ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME V.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 15 marzo 1896.

A. Messedaglia Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla inversione degli integrali definiti.* Nota del Corrispondente Vito Volterra.

1. Sia $S_0(x, y)$ una funzione finita e continua qualunque definita per i valori di x, y compresi fra α e β $(\alpha < \beta)$. Partendo da essa costruiamo successivamente le espressioni

$$S_i(x, y) = \int_y^x S_{i-j}(x, \xi)\, S_{j-1}(\xi, y)\, d\xi$$

dando ad i i valori $1, 2, 3 \ldots$ e scegliendo j compreso fra 1 e i. Si dimostra facilmente che l'integrale precedente non dipende dalla scelta del numero j. Inoltre chiamando M il limite superiore dei valori assoluti di $S_0(x, y)$ si ha

$$|S_i(x, y)| \leq \frac{M^{i+1}(|y-x|)^i}{i!}.$$

Se ne può concludere che la serie

$$F_0(x, y) = \sum_0^\infty S_i(x, y)$$

è uniformemente convergente e per conseguenza rappresenta una funzione finita e continua di x, y.

Noi possiamo dare una forma notevole al resto di questa serie. Chiamandolo infatti $R_n(x, y)$ si otterrà

$$R_n(x, y) = F_0(x, y) - \sum_0^n S_i(x, y) = \int_y^x S_n(x, \xi) F_0(\xi, y) d\xi$$

$$= \int_y^x S_n(\xi, y) F_0(x, \xi) d\xi .$$

Ponendo $n = 0$ questa formula diviene:

$$F_0(x, y) - S_0(x, y) = \int_y^x S_0(x, \xi) F_0(\xi, y) d\xi \tag{1}$$

$$= \int_y^x S_0(\xi, y) F_0(x, \xi) d\xi .$$

2. Applichiamo ora alla funzione $F_0(x, y)$ delle operazioni analoghe a quelle che si sono eseguite sopra $S_0(x, y)$; calcoliamo cioè successivamente

$$F_i(x, y) = \int_x^y F_{i-j}(x, \xi) F_{j-1}(\xi, y) d\xi$$

e formiamo la serie, che resulterà convergente,

$$T_0(x, y) = \sum_0^\infty F_i(x, y) .$$

Possiamo provare che *la somma di questa serie è la funzione* $S_0(x, y)$ *da cui primitivamente siamo partiti*. Infatti per questa serie sussisterà una formula analoga alla (1), vale a dire

$$T_0(x, y) - F_0(x, y) = \int_x^y F_0(x, \xi) T_0(\xi, y) d\xi \tag{2}$$

$$= \int_x^y F_0(\xi, y) T_0(x, \xi) d\xi$$

onde sommando le (1) e (2) si otterrà

$$T_0(x, y) - S_0(x, y) = \int_x^y F_0(\xi, y) \{ T_0(x, \xi) - S_0(x, \xi) \} d\xi .$$

Poniamo

$$\sigma(x, y) = T_0(x, y) - S_0(x, y) ,$$

avremo che la equazione precedente si scriverà

$$(3)\qquad \sigma(x, y) = \int_x^y F_0(\xi, y)\, \sigma(x, \xi)\, d\xi$$

da cui segue

$$\sigma(x, y) = \int_x^y F_0(\xi, y)\, d\xi \int_x^\xi F_0(\xi_1, \xi)\, \sigma(x, \xi_1)\, d\xi_1$$

$$= \int_x^y F_0(\xi, y)\, d\xi \int_x^\xi F_0(\xi_1, \xi)\, d\xi_1 \int_x^{\xi_1} F_0(\xi_2, \xi_1)\, \sigma(x, \xi_2)\, d\xi_2 = \cdots$$

Si può in tal modo procedere indefinitamente sostituendo sempre a $\sigma(x, \xi_i)$ il valore che se ne ricava dalla formula (3). Chiamando dunque M′ il limite superiore dei valori assoluti di $F_0(x, y)$ ed m quello dei valori assoluti di $\sigma(x, y)$, si avrà

$$|\sigma(x, y)| \leq M'^n m \int_\alpha^\beta d\xi \int_\alpha^\xi d\xi_1 \cdots \int_\alpha^{\xi_{n-2}} d\xi_{n-1} = \frac{M'^n m (\beta - \alpha)^n}{n!}.$$

Siccome n è un numero che può scegliersi tanto grande quanto si vuole, così $|\sigma(x, y)|$ dovrà essere inferiore ad ogni quantità assegnabile, e perciò sarà

$$\sigma(x, y) = T_0(x, y) - S_0(x, y) = 0$$

e in conseguenza

$$S_0(x, y) = T_0(x, y) = \sum_0^\infty F_i(x, y).$$

Possiamo enunciare dunque il teorema:

