ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME V.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

disco di porcellana che ho ricavato da un piattino del Ginori ed assottigliato collo smeriglio fino a $^1/_2$ mm. Entrambi i dischi erano relativamente più grandi di quello di mica segnato nella fig. 2, perchè occupavano quasi per intero la sezione dei tubi. Amendue i tubi erano eccitati coll'interruttore rapido e col grande rocchetto che dava scintille di 15 cm. nell'aria. Furono mantenuti entrambi fra la fine del secondo ed il principio del terzo stadio di rarefazione: e colla disposizione della fig. 2 mi hanno dato la fotografia d'una rete metallica. Il platino era rovente nel mezzo, e sublimandosi ha annerito la parete laterale fino all'altezza dell'anello che faceva da anode, mentre ha lasciato trasparente l'emisfero sottostante.

Al vetro ed all'alluminio sono dunque da aggiungere la mica, il platino e la porcellana, che emettono raggi di Röntgen quando sono colpiti dai raggi catodici.

Fisica terrestre. — *Dei terremoti di Spoleto nell'anno 1895; con Catalogo dei terremoti storici della valle Umbra.* Memoria del Socio T. Taramelli e del prof. P. I. Corradi.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.

Matematica. — *Su di un teorema del sig. Netto relativo ai determinanti, e su di un altro teorema ad esso affine.* Nota di Ernesto Pascal, presentata dal Socio Cremona.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sul moto del polo terrestre.* Nota di G. Peano, presentata dal Socio Brioschi.

Nella mia Nota, pubblicata negli Atti della R. Accademia di Torino, 5 maggio 1895, ed avente questo stesso titolo, dopo aver applicato l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann ai principî della meccanica, come esercizio numerico dell'ultima proposizione, mi proposi di stimare la velocità con cui si spostano le terre polari in virtù dei moti della parte fluida del nostro globo. Ma l'aver fatto uso di questo nuovo metodo, e l'avere in una Nota: *Sul moto d'un sistema nel quale sussistono moti interni variabili* (Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, 1 dicembre 1895) esposti i risultati sopprimendone la dimostrazione, può lasciare oscurità in qualche lettore. Quindi non sarà del tutto inopportuno il tradurre alcune di quelle formule in coordinate cartesiane. Le formule diventano più lunghe: ma il ragionamento non perde punto della sua semplicità.

Abbiasi un sistema composto d'una parte rigida, e d'una mobile qualunque. Per brevità di linguaggio, diremo *terra* il sistema, *continente* e *mare* le sue due parti. Supponiamo che sul sistema non agiscano forze esterne. Allora il principio di meccanica: *la somma dei momenti delle quantità di moto del sistema intorno ad ogni asse è costante* equivale alle sei equazioni

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum m_i\left(y_i\frac{dz_i}{dt}-z_i\frac{dy_i}{dt}\right)=a,\ \sum m_i\left(z_i\frac{dx_i}{dt}-x_i\frac{dz_i}{dt}\right)=b,\ \sum m_i\left(x_i\frac{dy_i}{dt}-y_i\frac{dx_i}{dt}\right)=c,\\ &\sum m_i\frac{dx_i}{dt}=d,\quad \sum m_i\frac{dy_i}{dt}=e,\quad \sum m_i\frac{dz_i}{dt}=f,\end{aligned}\right.$$

ove $a, b, \ldots f$ sono sei costanti, che qui dirò *costanti iniziali*. Questi sei numeri sono le coordinate, o caratteristiche, di quella forma geometrica, che proposi di chiamare *quantità di moto del sistema*; e queste equazioni equivalgono alla (3) della mia Nota.

L'ipotesi che il continente sia rigido, si traduce in quella che le coordinate, o componenti della velocità d'ogni suo punto (x_i, y_i, z_i) siano espresse da:

$$(2)\quad \frac{dx_i}{dt}=l+qz_i-ry_i,\quad \frac{dy_i}{dt}=m+rx_i-pz_i,\quad \frac{dz_i}{dt}=n+py_i-qx_i,$$

ove l, m, n, p, q, r sono sei costanti invariabili con (x_i, y_i, z_i). Vedasi ad es. il pregevole *Corso di meccanica razionale* che ha or ora pubblicato il professor Maggi, § 303. I sei numeri $l, m, \ldots r$ sono le coordinate della forma geometrica che chiamai *velocità del corpo rigido*, e queste equazioni equivalgono alla (4) della mia Nota.

