ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME V.

1° SEMESTRE

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° marzo 1896.

F. Brioschi Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra una classe di superficie collegate alle superficie pseudosferiche.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

Nel quarto volume, recentemente uscito, delle *Leçons sur la théorie générale des surfaces* il Darboux, esponendo il nuovo metodo di Weingarten per la ricerca di intere classi di superficie applicabili, tratta l'esempio delle superficie applicabili sulla sfera (l. c., pag. 321) e fa osservare come tale problema viene così ricondotto all'altro:

Determinare le superficie Σ dotate della proprietà che ogni segmento di normale, compreso fra i due centri principali di curvatura, sia visto da un punto fisso O dello spazio sotto angolo retto.

L'equazione a derivate parziali del secondo ordine, caratteristica per queste superficie Σ, si scrive:

$$(\varrho' + p)(\varrho'' + p) = p^2 - 2q\,, \tag{1}$$

ove ϱ', ϱ'' indicano i raggi principali di curvatura, p la distanza del piano tangente dal punto fisso O e $2q$ la distanza del punto di contatto da O stesso.

Il Darboux dopo avere così trasformata la ricerca delle superficie a curvatura costante nella integrazione della equazione (1) soggiunge: *Il n'y a là qu'un fait curieux, l'équation précédente étant plus compliquée que celle des surfaces à courbure constante.* Tuttavia la ricerca effettiva delle relazioni geometriche fra le superficie Σ della classe (1) e le superficie a curvatura costante conduce, come si vedrà, a risultati ben semplici che meritano di essere osservati. Qui mi limiterò a dare gli enunciati dei teoremi fondamentali, riserbando ad altro luogo le dimostrazioni e gli sviluppi.

1.

Indicherò in questa Nota, per brevità, col nome di *superficie* Σ ogni superficie della classe (1). E innanzi tutto osserverò che limitandosi, come sembra opportuno in queste ricerche, a superficie *reali*, le superficie Σ non vengono già a collegarsi, secondo il metodo di Weingarten, colle superficie applicabili sulla sfera, sibbene con quelle applicabili sulla pseudosfera, ossia colle pseudosferiche ([1]).

Il modo di derivazione delle superficie Σ dalle pseudosferiche è il seguente. Presa una superficie pseudosferica S qualunque, si tracci sopra di essa un sistema di geodetiche parallele $\beta = \text{cos}^{\text{te}}$ (uscenti da un punto all'infinito della superficie) e le loro traiettorie ortogonali $\alpha = \text{cos}^{\text{te}}$ (oricicli). Assumendo convenientemente i parametri α, β, il quadrato dell'elemento lineare di S prenderà la nota forma parabolica

$$ds^2 = d\alpha^2 + e^{-2\alpha} d\beta^2 . \tag{2}$$

Indicando con ξ, η, ζ le coordinate di un punto mobile sopra S, pongasi

$$x = e^{\alpha}\left(\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial \xi}{\partial \beta}\right), \quad y = e^{\alpha}\left(\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial \eta}{\partial \beta}\right), \quad z = e^{\alpha}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial \zeta}{\partial \beta}\right) \tag{3}$$

e saranno x, y, z le coordinate di un punto mobile sopra una superficie Σ della classe (1). Viceversa ogni superficie Σ si ottiene da una conveniente pseudosferica S, *su cui sia tracciato un determinato sistema di geodetiche parallele* colle formole (3). Ma si noti che per tal modo dalla superficie S si deduce non una sola Σ, ma un'intera serie di tali superficie Σ *parallele*, giacchè mutando β in $\beta + \text{cost}^{\text{te}}$, la (2) non si altera, mentre la superficie (3) si cangia in una parallela. È evidente del resto, per la definizione geometrica delle superficie Σ, che ogni superficie parallela ad una Σ è nuovamente una Σ. Ciò significa che l'equazione a derivate parziali (1) è *invariante* rispetto alle trasformazioni parallele.

2.

