ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME V.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

Matematica. — *Sulle equazioni differenziali delle quadriche di uno spazio ad n dimensioni.* Nota di LUIGI BERZOLARI, presentata dal Socio BELTRAMI.

Nel lavoro che ha per titolo *Sur le contact des surfaces* (¹), l' Halphen, prendendo occasione da un'osservazione già fatta dall'Hermite (²) a proposito della ricerca delle quadriche tangenti in un punto dato ad una data superficie, ha rilevato come tale questione, e più in generale la questione analoga in cui si tratti, anzichè di quadriche, di superficie algebriche di un dato ordine m, equivale a quella di assegnare le equazioni alle derivate parziali di ordine minimo, non contenenti nessuna costante arbitraria, alle quali soddisfanno le superficie d'ordine m. Dopo aver indicato un metodo per determinare siffatte equazioni, ha poi trovato in particolare che *le superficie di 2° grado soddisfanno a due equazioni alle derivate parziali del 3° ordine,* le quali si ottengono scrivendo le condizioni perchè il polinomio di 3° grado in α

$$\alpha^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3\alpha^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 3\alpha \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

sia divisibile per il polinomio di 2° grado

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

e sono appunto quelle che già l'Hermite (³) aveva indicato per la possibilità del contatto di 3° ordine fra una data superficie ed una superficie di 2° grado.

Volendo ora risolvere il medesimo problema per le quadriche (ad $n-1$ dimensioni) di uno spazio ad un numero qualunque $n\,[>2$ (⁴)] di dimensioni, basterebbe ripetere gli stessi ragionamenti fatti dall'Halphen nei nⁱ. 4 e 5 del l. c., e si concluderebbe che tali quadriche debbono soddisfare ad

$$\frac{1}{6}\,n(n^2-7)+1$$

equazioni (⁵) alle derivate parziali del 3° ordine (non contenenti nè le coor-

(¹) Bulletin de la Société Math. de France, t. III, pag. 28.

(²) *Cours d'analyse de l'École polytechnique,* 1873, pag. 139 e segg.

(³) L. c., pag. 148-149.

(⁴) Il caso delle coniche ($n=2$) dev'essere trattato a parte, perchè l'equazione differenziale corrispondente è del 5° ordine. Un metodo diretto e semplicissimo per trovarla è stato indicato dall'Halphen nella Nota *Sur l'équation différentielle des coniques* (Bulletin de la Soc. Math. de France, t. VII, pag. 83), la lettura della quale ha appunto dato occasione al presente lavoro. Il metodo dell' Halphen è stato riprodotto dal Jordan a pag. 157-158 del 1° volume del suo *Cours d'analyse de l'École polytechnique* (2ª edizione, 1893).

(⁵) Cioè ad una di più del numero che verrebbe assegnato dalla teoria generale: cfr. ad es. Jordan, l. c., pag. 159.

dinate nè le derivate parziali di 1° ordine), e che queste equazioni si possono ottenere in modo analogo a quello accennato poc' anzi.

Ma è facile riconoscere con qualche esempio che le equazioni, a cui si sarebbe condotti per tal via, non presentano tutte la forma più semplice possibile; in ogni modo, ad ottenerle effettivamente per un valore qualsiasi di n, si richiederebbe qualche ulteriore sviluppo.

Perciò in questa Nota mi propongo di esporre un altro metodo, per mezzo del quale le dette equazioni vengono direttamente stabilite sotto forma esplicita ed assai semplice: esso si desume da una formola, che dimostro nel n. 1, e che, oltre a presentare interesse anche in sè, fornisce altresì, in un suo caso particolare, una notevole espressione della *curvatura* (di Kronecker) di una quadrica di un iperspazio.