Siano u_i, v_i, w_i le componenti della velocità relativa del punto (x_i, y_i, z_i) del mare, rispetto al continente; sicchè la velocità assoluta di questo punto abbia per coordinate:

$$(3)\qquad \frac{dx_i}{dt}=l+qz_i-ry_i+u_i,\quad \frac{dy_i}{dt}=\cdots,\quad \frac{dz_i}{dt}=\cdots$$

Sostituisco nelle (1) alle $\frac{dx_i}{dt}, \ldots$ i valori dati dalle (2) pei punti del continente, e dalle (3) pei punti del mare. Pongasi

$$\begin{aligned} a' &= \sum m_i(y_i w_i - z_i v_i), & b' &= \cdots, & c' &= \cdots\\ d' &= \sum m_i u_i, & e' &= \cdots, & f' &= \cdots\end{aligned}$$

ove il $\sum$ si estende ai punti del mare. Queste sei quantità, analoghe alle (1), ove invece di velocità assolute si considerino le relative, dipendono dalle sole velocità relative degli elementi del mare, che suppongo note. Le (1) divengono:

$$
(4)\left\{\begin{array}{l}
n\sum m_i\, y_i - m\sum m_i\, z_i + p\sum m_i\,(y_i^2+z_i^2) - q\sum m_i\, x_i\, y_i - r\sum m_i\, x_i\, z_i = a - a' \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = b - b' \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = c - c' \\
l\sum m_i + q\sum m_i\, z_i - r\sum m_i\, y_i = d - d' \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = e - e' \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = f - f'
\end{array}\right.
$$

equivalenti alla (11) della mia Nota. Il $\sum$ si intende quì esteso a tutti i punti della terra. Se ora supponiamo noti i dieci coefficienti:

$\sum m_i$, massa della terra,

$\sum m_i\, x_i$, ... coordinate del baricentro terrestre, moltiplicate per la massa,

$\sum m_i\,(y_i^2+z_i^2)$, ..., $\sum m_i\, y_i\, z_i$, ... momenti d'inerzia della terra,

da queste equazioni possiamo ricavare $l, m, \ldots r$ in funzione di $a-a' \ldots f-f'$; e sostituendo questi valori nelle (2), si hanno le componenti della velocità d'un punto qualunque del continente (x_i, y_i, z_i); e sia

$$
(5)\quad \frac{dx_i}{dt} = \varphi(a-a', \ldots f-f'),\ \frac{dy_i}{dt} = \psi(a-a', \ldots, f-f'),\ \frac{dz_i}{dt} = \chi(a-a', \ldots f-f').
$$

Ora, senza eseguire i calcoli indicati, si osservi che le (4) dànno le sei quantità $a-a'$, ... $f-f'$ quali funzioni lineari omogenee delle sei $l, m, \ldots r$; risoltele, avremo queste quali funzioni lineari omogenee di quelle; e sostituendo nelle (2), pure lineari omogenee in l, m, ..., avremo infine che le tre funzioni φ, ψ, χ ora considerate sono lineari ed omogenee; quindi si avrà:

$$
(6)\qquad \frac{dx_i}{dt} = \varphi(a, b, \ldots f) - \varphi(a', b', \ldots f),\ \text{ e analoghe}
$$

e si conchiude la proposizione di cui feci uso nell'esempio numerico:

« La velocità d'un punto qualunque del continente è la risultante di due. « L'una, di coordinate

$$
\varphi(a, b, \ldots f),\quad \psi(a, \ldots f),\quad \chi(a, \ldots f)
$$

« che dipende dalle sole costanti iniziali; essa è la velocità che avrebbe il « punto se si suppone $a' = b' = \cdots = f' = 0$, cioè se si suppone la terra « irrigidita. L'altra, di coordinate

$$
-\varphi(a', b', \ldots f'),\quad -\psi(\ldots),\quad -\chi(\ldots)
$$

« che dipende dalle sole velocità relative dei punti del mare; questa è la ve- « locità che avrebbe il punto supponendo $a = b = \cdots = f = 0$, cioè nulle le « costanti iniziali; vale a dire la velocità che avrebbe il punto supponendo

« d'aver arrestata la terra nella posizione considerata, ed in seguito si met-
« tano in moto i mari ».

