ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME V.

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

condario nel mese di Febbraio tanto per il numero, che per la estensione delle macchie e frequenza dei gruppi. Le osservazioni furono fatte da me in 61 giorni e in 12 dall'assistente sig. Palazzo. Per le protuberanze abbiamo ottenuto i dati seguenti:

1896

MESI	Numero dei giorni di osservazione	Medio numero delle protuberanze per giorno	Media altezza per giorno	Estensione media	Media delle massime altezze	Massima altezza osservata
Gennaio . .	23	5,22	40″,4	2°,3	53″,0	90″
Febbraio. .	24	5,79	41,7	2,0	65,2	290
Marzo. . . .	16	4,56	34,0	1,3	42,7	65
Trimestre .	63	5,27	39,3	2,0	55,0	290

Nel fenomeno delle protuberanze si ha invece un leggiero aumento in confronto dell' ultimo trimestre del 1895 ed è pure da notare, come per le macchie, il massimo secondario nel mese di Febbraio, sebbene di minore importanza. Le osservazioni furono eseguite da me in 55 giornate ed in 8 dal sig. Palazzo.

Meteorologia. — *Riassunto delle osservazioni meteorologiche fatte all'Osservatorio Etneo.* Nota del Corrispondente A. Riccò.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Operazioni distributive: l'integrazione successiva.* Nota del Corrispondente S. Pincherle.

1. Col nome di *elemento* designeremo in ciò che segue una serie

$$\alpha(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{1}$$

ordinata per le potenze intere e positive della variabile x che supporremo convergente nel cerchio (r), cioè pei valori di x il cui modulo è minore del numero positivo r. Un elemento si dirà dato, o variabile, o arbitrario, a seconda che saranno dati, o variabili, o arbitrarî i suoi coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Indicheremo con $\overline{\alpha}(x)$ l'elemento che si ottiene sostituendo ad ogni coefficiente a_r di $\alpha(x)$ il rispettivo modulo $|a_n|$, talchè sarà

$$\overline{\alpha}(x) = |a_0| + |a_1| x + |a_2| x^2 + \cdots + |a_n| x^n + \cdots ;$$

Questo elemento convergerà nello stesso cerchio (r) di $\alpha(x)$, e per ogni punto x interno a quel cerchio si avrà

$$|\alpha(x)| \leq \overline{\alpha}(|x|).$$

2. L'integrazione indefinita applicata all'elemento $\alpha(x)$ ci darà un elemento convergente entro il medesimo cerchio, in cui rimarrà però indeterminato il termine indipendente da x. Volendo togliere questa indeterminatezza, potremo convenire di determinare la costante d'integrazione in modo che se $\alpha(x)$ è nullo dell'ordine m per $x=0$, l'integrale sia nullo dell'ordine $m+1$: fatta questa convenzione, l'operazione d'integrazione viene ad essere resa *ad un valore*, cioè tale che applicata ad un elemento determinato dà come risultato un elemento unico e determinato; essa è inoltre un'operazione distributiva. Usando, come al solito, il simbolo D ad indicare l'operazione di derivazione, indicheremo con D^{-1} l'operazione di integrazione determinata come si è detto, e colla reiterazione di essa avremo le operazioni distributive $\mathrm{D}^{-2}, \mathrm{D}^{-3}, \ldots$ esse pure determinate ad un valore dalla condizione che D^{-p}, applicata ad un elemento che si annulla dell'ordine m per $x=0$, dia per risultato un elemento che vi si annulla dell'ordine $m+p$.

Essendo r_1 un numero positivo arbitrario inferiore ad r, si ha immediatamente, per $|x| \leq r_1$,

$$(2) \qquad |\mathrm{D}^{-1}\alpha(x)| < r_1\,\overline{\alpha}(r_1), \quad |\mathrm{D}^{-n}\alpha(x)| < \frac{r_1^n}{n!}\,\alpha(r_1).$$

3. L'operazione funzionale D^{-1} può venire rappresentata mediante una serie ordinata per le potenze intere positive del simbolo operatorio D della derivazione. Indicando infatti per un momento con $\beta(x)$ il risultato di D^{-1} applicata ad $\alpha(x)$, si ha per $|x| < \frac{1}{2}r$:

$$\beta(x-x) = \beta(x) - x\,\mathrm{D}\beta + \frac{x^2}{1\,.\,2}\,\mathrm{D}^2\beta - \cdots$$

e ponendo per β la sua espressione $\mathrm{D}^{-1}\alpha$ e per $\beta(0)$ il suo valore, che è zero, viene:

$$(3) \qquad \mathrm{D}^{-1}\alpha = x\alpha - \frac{x^2}{1\,.\,2}\,\mathrm{D}\alpha + \frac{x^3}{3!}\,\mathrm{D}^2\alpha - \cdots$$

