ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME V.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

il verso della concavità non esercitano influenza sensibile; ed inoltre che il trovarsi il vetro o l'alluminio a potenziali elettrici diversi, non altera la trasparenza di questi corpi per i raggi X.

Il tubo adoperato in queste prove del 14 marzo differisce da quelli delle prove precedenti, perchè i due specchi concavi, sempre aventi 40 mm. di raggio di curvatura, sono fra loro distanti di 60 mm., anzi che di 80 mm., e si trovano alla stessa distanza dai fondi, senza però che i fondi appariscano fluorescenti.

3. Mi propongo di sostituire in seguito allo specchio S uno scodellino contenente sostanze diverse, per vedere dall' impressione sulla lastra superiore se ed in quale misura queste sieno variamente propizie all' emanazione dei raggi di Röntgen.

Ho tentato anche di produrre questi raggi con un palloncino vuoto privo di elettrodi; ma nelle due prove che finora ho potuto fare, i palloncini si sono forati, non senza però che in uno di essi mi fosse dato di osservare due belle macchie fluorescenti alle estremità d'un diametro; ed insistendo, spero di riuscire ad ottenere delle fotografie anche in questo modo.

Aggiunta nel rivedere le prove di stampa. — Ci sono riuscito il 16 marzo con un palloncino sferico di vetro avente il diametro di 73 mm. Due callotte opposte, del diametro di 33 mm., che nelle prove dei giorni passati avevo inargentate, in questa le ho coperte di acqua, e nell' acqua ho tuffato i reofori del rocchetto di Ruhmkorff. Per ciò ho circondato ciascuna callotta con un grosso anello di mastice (colofonia e cera): l'anello superiore fa da vaschetta e l'inferiore pesca in una vaschetta col fondo di mica sottilissima. La lastra fotografica, ben protetta dalla luce e coperta poi di rete metallica, è a 20 mm. dalla mica.

Il rocchetto è eccitato con interruttore rapido, in maniera da dare scintille di 6 cm. nell'aria. Il palloncino risplende tutto di sola luce verde, ma con maggior intensità ai poli, che sono i vertici delle callotte, e dai poli partono dei fasci di luce lungo i meridiani, così da dare l'illusione come se entro il palloncino si muovesse un involucro sferico luminoso formato di spicchi.

Derivando al suolo una delle callotte, essa si oscura, come nell' esperienza rappresentata dalla fig. 1 della mia Nota del 1° marzo.

Matematica. — *Su di un teorema del sig. Netto relativo ai determinanti, e su di un altro teorema ad esso affine.* Nota di ERNESTO PASCAL, presentata dal Socio CREMONA.

Ultimamente il sig. Netto in un lavoro nel Giornale di Crelle (*Erweiterung des Laplaceschen Determinanten-Zerlegunssatzes.* Crelle, v. 114, p. 345, 1895) ha presentato una formola da considerarsi come un'estensione della cosiddetta regola di Laplace. Però la dimostrazione che l'autore dà di quel teorema lascia qualche cosa a desiderare dal punto di vista della semplicità e della eleganza.

Onde credo conveniente riprendere la quistione da un punto di vista che mi permetterà di dimostrare semplicemente il teorema in tutta la sua generalità, e che contemporaneamente mi potrà dare anche un altro teorema assai affine a quello, e che con quello si confonde solo in uno specialissimo caso.

§ 1.

Sia dato un determinante D di ordine $n + m$, e sopprimiamo le prime n linee e colonne; resta un determinante M di ordine m che noi svilupperemo colla formola di Laplace, cioè facendo la somma algebrica con segni opportuni dei prodotti dei minori contenuti in m_1 linee per i minori contenuti in altre m_2 linee, ecc., per i minori contenuti in m_k linee, dove

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_k = m$$

e due fattori di uno stesso prodotto sono sempre minori contenuti fra colonne tutte diverse.

In questo sommatorio, in luogo di ciascun fattore di ciascun termine poniamo quel minore, di tutto il determinante D, che si ottiene *sopprimendo in* D solo le medesime colonne e linee che bisognava sopprimere *nel determinante* M di ordine m per ottenere quel fattore. Il valore del sommatorio diventa allora il prodotto di D per la potenza $(k - 1)^{ma}$ del minore complementare di M, che chiameremo N, cioè del determinante racchiuso dalle n linee e colonne soppresse.

Ecco una semplicissima dimostrazione del teorema.

Formiamo il reciproco di D e sia $D' = D^{n+m-1}$; gli omologhi di N e M in D' sieno N', M'.

Sia

$$\Delta_{m_1}\, \Delta_{m_2} \ldots \Delta_{m_k}$$

un termine del sommatorio, dove Δ_{m_i} è di ordine $n + m_i$.