L'indipendenza delle due velocità è conseguenza della sola forma lineare delle equazioni considerate. Ad esempio, la velocità d'un punto della terra, ove su essa si spari un cannone, è la risultante di due; l'una è la velocità che avrebbe il punto se il cannone non fosse sparato; e l'altra è la velocità che avrebbe il punto stesso supposta fermata la terra, e poi si spari il cannone. Amendue queste velocità si calcolano, o colle formule scritte, o scrivendole semplificate in ogni caso particolare.

Prendiamo per origine il baricentro della terra; sarà $\sum m_i x_i = \cdots = 0$; per assi coordinati gli assi d'inerzia; sarà $\sum m_i y_i z_i = \cdots = 0$. Facciasi astrazione dal moto del baricentro terrestre; sarà $d = e = f = 0$. Suppongasi che il baricentro del mare sia fisso rispetto al continente, il che avviene quando si considerino solo correnti chiuse o cicli; sarà $d' = e' = f' = 0$. Detti A, B, C i momenti principali d'inerzia, le (4) diventano:

$$(7) \qquad \begin{cases} \mathrm{A}p = a - a', \quad \mathrm{B}q = b - b', \quad \mathrm{C}r = c - c' \\ l = m = n = 0 \end{cases}$$

Quindi il continente rota attorno al baricentro della terra; la sua velocità rotatoria, considerata come un vettore (considerazione già comune nei trattati), avrà per componenti

$$p = \frac{a - a'}{\mathrm{A}}, \quad q = \frac{b - b'}{\mathrm{B}}, \quad r = \frac{c - c'}{\mathrm{C}};$$

ed è la somma, o risultante della velocità di componenti

$$\frac{a}{\mathrm{A}}, \quad \frac{b}{\mathrm{B}}, \quad \frac{c}{\mathrm{C}},$$

dovuta alle costanti iniziali; e della velocità di componenti

$$(8) \qquad -\frac{a'}{\mathrm{A}}, \quad -\frac{b'}{\mathrm{B}}, \quad -\frac{c'}{\mathrm{C}}.$$

dovuta al moto del mare.

Ora, riferendoci al globo terracqueo, i momenti d'inerzia A, B, C, che compaiono al denominatore delle formule (8) sono noti con discreta approssimazione da studî astronomici e geodetici. Ma i numeratori a', b', c', momenti della quantità di moto del mare, ci sono incogniti. Volendo riconoscere se i moti marini, quali quelli che noi vediamo, possano produrre una velocità rotatoria sensibile, calcolai quella prodotta dalla Corrente del Golfo. La portata e la posizione di questa corrente sono date, con approssimazione grossolana, dalla Geografia. Per calcolare il momento della quantità di moto d'una corrente chiusa, si hanno più metodi dal calcolo geometrico. Il più semplice ad esporsi si è di proiettare ortogonalmente, sul piano perpendicolare all'asse, il ciclo considerato; il doppio dell'area proiezione, moltiplicato per la portata della corrente, dà il momento della corrente rispetto all'asse. Così si hanno a', b', c'. Risulta dal calcolo numerico che questa corrente imprime alle terre polari, ad es. allo Spitzberg, una velocità di più d' un metro all'anno.

Ma non sarà inutile il ricordare che le correnti regolarmente distribuite attorno all'asse polare, o simmetricamente rispetto all' equatore, imprimono velocità che si distruggono fra loro. Quindi in questo calcolo non si può tener conto nè dei venti alizei, nè di altri fenomeni regolari; ma solo delle irregolarità che queste correnti hanno nei due emisferi, e secondo i varî meridiani.