Questa serie converge assolutamente ed in ugual grado entro il cerchio $\left(\frac{1}{2}r\right)$: essendo infatti

$$|x| \leq r' < \frac{r}{2}$$

viene

$$|\alpha(x)| \leq \overline{\alpha}(r'), \quad |\mathrm{D}^n\alpha(x)| \leq \mathrm{D}^n\overline{\alpha}(r'),$$

onde i termini del secondo membro della (3) sono minori di quelli della serie convergente a termini positivi

$$\sum \frac{r'^n}{n!} D^n \overline{\alpha}(r'), \tag{4}$$

4. Se nella formula (3) mutiamo α in $D^{-1}\alpha$, otteniamo con facile riduzione

$$D^{-2}\alpha = \frac{x^2}{2}\alpha - \frac{x^3}{3.1} D\alpha + \frac{x^4}{4.2!} D^2\alpha - \frac{x^5}{5.3!} D^3\alpha + \cdots; \tag{5}$$

in generale, vale la formula

$$D^{-n}\alpha = \frac{x^n}{n-1!} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^\nu}{(n+\nu).\nu!} D^\nu\alpha \tag{5}$$

che si dimostra coll'usuale metodo di recursione, ammettendola vera per l'indice $n-1$ e mostrando quindi, col mutamento di α in $D^{-1}\alpha$, che essa vale per l'indice successivo n.

La serie (4) è essa pure convergente assolutamente ed in ugual grado entro il cerchio $\left(\frac{1}{2}r\right)$, poichè per $|x| \leq r' < \frac{1}{2}r$, i termini di essa serie sono minori rispettivamente, in valore assoluto, dei termini della serie convergente e a termini positivi:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{r'^{\,n+\nu}}{n!\,\nu!} D^\nu \overline{\alpha}(r').$$

5. Siano ora $\alpha(x)$, $\beta(x)$ due elementi convergenti nel cerchio (r), $\overline{\alpha}$ e $\overline{\beta}$ ciò che essi divengono mutando ogni coefficiente nel rispettivo valore assoluto, e consideriamo l'operazione D^{-1} applicata al prodotto $\alpha\beta$. Integriamo per parti successivamente, determinando sempre l'integrazione nel modo convenuto, ed avremo

$$\begin{aligned}
&D^{-1}\alpha\beta = \alpha D^{-1}\beta - D^{-1}(D\alpha \,.\, D^{-1}\beta),\\
&D^{-1}\alpha\beta = \alpha D^{-1}\beta - D\alpha \,.\, D^{-2}\beta + D^{-1}(D^2\alpha \,.\, D^{-2}\beta),\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&D^{-1}\alpha\beta = \alpha D^{-1}\beta - D\alpha \,.\, D^{-2}\beta + D^2\alpha \,.\, D^{-3}\beta - \cdots\\
&\qquad \cdots + (-1)^{n-1} D^{n-1}\alpha \,.\, D^{-n}\beta + (-1)^n D^{-1}(D^n\alpha \,.\, D^{-n}\beta).
\end{aligned} \tag{6}$$

Esaminando l'ultimo termine, abbiamo che per

$$(x) \leq r' < \frac{1}{2}r,$$

sarà

$$|D^n\alpha| \leq D^n \overline{\alpha}(r'),$$

e per la (2):

$$|D^{-n}\beta(x)| < \frac{r'^n}{n!}\overline{\beta}(r')$$

onde

$$|D^{-1}(D^n\alpha \,.\, D^{-n}\beta)| < \frac{r'^{n+1}}{n!} D^n\overline{\alpha}(r') \,.\, \overline{\beta}(r');$$

ora per le ipotesi fatte, la serie a termini positivi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{n!} D^n\overline{\alpha}(r')$$

è convergente, onde il termine ultimo della (6), $D^{-1}(D^n\alpha \,.\, D^{-n}\beta)$, tende a zero per $n = \infty$; da ciò risulta dimostrata la convergenza della serie che si ottiene facendo $n = \infty$ nel secondo membro della (6), e dalle considerazioni stesse che si sono fatte emerge inoltre la convergenza in ugual grado ed assoluta della serie stessa per $|x| < \frac{1}{2}r$. Siamo giunti in tal modo alla formula:

$$D^{-1}\alpha\beta = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n D^n\alpha \,.\, D^{-(n+1)}\beta, \tag{7}$$

valida per ogni coppia di elementi α, β convergenti in un cerchio comune (r) di centro 0 e pei valori di x compresi nel cerchio $\left(\frac{1}{2}r\right)$.

