostrare che, per n maggiore di zero e differente da 2, dev'essere $Y_n = 0$, e che Y_2 deve essere della forma $h\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right)$ dove h è funzione di a soltanto; il che dimostra, nel nostro ordine di approssimazione, che le superficie di equilibrio sono ellissoidi di rivoluzione aventi per asse l'asse t di rotazione. Le dette equazioni, essendo ora dedotte, in modo non soggetto alle obbiezioni mosse al metodo di Laplace, rimandiamo il lettore, per il seguito della dimostrazione, o al libro III già citato della *Méc. cél.*, ovvero alla esposizione che della teoria di Laplace ha dato il sig. Tisserand nel cap. XVIII del II vol. del suo *Traité de Mécanique céleste*. Le nostre equazioni (12) (13) (20) (21) corrispondono rispettivamente alle (49) (D) (B) (A) di Tisserand.

5. Aggiungeremo che all'equazione differenziale (13) si può direttamente pervenire in un altro modo abbastanza semplice. Nella formola

$$\Delta_2 \mathrm{W} = -4\pi f \varrho + 2\omega^2 \tag{22}$$

pongasi per $\Delta_2 \mathrm{W}$ la sua espressione in coordinate polari

$$\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \mu}\right] + \frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\cdot\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial \psi^2}. \tag{23}$$

In modo analogo a quello tenuto per dedurre la formola (5), si calcolino, derivando successivamente la (3), le espressioni di $\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial r^2}$, $\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \mu}$, $\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial \mu^2}$, $\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial \psi^2}$ e si sostituiscano nella (23). La (22) diverrà così, trascurando sempre le quantità dell'ordine di α^2, eseguendo alcune riduzioni e dividendo per f,

$$\frac{\omega^2}{2f} = 2\varrho\alpha\left(s + a\frac{\partial s}{\partial a}\right) + \frac{\alpha}{a}\mathrm{U}\frac{\partial^2 s}{\partial a^2} -$$
$$-\frac{2\mu\alpha}{a^3}\mathrm{U}\frac{\partial s}{\partial \mu} + \frac{1-\mu^2}{a^3}\mathrm{U}\frac{\partial^2 s}{\partial \mu^2} + \frac{1}{a^3(1-\mu^2)}\mathrm{U}\frac{\partial^2 s}{\partial \psi^2}.$$

Sostituendo ora ad s il suo sviluppo $\Sigma \mathrm{Y}_n$, ricordando che una funzione sferica dell'ordine n soddisfa all'equazione

$$n(n+1)\mathrm{Y}_n + \frac{\partial}{\partial \mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial \mathrm{Y}_n}{\partial \mu}\right] + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 \mathrm{Y}_n}{\partial \psi^2} = 0,$$

ed eguagliando a zero la somma delle funzioni sferiche di egual grado, si ricade nella (13), per $n > 0$.

6. La nostra deduzione della formola (12) suppone in realtà che non solo siano piccolissimi gli scostamenti lineari fra le superficie S di equilibrio e le sfere di un sistema concentrico, ma che anche gli angoli (nr) fra le normali ed i raggi vettori siano quantità piccole i cui quadrati si possano trascurare. Ciò equivale a supporre che oltrechè la funzione αs, anche le sue derivate $\alpha\frac{\partial s}{\partial \mu}$, $\alpha\frac{\partial s}{\partial \psi}$ assumano ovunque valori tanto piccoli, da potersene trascurare i quadrati.

La nostra dimostrazione cadrebbe dunque in difetto, quando le effettive superficie d'equilibrio fossero accidentate in guisa da presentare *ondulazioni*, delle quali l'estensione superficiale non fosse molto grande di fronte all'altezza loro. Ma è da osservare che anche la deduzione di Laplace, di dubbia legittimità in ogni caso, è, in questa ipotesi delle superficie ondulate, assolutamente inaccettabile. Giacchè non vi ha alcun ragionamento che possa giustificare l'applicazione degli sviluppi di Laplace pel calcolo, sia pure approssimato, della f. p. dell'attrazione sui punti che occupano le regioni più basse delle supposte ondulazioni.

Fisica. — *Ricerche sui raggi di Röntgen.* Nota preliminare dei dott. A. Sella e Q. Majorana, presentata dal Socio Blaserna [1].

1. I signori Benoist e Hurmuzescu a Parigi ed il prof. Righi a Bologna hanno mostrato che i raggi Röntgen godono della proprietà di scaricare i corpi elettrizzati. Guidati dall'analogia dei raggi Röntgen colle radiazioni ultraviolette, per quanto riguarda l'azione fosfogenica e fotografica, noi avevamo iniziato delle ricerche in questa direzione, ma ora che la detta proprietà è stata da più parti scoperta e resa di pubblica ragione, non staremo a riferire le esperienze che la dimostrano e che sono d'altronde assai facili a riprodursi.

Questa nuova proprietà dei raggi Röntgen ha una portata molto grande, quella cioè di fornire un mezzo assai delicato e sensibile per determinare l'intensità delle radiazioni, immensamente superiore per precisione all'apprezzamento della fluorescenza e della posa fotografica. Ed è precisamente con questo mezzo, che abbiamo intrapreso le nostre ricerche, di cui ora esponiamo i primi risultati.

Un elettrometro Mascart veniva posto in una cassa di lastra di zinco robusta in comunicazione col suolo, per eliminare sia le azioni elettrostatiche interne, sia il passaggio dei raggi Röntgen. Una parete laterale della cassa portava una finestra quadrata ricoperta da una sottile lastra d'alluminio, la quale mantenendo uno schermo assoluto contro azioni elettrostatiche permetteva il passaggio dei raggi Röntgen in un punto determinato.

All'interno, poco discosta dalla lastra d'alluminio, era disposta una lastra metallica in comunicazione coll'ago dell'elettrometro. I tubi di Crookes da noi adoperati erano della forma raccomandata dal prof. Blaserna nella sua comunicazione a questa Accademia; cioè quella che nei cataloghi va col numero 9, a guisa di pera, essendo catodo un disco di alluminio normale all'asse, anodo la croce, ovvero un'altro disco di alluminio paralleli all'asse.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto fisico dell'Università di Roma.