1. In uno spazio (euclideo) di n dimensioni siano $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z$ le coordinate cartesiane di un punto; allora la z del punto corrente di una quadrica data in quello spazio si può esprimere, in funzione delle rimanenti coordinate, come segue:

$$z = \mathrm{L} \pm \Phi^{\frac{1}{2}}, \tag{1}$$

dove L è un polinomio di 1° grado nelle $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, e Φ è un polinomio di 2° grado nelle stesse variabili. Per simmetria daremo a Φ (che solo interverrà nelle relazioni seguenti) forma omogenea introducendo una nuova variabile x_n, cioè porremo

$$\Phi = \sum_i \sum_k a_{ik}\, x_i\, x_k \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

intendendo che sia $x_n = 1$. Chiamando Φ_i la semiderivata di Φ rapporto ad x_i, cioè ponendo

$$\Phi_i = \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}\, x_j,$$

risulta:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} &= \pm \Phi^{-\frac{3}{2}}(a_{ii}\,\Phi - \Phi_i^2), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_i\, \partial x_j} &= \pm \Phi^{-\frac{3}{2}}(a_{ij}\,\Phi - \Phi_i\,\Phi_j). \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Ora formiamo il determinante simmetrico

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_2\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2\,\partial x_{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1}\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1}\,\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1}^2} \end{vmatrix}, \tag{3}$$

e consideriamone uno qualunque dei minori d' ordine $r\,(\leq n-1)$ costruito intorno alla diagonale principale. Prendendo, per fissar le idee, quello che si trae dalle prime r linee di (3), poniamo per brevità

$$Z^{(1,2,\dots,r)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots\dots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_r \partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_r \partial x_2} & \dots\dots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_r^2} \end{vmatrix}.$$

Per le (2) avremo:

$$Z^{(1,2,\dots,r)} = \Phi^{-\frac{3r}{2}} \begin{vmatrix} a_{11}\,\Phi - \Phi_1^2 & a_{12}\,\Phi - \Phi_1\,\Phi_2 \dots\dots & a_{1r}\,\Phi - \Phi_1\,\Phi_r \\ \dots & \dots\dots\dots\dots & \dots \\ a_{r1}\,\Phi - \Phi_r\,\Phi_1 & a_{r2}\,\Phi - \Phi_r\,\Phi_2 \dots\dots & a_{rr}\,\Phi - \Phi_r^2 \end{vmatrix},$$

ossia

$$Z^{(1,2,\dots,r)}\,\Phi^{\frac{r+2}{2}} = \Phi \begin{vmatrix} a_{11}\; a_{12} \dots\dots a_{1r} \\ a_{21}\; a_{22} \dots\dots a_{2r} \\ \dots\dots\dots \\ a_{r1}\; a_{r2} \dots\dots a_{rr} \end{vmatrix} - \sum_{i=1}^{i=r} \Phi_i \begin{vmatrix} a_{11} \dots\dots a_{1,i-1}\; \Phi_1\; a_{1,i+1} \dots\dots a_{1r} \\ a_{21} \dots\dots a_{2,i-1}\; \Phi_2\; a_{2,i+1} \dots\dots a_{2r} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1} \dots\dots a_{r,i-1}\; \Phi_r\; a_{r,i+1} \dots\dots a_{rr} \end{vmatrix},$$

dove al secondo membro, quando r sia dispari, va premesso il doppio segno $\pm$. Svolgendo secondo gli elementi della colonna i^{ma} il determinante che nel secondo membro figura come coefficiente di Φ_i, si ottiene

$$\begin{vmatrix} a_{11}\; a_{12} \dots\dots a_{1r} \\ a_{21}\; a_{22} \dots\dots a_{2r} \\ \dots\dots\dots \\ a_{r1}\; a_{r2} \dots\dots a_{rr} \end{vmatrix} x_i + \sum_{j=1}^{j=n-r} \begin{vmatrix} a_{11} \dots\dots a_{1,i-1}\; a_{1,r+j}\; a_{1,i+1} \dots\dots a_{1r} \\ a_{21} \dots\dots a_{2,i-1}\; a_{2,r+j}\; a_{2,i+1} \dots\dots a_{2r} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1} \dots\dots a_{r,i-1}\; a_{r,r+j}\; a_{r,i+1} \dots\dots a_{rr} \end{vmatrix} x_{r+i}.$$

Perciò, sostituendo, osservando che

$$\Phi - \sum_{i=1}^{i=r} \Phi_i\, x_i = \sum_{i=1}^{i=n-r} \Phi_{r+i}\, x_{r+i},$$

e ordinando rispetto alle $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$, risulta:

$$Z^{(1,2,\dots,r)}\,\Phi^{\frac{r+2}{2}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{j=n-r} x_{r+j} \left\{ \Phi_{r+j} \begin{vmatrix} a_{11} \dots\dots a_{1r} \\ \dots\dots\dots \\ a_{r1} \dots\dots a_{rr} \end{vmatrix} - \sum_{i=1}^{i=r} \Phi_i \begin{vmatrix} a_{11} \dots\dots a_{1,i-1}\; a_{1,r+j}\; a_{1,i+1} \dots\dots a_{1r} \\ a_{r1} \dots\dots a_{r,i-1}\; a_{r,r+j}\; a_{r,i+1} \dots\dots a_{rr} \end{vmatrix} \right\}.$$