Le serie (3), (5), (7) procedono per le derivate successive della funzione arbitraria α; esse appartengono quindi alla classe di serie che ho considerate in un recente lavoro (1) e precisamente sono fra quelle che ho dette *di prima specie*, cioè al cui campo funzionale di convergenza appartiene ogni funzione regolare in un intorno di $x = 0$.

La formula (7) si può dire in qualche modo l'analoga, nel calcolo funzionale, di ciò che è la serie geometrica nella teoria delle funzioni.

Con procedimento analogo si giunge alla formola più generale

$$D^{-m}\alpha\beta = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \binom{m+n-1}{n} D^n\alpha \,.\, D^{-(m+n)}\beta, \tag{7'}$$

di cui lo stesso ragionamento fatto per la (7) vale a provare la convergenza per $|x| < \frac{1}{2}r$.

6. Nella formula (7), se alle $D^{-n}\beta$ sostituiamo i loro sviluppi (5), otteniamo una serie doppia, che risulta però convergente assolutamente e che

(1) *Della validità effettiva di alcuni sviluppi.* Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, 19 gennaio 1896.

quindi si può sommare nell'ordine che più aggrada pei valori di x compresi nel cerchio $\left(\frac{1}{2}r\right)$. Infatti, il termine generale di questa serie doppia sarà

$$(-1)^{\nu} \frac{x^{n+\nu}}{(n-1)!\,\nu!\,(n+\nu)} \mathrm{D}^{\nu}\beta(x)\,\mathrm{D}^{n-1}\alpha(x),$$

il cui modulo, per $|x|<r'$, è minore della quantità positiva

$$\frac{r'^{\,n+\nu}}{\overline{n-1}!\,\nu!} \mathrm{D}^{\nu}\overline{\beta}(r')\,\mathrm{D}^{n-1}\overline{\alpha}(r')$$

e la serie doppia formata con questi termini positivi e che risulta dal prodotto delle serie

$$\sum \frac{r'^{\,n-1}}{\overline{n-1}!} \mathrm{D}^{n-1}\overline{\alpha}(r') \quad \sum \frac{r'^{\,\nu}}{\nu!} \mathrm{D}^{\nu}\overline{\beta}(r')$$

è certamente convergente per $r' < \frac{1}{2}r$.

Una analoga osservazione vale per le serie (7').

7. Abbiasi una successione infinita di elementi $\lambda_0, \lambda_1 \dots \lambda_n, \dots$ con

$$\lambda_n(x) = a_{n.0} + a_{n.1}\,x + a_{n.2}\,x^2 + \cdots + a_{n.\nu}\,x^{\nu} + \cdots,$$

i quali siano convergenti in un cerchio comune (r), e si consideri la serie

$$\mathrm{S}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\,\mathrm{D}^{-n}\varphi \tag{8}$$

dove φ è un elemento arbitrario convergente nel medesimo cerchio (r).

Per poter parlare della convergenza nella serie (8), occorre naturalmente assoggettare i suoi coefficienti λ_n a qualche limitazione. Noi porremo la seguente, assai poco restrittiva, essendo essa, come è facile vedere, soddisfatta in casi estesissimi: ammetteremo che esistano tre numeri positivi $r_1 < r$, g e c qualunque, tali che essendo l_n il limite superiore dei moduli di $\alpha_n(x)$ nel cerchio (r_1), si abbia

$$l_n < g\,n!\,c^n. \qquad (n = 0, 1, 2, \dots \infty). \tag{9}$$

Sotto questa condizione, la serie (8) risulta convergente assolutamente ed in ugual grado per i valori di x tali che sia

$$|x| \leq r_2 < r_1 < r:$$

essa darà quindi un elemento di funzione analitica pure regolare nel cerchio (r_1), ed S sarà pertanto simbolo di un'operazione funzionale distributiva.

A dimostrare ciò, indichiamo ancora con $\overline{\varphi}$ ciò che diviene φ quando si cambia ogni coefficiente di questo elemento nel rispettivo valore assoluto; avremo in forza della (2):

$$|\lambda_n(x)\, \mathrm{D}^{-n}\varphi(x)| < g\, c^n\, r_2{}^n\, \overline{\varphi}(r_2)\,;$$

basta ora fare

$$r_2 < \frac{c'}{c}\,,$$

essendo c' un numero positivo arbitrario minore dell' unità, per rendere la (8) convergente assolutamente ed in ugual grado in un intorno di $x = 0$, qualunque sia l' elemento φ.

Risulta da ciò che sotto la condizione (9) e pei valori di x indicati, alla serie (8) si può applicare la derivazione termine a termine.