Si hanno le due formule reciproche

$$(4)\qquad S_0(x, y) = \sum_0^\infty F_i(x, y), \qquad (4')\qquad F_0(x, y) = \sum_0^\infty S_i(x, y)$$

in cui

$$F_i(x,y) = \int_x^y F_{i-j}(x, \xi)\, F_{j-1}(\xi, y)\, d\xi, \qquad S_i(x,y) = \int_y^x S_{i-j}(x,\xi)\, S_{j-1}(\xi,y)\, d\xi.$$

Prendendo arbitrariamente una delle due funzioni finite e continue $S_0(x, y)$, $F_0(x, y)$ *si può calcolare l'altra mediante operazioni di quadratura. Inoltre si avrà*

$$F_0(x, y) - S_0(x, y) = \int_y^x F_0(x, \xi)\, S_0(\xi, y)\, d\xi = \int_y^x F_0(\xi, y)\, S_0(x, \xi)\, d\xi.$$

3. La risoluzione del problema della inversione degl' integrali definiti si può raggiungere in virtù del precedente teorema in maniera molto semplice.

Denotiamo infatti con $\varphi(x)$ una funzione finita e continua, e poniamo

$$\int_\alpha^y \varphi(x)\, F_0(x, y)\, dx = \varphi(y) - f(y).$$

Moltiplichiamo ambo i membri di questa equazione per $S_0(y, z)\,dy$ e integriamo fra α e z; si otterrà

$$\int_\alpha^z [\varphi(y) - f(y)]\, S_0(y, z)\, dy = \int_\alpha^z S_0(y, z)\, dy \int_\alpha^y \varphi(x)\, F_0(x, y)\, dx$$

e pel principio di Dirichlet, ed il precedente teorema,

$$\int_\alpha^z [\varphi(y) - f(y)]\, S_0(y, z)\, dy = \int_\alpha^z \varphi(x)\, dx \int_x^z S_0(y, z)\, F_0(x, y)\, dy$$

$$= \int_\alpha^z \varphi(x)\, [S_0(x, z) - F_0(x, z)]\, dx$$

quindi

$$\int_\alpha^z f(y)\, S_0(y, z)\, dy = \int_\alpha^z \varphi(x)\, F_0(x, z)\, dx = \varphi(z) - f(z).$$

Dunque *la formula*

$$\varphi(z) = f(z) + \int_\alpha^z f(y)\, S_0(y, z)\, dy \tag{5}$$

si può invertire e si ha l'altra

$$f(z) = \varphi(z) - \int_\alpha^z \varphi(x)\, F_0(x, z)\, dx. \tag{5'}$$

Prendendo arbitrariamente una delle due funzioni finite e continue $S_0(y, z)$ o $F_0(x, z)$ si può calcolare l'altra mediante le formule (4) e (4') date precedentemente. Quindi, scelta ad arbitrio una delle due funzioni finite e continue $\varphi(z)$ o $f(z)$, si ottiene l'altra funzione mediante una delle due formule (5) e (5'), e si vede che non vi è che la funzione $f(z)$ data dalla (5') che verifica la relazione funzionale (5) e reciprocamente non vi è che la $\varphi(z)$ data dalla (5) che soddisfa la (5').

Del resto è facile riconoscere che la operazione di passaggio dalla prima alla seconda formula è la stessa che quella di inversione della seconda nella prima. Si denoti infatti la $-F_0(x, y)$ con Φ, cioè scriviamo (1)

$$\Phi[S_0(x, y)] = -F_0(x, y);$$

allora tenendo conto delle operazioni di quadratura con cui partendo dalla F_0 si calcola la S_0, si avrà

$$\Phi[-F_0(x, y)] = S_0(x, y).$$

(1) È superfluo l'osservare che non deve confondersi la $\Phi[S_0(x, y)]$ con una funzione di funzione (Vedi: *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni,* nel vol. III di questi Rendiconti).