Il coefficiente di x_{r+j} nel secondo membro si può scrivere sotto forma di un unico determinante come segue:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1r} & a_{1,r+j} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2r} & a_{2,r+j} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} \dots & a_{rr} & a_{r,r+j} \\ \Phi_1 & \Phi_2 \dots & \Phi_r & \Phi_{r+j} \end{vmatrix},$$

e questo alla sua volta, sviluppato secondo gli elementi dell'ultima linea decomposti nei loro termini, equivale alla somma

$$\sum_{i=1}^{i=n-r} x_{r+i} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+j} \\ a_{21} & \dots & a_{2r} & a_{2,r+j} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{r,r+j} \\ a_{r+i,1} & \dots & a_{r+i,r} & a_{r+i,r+j} \end{vmatrix}.$$

Se quindi per brevità chiamiamo $\Delta_{ij} (= \Delta_{ji})$ il determinante che qui figura come coefficiente di x_{r+i}, cioè il determinante d'ordine $r+1$ che si ottiene orlando il determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1r} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{r1} \dots a_{rr} \end{vmatrix}$$

cogli elementi $a_{1,r+i}, a_{2,r+i}, \dots, a_{r+j,r+i}$ ed $a_{1,r+j}, a_{2,r+j}, \dots, a_{r+i,r+j}$, risulta finalmente:

$$Z^{(1,2,\dots,r)} = \Phi^{-\frac{r+2}{2}} \sum_{i=1}^{i=n-r} \sum_{j=1}^{j=n-r} \Delta_{ij}\, x_{r+i}\, x_{r+j}, \tag{4}$$

dove, quando r sia dispari, al secondo membro va premesso il doppio segno $\pm$.

Il risultato sostanziale contenuto nella formola precedente può enunciarsi dicendo che *se dal determinante (3), formato colle derivate parziali di 2° ordine della z, si estrae un minore qualunque di ordine $r (\leq n-1)$ costruito intorno alla diagonale principale, e però contenente le sole derivate parziali prese rapporto a certe r (del resto qualunque) fra le variabili $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, esso si spezza nel prodotto di una potenza di Φ per un polinomio di 2° grado nelle sole $n-r-1$ variabili rimanenti.*

2. La formola (4) è specialmente notevole quando si assuma $r = n-1$: invero il secondo fattore che comparisce nel suo secondo membro diventa allora (posto $x_n = 1$) il discriminante del polinomio Φ, il quale, come facil-

mente si verifica, non è altro che il discriminante della quadrica moltiplicato per $(-1)^n$. Chiamando dunque D quest'ultimo discriminante, otteniamo

$$
(5) \qquad \begin{vmatrix}
\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1\, \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1\, \partial x_{n-1}} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1}\, \partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1}\, \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1}^2}
\end{vmatrix} = (-1)^n \mathrm{D}\, \Phi^{-\frac{n+1}{2}},
$$

dove, quando n sia pari, il secondo membro dev' essere ancora moltiplicato per ± 1.

Prima di venire all'argomento principale di questa Nota, faremo un'applicazione di questa formola all' espressione della curvatura della quadrica considerata. Com' è noto, il Kronecker per primo (¹) ha esteso alle varietà (di $n-1$ dimensioni), definite da un'equazione fra le coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, z$ di un punto di uno spazio euclideo ad n dimensioni, il concetto di curvatura Gaussiana di una superficie dello spazio ordinario. Senza entrare in altri particolari, ci basterà ricordare che in seguito il Beez (²) ha trovato, come espressione della *curvatura di Kronecker* per una siffatta varietà, la seguente:

$$
(-1)^{n-1} \left\{1 + \sum_{i=1}^{i=n-1} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2\right\}^{-\frac{n+1}{2}} \begin{vmatrix}
\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1\, \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1\, \partial x_{n-1}} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1}\, \partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1}\, \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1}^2}
\end{vmatrix}.
$$

Dalla (5) si deduce quindi senz' altro che *la curvatura di Kronecker in un punto qualunque di una quadrica ad* $n-1$ *dimensioni rappresentata dall' equazione* (1) *è data dall' espressione*

$$
-\mathrm{D}\, \Phi^{-\frac{n+1}{2}} \left\{1 + \sum_{i=1}^{i=n-1} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2\right\}^{-\frac{n+1}{2}},
$$

la quale, quando n sia pari, va risp. moltiplicata per ± 1.