Formando l'equazione differenziale delle linee di curvatura della superficie Σ data dalle (3), si trova l'importante risultato: *Sopra la superficie* Σ

([1]) E invero nelle formole corrispondenti (l. c., pag. 322) il Darboux pone $\varphi = \sqrt{p^2 - 2q}$; ma poichè per ogni superficie *reale* Σ è $p^2 < 2q$, così φ è puramente immaginaria e le superficie corrispondenti hanno puramente immaginarie le coordinate dei loro punti corrispondenti a valori reali di p, q, talchè dividendo queste coordinate per $\sqrt{-1}$ si ottengono in effetto superficie *reali* a curvatura costante negativa (pseudosferiche). Se così non fosse, sarebbe trovato ciò che fino ad ora è stato da più parti inutilmente cercato cioè *un metodo efficace di trasformazione per le superficie a curvatura costante positiva!*

le linee di curvatura corrispondono alle linee di curvatura della superficie pseudosferica S, *da cui deriva secondo le formole* (3).

Ora alle geodetiche $\beta =$ cost^{te} di S si tirino le tangenti; la congruenza così formata ha per prima falda della superficie focale la S e per seconda falda una nuova superficie pseudosferica S′ *complementare* della S. D'altronde si vede subito che la corrispondenza di punto a punto della Σ e della S′ è tale che le normali in due punti corrispondenti sono parallele, e poichè alle linee di curvatura di S corrispondono, come è noto, quelle di S′, ne deduciamo il teorema:

A) *Ogni superficie* Σ *ha la stessa immagine sferica delle linee di curvatura di una superficie pseudosferica* (1).

Questa proprietà fondamentale spiega appunto il perchè la teoria delle superficie Σ viene necessariamente a collegarsi con quella delle superficie pseudosferiche.

Di più si osservi che presa una qualunque superficie pseudosferica S′, vi sono ∞^1 sistemi di superficie Σ parallele aventi a comune con S′ l'immagine sferica delle linee di curvatura, e ciò prescindendo da un'omotetia col centro in O, che cangia manifestamente una superficie Σ in un'altra.

3.

Ho dimostrato nel mio libro (2) che la congruenza delle normali ad ogni superficie, avente la medesima immagine sferica delle linee di curvatura di una superficie pseudosferica, è una congruenza ciclica (l. c., pag. 333), che cioè esiste uno *ed un solo* sistema ∞^2 *normale* (3) di circoli, aventi per assi le dette normali. Ne segue che le normali ad una superficie Σ costituiscono appunto una congruenza ciclica. Come si caratterizzano i circoli C del sistema normale corrispondente? Il risultato è estremamente semplice, poichè si trova che questi circoli C vanno tutti a passare pel punto fisso O. Inoltre, e questa è la proprietà più notevole, le ∞^1 superficie ortogonali ai circoli C sono nuovamente superficie Σ rispetto al medesimo punto fisso O. Si ha dunque la costruzione seguente:

B) *Presa una qualsiasi superficie* Σ *della classe* (1), *dal punto fisso* O *si conduca ad ogni sua normale m la perpendicolare* OP *e, fatto centro nel piede* P *di questa, si descriva, nel piano normale a m, il circolo che passa per* O. *Il sistema* ∞^2 *di circoli* C *così costruiti ammette una*

(1) Anche il Weingarten era pervenuto dal canto suo a questo teorema, come ho saputo dopo avergli comunicati i risultati da me ottenuti.

(2) *Lezioni di geometria differenziale*. Pisa, Spörri, 1894.

(3) Un sistema ∞^2 di circoli dicesi normale se ammette una serie di superficie ortogonali.

serie ∞^1 *di superficie ortogonali* Σ', *che appartengono nuovamente alla classe* (1).

Così da una superficie Σ si ottengono ∞^1 nuove superficie della medesima classe e ciò con operazioni che richieggono manifestamente una sola quadratura.

Si osservi poi che mentre la superficie Σ ha a comune con una superficie pseudosferica S la immagine sferica delle linee di curvatura, le superficie Σ', derivate da Σ colla costruzione B), hanno a loro volta le stesse immagini delle linee di curvatura delle ∞^1 superficie pseudosferiche S' complementari di S. Si può dunque dire:

C) *La trasformazione delle superficie* Σ, *fornita dalla costruzione* B) *corrisponde precisamente alla trasformazione complementare delle superficie pseudosferiche.*

Le considerazioni superiori conducono altresì al teorema:

D) *Se pel punto fisso* O *si conducono i circoli normali ad una superficie* Σ, *tutte le* ∞^1 *superficie ortogonali ai circoli appartengono alla classe* (1).