Moltiplichiamo questo termine per

$$D^{m-m_i-1}\; D^{m-m_2-1} \ldots D^{m-m_k-1}$$

e osserviamo che per i notissimi teoremi sui reciproci, il prodotto

$$D^{m-m_i-1}\; \Delta_{m_i}$$

è un minore di M' di ordine $m - m_i$, e propriamente quel minore di M' il cui omologo in M ha per complemento in M quel minore che si ottiene da Δ_{m_i} sopprimendovi le n colonne e linee. Si riconosce così che, dopo effettuato il prodotto indicato, il sommatorio diventa ciò che si otterrebbe se si sviluppasse il determinante M′ colla regola di Laplace, e indi in luogo di ogni minore di ordine $m_1\ m_2 \ldots$ si sostituisce il proprio complemento di ordine $m - m_1$, $m - m_2, \ldots$

È facile mostrare che così operando si ottiene allora il determinante su cui si opera elevato alla potenza $k - 1$ [1]; dunque possiamo dire che il sommatorio primitivo moltiplicato per

$$D^{(m-1)k-m}$$

è eguale a

$$M'^{k-1} = N^{k-1}\, D^{(m-1)(k-1)}$$

donde infine

$$\sum \pm \Delta_{m_1} \ldots \Delta_{m_k} = D \,.\, N^{k-1}$$

§ 2.

Accanto al teorema di Netto dimostrato nel § precedente, cogli stessi principii ne possiamo trovare un altro.

Come nel § precedente formiamo secondo la regola di Laplace lo sviluppo di M, cioè del determinante ottenuto da un dato D di ordine $n + m$ sopprimendo n linee ed n colonne. Indi ad ogni minore di M che comparisce nella formola sostituiamo il proprio complemento, e infine ognuno dei minori così formati rendiamolo di ordine $n + (m - m_i)$ aggiungendo le n linee e n colonne soppresse in D.

Quale sarà allora il valore del sommatorio?

Moltiplichiamo ciascun termine per

$$D^{m_1 - 1}\, D^{m_2 - 1} \ldots D^{m_k - 1}$$

e osserviamo che allora ogni termine diventa il prodotto di k minori di M′, uno di ordine m_1, uno di ordine m_2, e infine l'ultimo di ordine m_k; il som-

[1] È facile dimostrare questo risultato. Sia dato un determinante A di ordine m. Formando i minori come occorre per applicare la regola di Laplace si ha

$$\sum \pm \Delta_{m_1} \Delta_{m_2} \ldots \Delta_{m_k} = A.$$

Di ogni Δ_{m_2} formiamo il suo complemento e sia Δ_{m-m_2}; vogliamo trovare il valore del sommatorio

$$\sum \pm \Delta_{m-m_1} \ldots \Delta_{m-m_k}.$$

Di A formiamo il reciproco e sia A′ e sviluppiamo A′ secondo prodotti di minori omologhi ai $\Delta_{m_1} \ldots \Delta_{m_k}$. Si ha

$$\sum \pm \Delta'_{m_1} \ldots \Delta'_{m_k} = A' = A^{m-1}.$$

E potendosi ogni Δ' esprimere mediante i Δ_{m-m_i} e potenze di A, si ha infine il risultato annunciato nel testo.

matorio diventa allora esattamente lo sviluppo del determinante M′ e quindi eguale a

$$\mathrm{N} \,.\, \mathrm{D}^{m-1}.$$

Sopprimendo al primo e secondo membro il fattore comune D^{m-k}, resta

$$\sum \pm \Delta_{m-m_1} \Delta_{m-m_2} \ldots \Delta_{m-m_k} = \mathrm{A}^{k-1}\, \mathrm{N}.$$

Si ha in certo modo un risultato inverso a quello che si raggiunge colla formola di Netto, in quantochè restano come invertiti fra loro i due determinanti D e il suo minore N.

È evidente che per $k = 2$, i due teoremi si confondono.

Di questi teoremi si può dare una estensione, come farò vedere in altro lavoro in corso di stampa negli *Annali di Matematica.*

Matematica. — *Sopra le superficie algebriche di cui le curve canoniche sono iperellittiche.* Nota di FEDERIGO ENRIQUES, presentata dal Socio CREMONA.

1. Nella teoria delle superficie hanno fondamentale importanza le così dette curve *canoniche* (sezioni della superficie supposta d'ordine n con superficie aggiunte d'ordine $n - 4$) possedenti carattere invariantivo rispetto a trasformazioni birazionali.

Il numero delle curve canoniche linearmente indipendenti è il genere (geometrico superficiale) p della superficie, mentre il genere di esse curve ne costituisce il 2° genere o *genere lineare* $p^{(1)}$.

Le superficie ($p > 1$, $p^{(1)} = 1$) di cui le curve canoniche sono (irriducibili) ellittiche o si spezzano in curve ellittiche (d'un fascio) sono state considerate dal sig. Noether (1). Nello stesso lavoro il sig. Noether ha dimostrato che le superficie a curve canoniche irriducibili hanno il genere lineare $p^{(1)} \geq 2p - 3$, e che il valore minimo $p^{(1)} = 2p - 3$ si ottiene in corrispondenza alle superficie di cui le curve canoniche sono iperellittiche.

A queste superficie è dedicata la presente Nota, nella quale mi propongo dunque di determinare tutti i tipi di superficie aventi curve canoniche irriducibili iperellittiche ($p > 2$, $p^{(1)} > 1$).

E innanzi tutto un richiamo per spiegare come deve intendersi l'irriducibilità del sistema canonico (2).

(1) *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde.* Mathem. Annalen VIII.

(2) Per questa osservazione e per l'altra contenuta nel § 2 riferentisi alla teoria generale delle superficie, si può confrontare la mia: *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (Memorie dell'Accad. dei XL, 1896).