Poichè Φ in ciascun punto della quadrica assume valore positivo, la espressione precedente, se n è dispari, è sempre di segno contrario a quello

(¹) Kronecker, *Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variabeln* (Monatsberichte der k. P. Akad. d. W. zu Berlin, 5 agosto 1869, pag. 688).

(²) Beez, *Ueber das Krümmungsmaass von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung* (Math. Ann., Bd. VII, pag. 390-391). — La stessa espressione si ottiene senza difficoltà ponendo $k = \infty$ nella formola 41), colla quale il Killing, a pag. 221 del suo libro *Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung* (Leipzig, 1885), determina i raggi principali di curvatura di una varietà ad $n-1$ dimensioni appartenente ad uno spazio non euclideo di n dimensioni (e di curvatura Riemanniana $\frac{1}{k^2}$).

di D, onde si conclude incidentalmente che *per una quadrica di uno spazio avente un numero dispari di dimensioni, la curvatura di Kronecker ha lo stesso segno in ogni punto, e precisamente è positiva o negativa, secondo che il discriminante della quadrica è negativo o positivo.*

3. Per dedurre ormai dai risultati del n. 1 le equazioni differenziali cui deve soddisfare la z, osserviamo che per la (4) si ha:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_\lambda^2} = \pm\, \psi^{(\lambda)}\, \Phi^{-\frac{3}{2}} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n-1),$$

dove $\psi^{(\lambda)}$ è un polinomio di 2° grado nelle sole variabili $x_1, x_2, \ldots, x_{\lambda-1}, x_{\lambda+1}, \ldots, x_{n-1}$. Da questa relazione e da quella che se ne ottiene derivando rapporto ad x_λ segue:

$$(6) \qquad \frac{\dfrac{\partial^3 z}{\partial x_\lambda^3}}{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_\lambda^2}} = -3\, \frac{\Phi_\lambda}{\Phi} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Se inoltre chiamiamo $Z^{(i_1, i_2, \ldots, i_r)}$ l'espressione analoga alla $Z^{(1,2,\ldots,r)}$ e formata colle derivate seconde prese rapporto ad r qualunque, $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$, delle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, dalla (4) si deduce:

$$Z^{(i_1, i_2, \ldots, i_r)} = \Phi^{-\frac{r+2}{2}}\, P,$$

essendo P un polimonio di 2° grado nelle sole $n-r-1$ variabili rimanenti. Dividendo per quest' ultima relazione quella che se ne ricava derivandola rapporto ad una qualunque delle $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$, che diremo x_λ, si ha

$$(7) \qquad \frac{1}{Z^{(i_1, i_2, \ldots, i_r)}}\, \frac{\partial Z^{(i_1, i_2, \ldots, i_r)}}{\partial x_\lambda} = -(r+2)\, \frac{\Phi_\lambda}{\Phi} \qquad (\lambda = i_1, i_2, \ldots, i_r),$$

la quale, al pari della (6), qualunque sia r, è valida anche nei segni. Dalle (6) e (7) si deduce allora:

$$(8) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_\lambda^2}\, \frac{\partial Z^{(i_1, i_2, \ldots, i_r)}}{\partial x_\lambda} - \frac{r+2}{3}\, \frac{\partial^3 z}{\partial x_\lambda^3}\, Z^{(i_1, i_2, \ldots, i_r)} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} i_1 \\ \vdots \\ i_r \end{array}\right\} = 1, 2, \ldots, n-1, \\ \lambda = i_1, i_2, \ldots, i_r \end{array} \right),$$

e queste sono in sostanza le equazioni alle derivate parziali del 3° ordine, a cui deve soddisfare la funzione z.

Per ottenere tali equazioni sotto la forma più semplice, basta dare ad r i valori più piccoli possibili, cioè 2 e 3.