8. Se una serie della forma (8) in cui la condizione (9) si suppone soddisfatta, è tale da dare come risultato lo zero per ogni elemento φ che in essa si sostituisca, ne saranno identicamente nulli tutti i coefficienti. Potremo anzi dimostrare che basta che la (8) si annulli quando si pone per φ una qualunque potenza intera positiva x^h della variabile, perchè siano identicamente zero tutti gli elementi $\lambda_0\,, \lambda_1\,, \lambda_2\,, \ldots$

Presa infatti $\varphi = x^h$, viene

$$\mathrm{D}^{-1}\varphi = \frac{x^{h+1}}{h+1}\,, \;\ldots\; \mathrm{D}^{-n}\varphi = \frac{x^{h+n}}{(h+1)\,(h+2)\ldots(h+n)}\,,$$

onde

$$\mathrm{S}(x^h) = x^h \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n.0} + a_{n.1}\, x + a_{n.2}\, x^2 + \cdots) \frac{x^n}{(h+1)\ldots(h+n)} = 0\,.$$

Ordinando per le potenze di x, il che è lecito per l' ammessa convergenza in ugual grado che è conseguenza della condizione (9), verrà

$$a_{0.0} = 0\,,\; a_{0.1} + \frac{a_{1.0}}{h+1} = 0\,, \ldots$$

ed in generale

$$a_{0.\nu} + \frac{a_{1.\nu-1}}{h+1} + \frac{a_{2.\nu-2}}{(h+1)\,(h+2)} + \cdots + \frac{a_{\nu.0}}{(h+1)\,(h+2)\ldots(h+\nu)} = 0\,.$$

Fissato ν, questa relazione ha luogo per ogni valore di h e si può scrivere:

$$(10)\quad a_{0.\nu}(h+1)\,(h+2)\ldots(h+\nu) + a_{1.\nu-1}(h+2)\ldots(h+\nu) + \cdots + a_{\nu.0} = 0\,.$$

Mutando h in $h+1\,, h+2\,, \ldots h+\nu$, avremo un sistema di $\nu+1$ equazioni lineari omogenee fra le $a_{0.\nu}\,, a_{1.\nu-1}\,, \ldots a_{\nu.0}$; ora, se questi coefficienti non fossero tutti nulli, dovrebbe essere nullo il determinante

$$\begin{vmatrix} (h+1)\,(h+2)\ldots(h+\nu) & (h+2)\ldots(h+\nu) \ldots\ldots & h+\nu & 1 \\ (h+2)\,(h+3)\ldots(h+\nu+1) & (h+3)\ldots(h+\nu+1) \ldots & h+\nu+1 & 1 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ (h+\nu+1)\,(h+\nu+2)\ldots(h+2\nu) & (h+\nu+2)\ldots(h+2\nu) \ldots & h+2\nu & 1 \end{vmatrix}$$

Ma questo determinante si riduce facilmente, colla sottrazione di ogni orizzontale dalla successiva, al prodotto di $\nu\,!$ per il determinante di forma analoga ma di ordine minore

$$\begin{vmatrix} (h+2)(h+3)\dots(h+\nu) & (h+3)\dots(h+\nu) & \dots\dots & h+\nu & 1 \\ (h+3)(h+4)\dots(h+\nu+1) & (h+4)\dots(h+\nu) & \dots\dots & h+\nu+1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (h+\nu+1)(h+\nu+2)\dots(h+2\nu-1) & (h+\nu+2)\dots(h+2\nu-1) & \dots & h+2\nu-1 & 1 \end{vmatrix}$$

Reiterando la medesima riduzione, si giunge finalmente a porre il determinante del sistema considerato sotto forma di un prodotto di fattoriali per il determinante

$$\begin{vmatrix} h+\nu & 1 \\ h+\nu+1 & 1 \end{vmatrix}$$

certamente differente da zero. Ne risulta che tutti i coefficienti $a_{n,\nu}$ delle λ_n sono nulli, c. d. d.

Il teorema ora dimostrato si estende, colla medesima dimostrazione, alle serie della forma

$$\sum_{n=-m}^{\infty} \lambda_n \, D^{-n}\varphi \, .$$

Dal teorema precedente risulta immediatamente che se due serie $S(\varphi)$, $S_1(\varphi)$ della forma (8) dànno identico risultato per ogni elemento φ, esse dovranno essere identiche nei loro coefficienti. Da ciò l'estensione del metodo dei coefficienti indeterminati alle serie (8), metodo di cui mostreremo, in una prossima Nota, l'applicazione all'interpolazione funzionale e all'integrazione delle equazioni differenziali lineari non omogenee.

Matematica. — *Operazioni distributive: le equazioni differenziali lineari non omogenee.* Nota del Corrispondente S. PINCHERLE.

Matematica. — *Sulla inversione degli integrali multipli.* Nota del Corrispondente VITO VOLTERRA.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.