Possiamo dunque riassumere i resultati trovati nel seguente teorema:

Posto

$$\Phi[S(x, y)] = -\sum_0^\infty S_i(x, y)$$

in cui

$$S_0(x, y) = S(x, y) \quad , \quad S_i(x, y) = \int_y^x S_{i-j}(x, \xi)\, S_{j-1}(\xi, y)\, d\xi$$

si ha:

1°) *se* $S(x, y)$ *è una funzione finita e continua per i valori delle variabili compresi fra* α e β, *anche* $\Phi[S(x, y)]$ *è una funzione finita e continua entro gli stessi limiti;*

2°) *la funzione* Φ *gode della proprietà*

$$\Phi\Big[\Phi[S(x, y)]\Big] = S(x, y);$$

3°) *se* $\varphi(x)$ *è una funzione finita e continua e*

$$\text{(A)} \qquad \varphi(y) = f(y) + \int_\alpha^y f(x)\, S(x, y)\, dx \qquad (\beta > y > \alpha)$$

resulta

$$\text{(A')} \qquad f(y) = \varphi(y) + \int_\alpha^y \varphi(x)\, \Phi[S(x, y)]\, dx\,.$$

Nelle formule (A) e (A′) si ha $x < y$, quindi sarà sufficiente determinare $\Phi[S(x, y)]$ per valori di $x < y$, e perciò conoscere la funzione $S(x, y)$ solo corrispondentemente ai valori di x, y compresi fra α e β tali che $x < y$, onde basterà assicurarsi che $S(x, y)$ sia continua ed i suoi valori assoluti abbiano un limite superiore finito, per tutti i valori di x, y che soddisfano le condizioni

$$\beta > y > x > \alpha\,.$$

4. I varî problemi che si presentano di inversione di integrali definiti con limiti variabili, possono in generale risolversi facilmente ricorrendo alle formule ora stabilite. Esaminiamo infatti il problema di invertire l'integrale

$$(6) \qquad \theta(y) - \theta(\alpha) = \int_\alpha^y \psi(x)\, H(x, y)\, dx\,,$$

cioè determinare $\psi(x)$ conoscendo $\theta(y)$ e $H(x, y)$. Derivando si avrà

$$\theta'(y) = \psi(y)\, H(y, y) + \int_\alpha^y \psi(x) \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} dx$$

e dividendo per $H(y, y)$

$$\frac{\theta'(y)}{H(y, y)} = \psi(y) + \int_\alpha^y \psi(x) \left\{ \frac{1}{H(y, y)} \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \right\} dx\,.$$

Quindi se $\frac{\theta'(y)}{H(y,y)}$ è finita e continua e così pure $\frac{1}{H(y,y)}\frac{\partial H(x,y)}{\partial y}$, la (A') ci fornirà subito la soluzione del problema mediante operazioni di quadratura.

La questione può risolversi in un altro modo, sempre impiegando le formule precedenti. Infatti, mediante una integrazione per parti, la (6) può scriversi

$$\theta(y)-\theta(\alpha)=H(y,y)\,\Psi(y)-\int_\alpha^y \Psi(x)\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}\,dx$$

in cui

$$\Psi(y)=\int_\alpha^y \psi(x)\,dx$$

quindi

$$\frac{\theta(y)-\theta(\alpha)}{H(y,y)}=\Psi(y)-\int_\alpha^y \Psi(x)\left\{\frac{1}{H(y,y)}\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}\right\}dx.$$

Il procedimento precedentemente indicato ci darà la $\Psi(y)$ e perciò con una derivazione otterremo la $\psi(y)$.

Il caso in cui $H(x,y)$ per $x=y$ diviene infinito, in modo che si possa porre $H(x,y)=\frac{G(x,y)}{(x-y)^\lambda}$ con $G(x,y)$ finita e $\lambda<1$, sfugge all'analisi precedente, ma vi si riconduce facilmente moltiplicando ambo i membri per $\frac{dy}{(z-y)^{1-\lambda}}$ quindi integrando fra α e z.

Se $H(y,y)$ si annulla, il problema della inversione può in taluni casi risolversi univocamente, in altri resultare indeterminato.

Non mi dilungo nello svolgimento dei varî problemi di inversione, giacchè le formule che resultano applicando il procedimento indicato furono direttamente discusse e verificate in alcune Note da me recentemente lette all'Accademia di Torino (1); osserverò solo che il caso in cui si abbia

$$\theta(y)-\theta(\alpha)=\int_\alpha^{\chi(y)} \psi(x)\,H(x,y)\,dx$$

può in generale ricondursi al precedente, quando si ponga $\chi(y)=z$; d' onde se si può ricavare inversamente $y=\varrho(z)$, si otterrà

$$\theta(\varrho(z))-\theta(\alpha)=\int_\alpha^z \psi(x)\,H(x,\varrho(z))\,dx.$$

(1) Sedute del 12 e del 26 gennaio 1896. Una terza Nota sullo stesso soggetto sarà letta nella seduta dell'8 marzo.