Per $r = 2$, ponendo ad es. $i_1 = \lambda$, $i_2 = \mu$, e denotando per semplicità cogli indici $1, 2, \ldots, n-1$ le derivate rapporto ad $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, dalla (8) risulta:

$$\text{(I)} \qquad 3\, z_{\lambda\lambda} \left(z_{\lambda\lambda}\, z_{\lambda\mu\mu} - 2\, z_{\lambda\mu}\, z_{\lambda\lambda\mu}\right) + z_{\lambda\lambda\lambda} \left(4\, z^2_{\lambda\mu} - z_{\lambda\lambda}\, z_{\mu\mu}\right) = 0\,,$$

dove λ e μ sono due qualunque fra i numeri $1, 2, \ldots, n-1$. Ma si possono ottenere equazioni ancora più semplici: invero, se nella precedente si scambiano fra loro λ e μ, indi dalle due equazioni ottenute si elimina $z_{\lambda\mu\mu}$, e si divide la risultante per $4\, z^2_{\lambda\mu} - z_{\lambda\lambda}\, z_{\mu\mu}$ (quantità che sulla quadrica non è nulla), si ottiene:

$$\text{(I}'\text{)} \qquad 2\, z_{\lambda\mu}\, z_{\mu\mu}\, z_{\lambda\lambda\lambda} + z^2_{\lambda\lambda}\, z_{\mu\mu\mu} - 3\, z_{\lambda\lambda}\, z_{\mu\mu}\, z_{\lambda\lambda\mu} = 0\,.$$

Per $r = 3$, posto $i_1 = \lambda$, $i_2 = \mu$, $i_3 = \nu$, la (8) diventa:

$$\begin{aligned}
&2 z_{\lambda\lambda\lambda}\, z_{\lambda\lambda} \left(z_{\mu\mu}\, z_{\nu\nu} - z^2_{\mu\nu}\right) + 5 z_{\lambda\lambda\lambda} \left(2 z_{\lambda\mu}\, z_{\lambda\nu}\, z_{\mu\nu} - z^2_{\lambda\mu}\, z_{\nu\nu} - z^2_{\lambda\nu}\, z_{\mu\mu}\right)\\
&- 3 z_{\lambda\lambda} \big\{ 2 z_{\lambda\lambda\mu} \left(z_{\lambda\nu}\, z_{\mu\nu} - z_{\lambda\mu}\, z_{\nu\nu}\right) + 2 z_{\lambda\lambda\nu} \left(z_{\lambda\mu}\, z_{\mu\nu} - z_{\lambda\nu}\, z_{\mu\mu}\right)\\
&+ z_{\lambda\lambda} \left(z_{\lambda\mu\mu}\, z_{\nu\nu} + z_{\lambda\nu\nu}\, z_{\mu\mu} - 2 z_{\lambda\mu\nu}\, z_{\mu\nu}\right) + 2 z_{\lambda\mu\nu}\, z_{\lambda\mu}\, z_{\lambda\nu}\\
&\quad - z_{\lambda\mu\mu}\, z^2_{\lambda\nu} - z_{\lambda\nu\nu}\, z^2_{\lambda\mu} \big\} = 0,
\end{aligned}$$

dove λ, μ, ν sono tre qualunque fra i numeri $1, 2, \ldots, n-1$. Anche a questa si può dare una forma assai più semplice: infatti, moltiplicandola per $z_{\lambda\lambda}$, sostituendo a $3 z^2_{\lambda\lambda}\, z_{\lambda\mu\mu}$ e $3 z^2_{\lambda\lambda}\, z_{\lambda\nu\nu}$ le loro espressioni che si ricavano da (I), e dividendo poi per il binomio $z_{\lambda\lambda}\, z_{\mu\nu} - z_{\lambda\mu}\, z_{\lambda\nu}$, che sulla quadrica non è nullo, risulta:

$$\text{(II)} \qquad z_{\lambda\lambda\lambda} \left(4 z_{\lambda\mu}\, z_{\lambda\nu} - z_{\lambda\lambda}\, z_{\mu\nu}\right) - 3 z_{\lambda\lambda} \left(z_{\lambda\lambda\mu}\, z_{\lambda\nu} + z_{\lambda\lambda\nu}\, z_{\lambda\mu} - z_{\lambda\mu\nu}\, z_{\lambda\lambda}\right) = 0.$$