4.

L'ultima costruzione D) deriva facilmente dal seguente teorema di Weingarten ([1]):

Un'inversione per raggi vettori reciproci rispetto ad ogni sfera col centro in O *cangia una superficie* Σ *in un'altra della medesima classe.*

In altre parole l'equazione fondamentale (1) è invariante non solo rispetto alle trasformazioni parallele, ma anche rispetto alle inversioni.

Ora è chiaro che invertendo il nostro sistema ciclico (Σ') del teorema B) per raggi vettori reciproci si ottiene una serie di superficie Σ parallele; così la costruzione (D) risulta d'immediata evidenza.

A quale trasformazione delle superficie pseudosferiche corrisponde l'inversione delle Σ? Facilmente si dimostra che:

Un'inversione per raggi vettori reciproci delle superficie Σ *corrisponde ad una trasformazione delle superficie pseudosferiche composta di due successive trasformazioni complementari.*

Così per le superficie Σ la trasformazione elementare rimane quella definita dalla costruzione B); due tali successive trasformazioni B) si combinano in un'inversione per raggi vettori reciproci.

Combinando le costruzioni geometriche sopra indicate se ne possono ottenere delle nuove. Osserveremo ancora la seguente:

E) *Ad ogni normale* m *di una superficie* Σ *si cali dal punto fisso* O *la perpendicolare* OP *sulla quale si assuma un punto* P' *tale che* $OP.OP' = \text{cost}^{\text{te}}$,

([1]) Esso mi fu comunicato dall'autore in occasione della citata corrispondenza.

se per P′ *si conduce la retta m′ normale insieme a* OP *e alla m, queste rette m′ saranno le normali di una serie di nuove superficie* Σ'.

Le due serie (Σ) (Σ') di superficie Σ parallele si deducono appunto da due superficie pseudosferiche S, S′ complementari, secondo le formole (3); esse hanno a comune con S, S′ l'immagine sferica delle linee di curvatura. Osserviamo poi che invertendo per raggi vettori reciproci una delle due serie di superficie (Σ) o (Σ') si ottiene quel sistema ciclico che ha per assi le normali dell'altra serie (nº 3). Inoltre si dimostra: *La proprietà descritta nella costruzione* E) *è caratteristica della superficie* Σ.

5.

Riserbando ad altra occasione uno studio più dettagliato delle superficie Σ, mi limiterò qui ad indicare la notevole forma che assume l'elemento lineare dello spazio riferito ad un nostro sistema ciclico Σ' (n. 3).

Sia θ una funzione di u, v che soddisfi alla nota equazione

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

e si determini la funzione ω dalle equazioni simultanee di Darboux

$$(4)\qquad\left\{\begin{aligned}\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}&=\operatorname{sen}\omega\cos\theta\\ \frac{\partial\omega}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}&=-\cos\omega\operatorname{sen}\theta\end{aligned}\right.$$

Indicando con w la costante arbitraria (parametro) che entra nella soluzione più generale ω delle (4) e con ω_0 una soluzione particolare, pongasi

$$\alpha=\int(\cos\omega_0\cos\theta\,du+\operatorname{sen}\omega_0\operatorname{sen}\theta\,dv)\,.$$

La formola

$$ds^2=e^{2\alpha}\left\{(\cos\omega+\cos\omega_0)^2\,du^2+(\operatorname{sen}\omega+\operatorname{sen}\omega_0)\,dv^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial w}\right)^2dw^2\right\}$$

definirà appunto un sistema ciclico Σ' (¹). Esso è derivato per trasformazione di Combescure dal sistema ciclico pseudosferico:

$$ds^2=\cos^2\omega\,du^2+\operatorname{sen}^2\omega\,dv^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial w}\right)^2dw^2\,.$$

Matematica. — *Sulla inversione degli integrali definiti.* Nota del Corrispondente Vito Volterra.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

(¹) Le superficie Σ' ortogonali ai circoli sono le $w=\text{cost}^{\text{te}}$.