Avuta la velocità dei varî punti del continente, si potrebbero determinare le loro posizioni alla fine d'un tempo qualunque, supposte note le quantità a', b', ... f' nella successione dei tempi. Ma noi non conosciamo i loro valori attuali, e meno i futuri. Variando il polo, la corrente del golfo potrà gelare, e altre correnti si produrranno. Ritengo perciò puro esercizio di analisi il fare ipotesi speciali sulle leggi che regolano queste correnti, onde dedurne dopo integrazione, la posizione della terra alla fine d'un tempo qualunque. Sotto l'aspetto analitico, una conveniente scelta di queste ipotesi può rendere l'integrazione immediata, ovvero introdurre ogni funzione trascendente che si desidera. E sotto l'aspetto pratico, che più importa, due ipotesi, che paiono rappresentare prossimamente il fenomeno fisico, possono, dopo integrazione, condurre a risultati del tutto opposti. Poichè mentre noi possediamo regole semplici per stimare l'approssimazione nelle operazioni di analisi finita, la questione è assai complicata quando si integrano equazioni differenziali approssimate.

E un esempio ci è dato in questa stessa questione. Lo Schwahn, dal fatto che supponendo costanti certe quantità ne deriva che il polo terrestre può fare solo piccole oscillazioni, emise l'opinione che ciò avvenga in generale; e tale opinione manifestarono pure Helmert, Schiaparelli, ed altri, di cui feci menzione nella mia seconda Nota (23 giugno 1895). Per togliere ogni dubbio scrissi questa seconda Nota, in cui supposta la terra di rivoluzione, riduco l'integrazione generale ad un problema noto. Come caso particolare feci vedere che una corrente dell'intensità di quella del golfo, e che si comporti col variare del tempo in modo conveniente, trasporterebbe effettivamente le terre polari all'equatore in 10 milioni di anni. È facile il vedere che lo stesso avviene considerando la terra come un ellissoide a tre assi.

La conclusione si è che l'intensità delle attuali correnti atmosferiche e marine è più che sufficiente ad imprimere ai poli vasti movimenti irregolari, di ampiezza qualunque, e ciò sia supponendo la terra plastica, come già affermò lo Schiaparelli, sia supponendola rigorosamente rigida. Spetta all'Astronomia e alla Geologia il riconoscere se questi spostamenti ci siano, o ci siano stati.

Fisica. — *Metodo per determinare l'indice di rifrazione della luce di un minerale nelle lamine sottili.* Nota di C. Viola, presentata dal Socio Strüver.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Esperienze sui raggi Röntgen ed apprezzamento di un limite inferiore della loro velocità.* Nota dei dott. A. Sella e Q. Majorana, presentata dal Socio Blaserna [1].

1. L'interesse che presenta la conoscenza dell'azione di un campo magnetico sui raggi Röntgen propagantesi nel vuoto, in riguardo alla loro differenziazione dai raggi catodici, è stata rilevata dal Lodge.

Istituimmo in proposito la seguente esperienza. In un tubo di vetro del diametro di 2 cm. e della lunghezza di 50 cm. chiuso ai due estremi con due dischi di alluminio, fu spinta la rarefazione sino a mezzo micron di mercurio. Il tubo fu disposto di fronte alla porzione attiva di un Crookes con l'estremità più vicina A alla distanza di 30 cm. I raggi Röntgen dovevano così percorrere tutto il tubo ed uscirne dopo di avere attraversato le due pareti di alluminio. Su di un disco fluorescente normale all'asse del tubo e posto alla sua estremità più lontana B, si poteva allora vedere un cerchio illuminato corrispondente alla sezione interna del tubo, un anello oscuro e poi un campo pure chiaro all'intorno. Ponendo il tubo in direzione della porzione più attiva della sorgente Röntgen si può far sì che il campo interno e l'esterno sieno egualmente luminosi, malgrado che l'interno corrisponda a raggi, che hanno dovuto attraversare due strati di alluminio. Alla distanza di 5 cm. dall'estremita A, sotto il tubo venivano disposti i poli di un elettromagnete molto potente, destinato a esperienze sul diamagnetismo. Ora chiudendo il circuito eccitatore di questo, non potemmo vedere la più piccola variazione relativa d'intensità luminosa dei due campi.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Roma.