Concludiamo che *le (I′) e (II) sono, sotto la forma più semplice, le equazioni alle derivate parziali delle quadriche di uno spazio ad n dimensioni*; le equazioni del tipo (I′) sono in numero di $(n-1)(n-2)$; nel tipo (II) basta scegliere quelle, in numero di $\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)$, che si ottengono ponendo per λ, μ, ν le sole combinazioni dei numeri $1, 2, \ldots, n-1$. Così si hanno in tutto le richieste equazioni nel numero voluto, cioè

$$\frac{1}{6}\, n\, (n^2 - 7) + 1.$$

Notiamo ancora che alle (II) si può dare una forma simmetrica ed assai notevole, eliminando da esse $z_{\lambda\lambda\mu}$ e $z_{\lambda\lambda\nu}$ per mezzo di (I′); si ottiene così:

$$\text{(III)} \quad z_{\lambda\lambda\lambda}\, z_{\mu\mu}\, z_{\nu\nu}\, z_{\mu\nu} + z_{\mu\mu\mu}\, z_{\nu\nu}\, z_{\lambda\lambda}\, z_{\nu\lambda} + z_{\nu\nu\nu}\, z_{\lambda\lambda}\, z_{\mu\mu}\, z_{\lambda\mu} - 3 z_{\lambda\mu\nu}\, z_{\lambda\lambda}\, z_{\mu\mu}\, z_{\nu\nu} = 0.$$

Onde si può dire che le equazioni richieste sono o le (I′) e (II), o le (I′) e (III). Sotto quest'ultima forma riesce evidente che le equazioni trovate sono tutte indipendenti fra loro: infatti ciascuna contiene una derivata (di 3° ordine) che non comparisce in nessuna delle rimanenti, cioè $z_{\lambda\lambda\mu}$ per le equazioni del tipo (I') e $z_{\lambda\mu\nu}$ per quelle del tipo (III).

Per lo spazio ordinario ($n = 3$) le equazioni assegnate dall' Halphen sono due, l' una del tipo (I) e l' altra del tipo (I'): si guadagna però in semplicità e simmetria prendendo, come s' è detto, le due del tipo (I').

4. Se con z indichiamo la coordinata z del punto corrente sopra un' arbitraria varietà S ad $n-1$ dimensioni, le equazioni (I') e (II), ossia le loro equivalenti (I') e (III), esprimono anche le condizioni necessarie e sufficienti perchè in un punto dato di S, avente le coordinate $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z$, esistano quadriche aventi con S un contatto di 3° ordine. Da ciò che precede risulta che per $n > 3$ non è possibile, in generale, ottenere un tale contatto in nessun punto di S, mentre (come già notarono l' Hermite e l' Halphen), se $n = 3$, ciò è possibile in un numero finito di modi. Però, se la cosa è possibile in un punto determinato di S (cioè se le precedenti equazioni sono soddisfatte in quel punto), essa è possibile in infiniti modi, poichè si ha allora un fascio di quadriche, di cui ciascuna ha con S nel punto dato un contatto di 3° ordine. Se $\sum = 0$ è una qualunque di esse, il fascio viene rappresentato, al variare di λ, dall' equazione

$$\sum + \lambda z^2 = 0.$$

Matematica. — *Sui determinanti di funzioni nel calcolo alle differenze finite.* Nota del prof. ETTORE BORTOLOTTI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

È nota l' importanza dei determinanti:

$$D(y_1, y_2 \dots y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & , y_2 & , \dots y_n \\ y'_1 & , y'_2 & , \dots y'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & , y_2^{(n-1)} & , \dots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

nello studio delle equazioni differenziali lineari.

Eguale importanza hanno, nel calcolo alle differenze finite, i determinanti:

$$\nabla(y_1, y_2, \dots y_n) \begin{vmatrix} y_1, & y_2, \dots & y_n \\ \Delta y_1, & \Delta y_2, \dots & \Delta y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta^{n-1} y_1, & \Delta^{n-1} y_2, \dots & \Delta^{n-1} y_n \end{vmatrix}$$

di cui qui mi propongo di studiare le proprietà principali, a fine di servirmene per lo studio delle relazioni fra quelle forme alle differenze che il Pin-