5. Mostriamo ora come la questione trattata sia suscettibile di una generalizzazione, la quale rende possibile di risolvere in maniera semplice una classe molto estesa di problemi funzionali, che per quanto io so, non vennero fin qui considerati.

Supponiamo che gl' indici r, s possano prendere i valori $1, 2 \ldots n$ e consideriamo le n^2 funzioni finite e continue $S_{r,s}^{(0)}(x, y)$ per i valori delle variabili compresi fra α e β.

Formiamo

$$S_{r,s}^{(i)}(x, y) = \int_y^x \sum_1^n{}_h \, S_{r,h}^{(i-j)}(x, \xi)\, S_{h,s}^{(j-1)}(\xi, y)\, d\xi \tag{7}$$

dando ad i successivamente i valori $1, 2, 3 \ldots$ e prendendo $i \geq j \geq 1$. Si ha che $S_{r,s}^{(i)}$ non dipende da j e

$$S_{r,s}^{(i)}(x, y) \leq \frac{n^i\, M^{i+1}}{i\,!} (|y - x|)^i$$

chiamando M il massimo dei limiti superiori dei valori assoluti delle $S_{r,s}^{(0)}$; quindi le serie

$$F_{r,s}^{(0)}(x, y) = \sum_0^\infty{}_i \, S_{r,s}^{(i)}(x, y) \tag{8}$$

sono uniformemente convergenti e rappresentano funzioni finite e continue, e calcolando i resti di queste serie si giunge alle formule

$$F_{r,s}^{(0)}(x, y) - S_{r,s}^{(0)}(x, y) = \int_y^x \sum_1^n{}_h \, S_{r,h}^{0}(x, \xi)\, F_{h,s}^{(0)}(\xi, y)\, d\xi$$

$$= \int_y^x \sum_1^n{}_h \, S_{r,h}^{(0)}(\xi, y)\, F_{h,s}^{(0)}(x, \xi)\, d\xi$$

dalle quali si deduce che, *prese*

$$F_{r,s}^{(i)}(x, y) = \int_x^y \sum_1^n{}_h \, F_{r,h}^{(i-j)}(x, \xi)\, F_{h,s}^{(j-1)}(\xi, y)\, d\xi$$

si ha

$$S_{r,s}^{(0)} = \sum_0^\infty{}_i \, F_{r,s}^{(i)}(x, y).$$

Ciò premesso, siano $\varphi_r(x)$, $(r = 1, 2 \ldots n)$ n funzioni finite e continue e poniamo

$$\int_\alpha^y \sum_1^n{}_r \, \varphi_r(x)\, F_{s,r}^{(0)}(x, y)\, dx = \varphi_s(y) - f_s(y),$$

si avrà con semplici calcoli

$$\int_\alpha^z \sum_s^n{}_1 \left(\varphi_s(y) - f_s(y)\right) S_{h,s}^{(0)}(y, z)\, dy = \int_\alpha^z \sum_r^n{}_1 \varphi_r(x) \left(S_{h,r}^{(0)}(x, z) - F_{h,r}^{(0)}(x,z)\right) dx$$

e quindi

$$\int_\alpha^z \sum_s^n{}_1 f_s(y) S_{h,s}^{(0)}(y, z)\, dy = \int_\alpha^z \sum_r^n{}_1 \varphi_r(x) F_{h,r}^{(0)}(x, z)\, dx = \varphi_h(z) - f_h(z)$$

il che prova che *le equazioni funzionali*

$$\varphi_h(z) = f_h(z) + \int_\alpha^z \sum_s^n{}_1 f_s(y)\, S_{h,s}^{(0)}(y, z)\, dy \qquad (h = 1, 2 \dots n) \tag{9}$$

si invertono mediante le formule

$$f_h(z) = \varphi_h(z) - \int_\alpha^z \sum_r^n{}_1 \varphi_r(x) F_{h,r}^{(0)}(x, z)\, dx \qquad (h = 1, 2 \dots n) \tag{9'}$$

in cui le $F_{h,r}^{(0)}$ *si calcolano dalle* $S_{h,s}^{(0)}$ *per mezzo delle formule* (7) e (8).

Si supponga ora di dover risolvere il problema di determinare le funzioni finite e continue $f_1(x)$, $f_2(x) \dots f_n(x)$ che soddisfano le equazioni funzionali

$$(10)\quad \begin{cases} \theta_1(y) - \theta_1(\alpha) = \int_\alpha^y [f_1(x) H_{11}(x,y) + f_2(x) H_{12}(x,y) + \cdots + f_n(x) H_{1n}(x,y)] dx \\ \theta_2(y) - \theta_2(\alpha) = \int_\alpha^y [f_1(x) H_{21}(x,y) + f_2(x) H_{22}(x,y) + \cdots + f_n(x) H_{2n}(x,y)] dx \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \theta_n(y) - \theta_n(\alpha) = \int_\alpha^y [f_1(x) H_{n1}(x,y) + f_2(x) H_{n2}(x,y) + \cdots + f_n(x) H_{nn}(x,y)] dx \end{cases}$$

quando si suppongano note le funzioni finite continue e derivabili $\theta_i(y)$ e $H_{r,s}(x, y)$. Derivando le equazioni precedenti rapporto ad y, abbiamo

$$\theta_i'(y) = \sum_s^n{}_1 f_s(y)\, H_{i,s}(y, y) + \int_\alpha^z \sum_s^n{}_1 f_s(x)\, K_{i,s}(x, y)\, dx \tag{11}$$

supponendo

$$K_{i,s}(x, y) = \frac{\partial H_{i,s}(x.y)}{\partial y}.$$

Denotiamo con $D(x, y)$ il determinante

$$\begin{vmatrix} H_{11}, H_{12} \dots H_{1n} \\ H_{21}, H_{22} \dots H_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ H_{n1}, H_{n2} \dots H_{nn} \end{vmatrix}$$

e si ammetta $D(y, y)$ diverso da zero, e chiamiamo $h_{i,s}(y, y)$ gli elementi reciproci delle $H_{i,s}(y, y)$ divisi per $D(y, y)$. Dalle (11) segue

$$\sum_1^n{}_i\, h_{i,r}(y, y)\, \theta_i'(y) = f_r(y) + \int_\alpha^y \sum_1^n{}_s\, f_s(x) \sum_1^n{}_i\, h_{i,r}(y, y)\, K_{i,s}(x, y)\, dx$$

onde, posto

$$\sum_1^n{}_i\, h_{i,r}(y, y)\, \theta_i'(y) = \varphi_r(y)$$

$$\sum_1^n{}_i\, h_{i,r}(y, y)\, K_{i,s}(x, y) = S^{(0)}_{r,s}(x, y)$$

le equazioni precedenti diverranno

$$\varphi_r(y) = f_r(y) + \int_\alpha^y \sum_1^n{}_s\, f_s(x)\, S^{(0)}_{r,s}(x, y)\, dx$$

e perciò si otterranno le $f_s(x)$ applicando le (9').

Fisica. — *Il luogo d' emanazione dei raggi di Röntgen.* Nota del Corrispondente A. Ròiti.

Poche cose ho da aggiungere alla mia Nota presentata all' Accademia nella seduta del 1 marzo. In essa ho dato notizia di alcune esperienze dimostranti come i raggi di Röntgen partano e si propaghino in tutte le direzioni dai punti ove i raggi catodici colpiscono varî solidi: oltre il vetro e l' alluminio, anche la mica, il platino e la porcellana. Le impressioni in quelle esperienze sono sempre state ottenute rivolgendo la lastra fotografica dalla parte d' onde provengono i raggi catodici. Ora ne riferirò alcune altre, nelle quali l' ho rivolta invece alla faccia della lamina colpita da questi raggi, e vi ho ottenuto delle impressioni relativamente più intense.

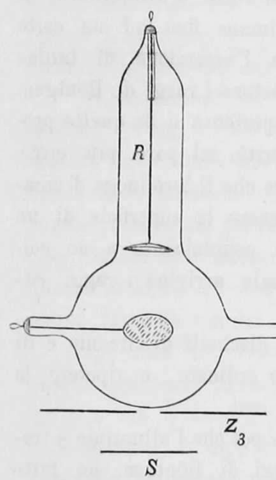

Fig. 1.

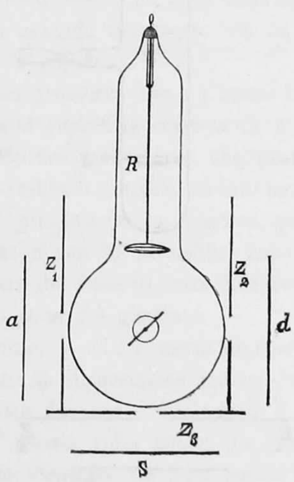

Fig. 2.

1. Nel collo del palloncino *R*, rappresentato a circa un terzo del vero nella fig. 1 di prospetto, e nella fig. 2 di profilo, si trova uno specchio