ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME V.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

dine) che non comparisce in nessuna delle rimanenti, cioè $z_{\lambda\lambda\mu}$ per le equazioni del tipo (I') e $z_{\lambda\mu\nu}$ per quelle del tipo (III).

Per lo spazio ordinario ($n=3$) le equazioni assegnate dall' Halphen sono due, l' una del tipo (I) e l' altra del tipo (I'): si guadagna però in semplicità e simmetria prendendo, come s' è detto, le due del tipo (I').

4. Se con z indichiamo la coordinata z del punto corrente sopra un' arbitraria varietà S ad $n-1$ dimensioni, le equazioni (I') e (II), ossia le loro equivalenti (I') e (III), esprimono anche le condizioni necessarie e sufficienti perchè in un punto dato di S, avente le coordinate $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z$, esistano quadriche aventi con S un contatto di 3° ordine. Da ciò che precede risulta che per $n>3$ non è possibile, in generale, ottenere un tale contatto in nessun punto di S, mentre (come già notarono l' Hermite e l' Halphen), se $n=3$, ciò è possibile in un numero finito di modi. Però, se la cosa è possibile in un punto determinato di S (cioè se le precedenti equazioni sono soddisfatte in quel punto), essa è possibile in infiniti modi, poichè si ha allora un fascio di quadriche, di cui ciascuna ha con S nel punto dato un contatto di 3° ordine. Se $\sum = 0$ è una qualunque di esse, il fascio viene rappresentato, al variare di λ, dall' equazione

$$\sum + \lambda z^2 = 0.$$

Matematica. — *Sui determinanti di funzioni nel calcolo alle differenze finite.* Nota del prof. ETTORE BORTOLOTTI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

È nota l' importanza dei determinanti:

$$D(y_1, y_2 \dots y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & , y_2 & , \dots y_n \\ y'_1 & , y'_2 & , \dots y'_n \\ . & . & . \\ y_1^{(n-1)} & , y_2^{(n-1)} & , \dots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

nello studio delle equazioni differenziali lineari.

Eguale importanza hanno, nel calcolo alle differenze finite, i determinanti:

$$\nabla(y_1, y_2, \dots y_n) \begin{vmatrix} y_1, & y_2, \dots & y_n \\ \Delta y_1, & \Delta y_2, \dots & \Delta y_n \\ . & . & . \\ \Delta^{n-1} y_1, & \Delta^{n-1} y_2, \dots & \Delta^{n-1} y_n \end{vmatrix}$$

di cui qui mi propongo di studiare le proprietà principali, a fine di servirmene per lo studio delle relazioni fra quelle forme alle differenze che il Pincherle chiama *inverse* una dell'altra ([1]), e che, come lo stesso prof. Pincherle mi ha fatto osservare, sono, l'una rispetto all'altra, quello che, rispetto ad una data equazione lineare alle differenze, è la sua aggiunta di Lagrange.

Al fine di far meglio risaltare le analogie fra il calcolo alle differenze finite e quello infinitesimale, ho cercato che, anche nella forma, gli enunciati e le dimostrazioni si corrispondano. Ricorderò a questo proposito la memoria di Frobenius: *Ueber determinanten meherer functionen einer Variabeln* (Crelle, 77) alla quale appunto questa mia Nota può essere riferita.

1). Usando il simbolo:

$$\theta y = y + \Delta y = y(x+1),$$

si troveranno con facili riduzioni le formule:

$$(1)\qquad F(y_1, y_2 \dots y_n) = (y_1, \Delta y_2 \dots \Delta^{n-1} y_n) = (y_1, \theta y_2, \dots \theta^{n-1} y_n)$$

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}
&\Delta(y_1, y_2) = \theta y_1 . \Delta y_2 + y_2 . \Delta y_1 = y_1 . \Delta y_2 + \theta y_2 \cdot \Delta y_1\\
&\Delta^2(y_1, y_2) = \theta^2 y_1 . \Delta^2 y_2 + 2\,\theta \Delta y_1 . \Delta y_2 + y_2 . \Delta^2 y_1 .\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\Delta^n(y_1, y_2) = \theta^n y_1 . \Delta^n y_2 + n\theta^{n-1} \Delta y_1 \Delta^{n-1} y_2 + \frac{n\cdot(n-1)}{2}\theta^{n-2}\Delta^2 y_1 . \Delta^{n-2} y_2 + \cdots\\
&\qquad\cdots + n\theta . \Delta^{n-1} y_1 . \Delta y_2 + y_2 \cdot \Delta^n y_1 .
\end{aligned}\right.$$

Coll'aiuto delle quali, moltiplicando per linee, si ha:

$$\begin{vmatrix}
y, \Delta y, \Delta^2 y & ,\dots, & \Delta^{n-1} y .\\
0 \quad \theta y \quad 2\theta\Delta y & ,\dots, & (n-1)\,\theta\,\Delta^{n-2} y .\\
0 \quad 0 \quad \theta^2 y & ,\dots, & \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\theta^2\Delta^{n-3} y\\
\dots & \dots & \dots\\
0 \quad 0 \quad 0 & ,\dots, & \theta^{n-1} y .
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
y_1 & , y_2 & ,\dots, y_n\\
\Delta y_1 & \Delta y_2 & ,\dots, \Delta y_n\\
\Delta^2 y_1 & \Delta^2 y_2 & ,\dots, \Delta^2 y_n\\
\dots & \dots & \dots\\
\Delta^{n-1} y_1 , & \Delta^{n-1} y_2 , & \dots, \Delta^{n-1} y_n
\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix}
y y_1 & , y y_2 & ,\dots, y y_n\\
\Delta(y y_1) & , \Delta(y y_2) & ,\dots, \Delta(y y_n)\\
\Delta^2(y y_1) & , \Delta^2(y y_2) & ,\dots, \Delta^2(y y_n)\\
\dots & \dots & \dots\\
\Delta^{n-1}(y y_1) & , \Delta^{n-1}(y y_2) & ,\dots, \Delta^{n-1}(y y_n)
\end{vmatrix}$$

cioè:

$$(3)\qquad \prod_{r=0}^{n-1} \theta^r y . F(y_1 y_2 \dots y_n) = F(y y_1, y y_2, \dots y y_n)$$

([1]) *Saggio di una generalizzazione delle frazioni continue algebriche.* Acc. di Bologna 1890.

che, per la (1), potremo scrivere:

$$\prod_{r=0}^{n-1} \theta^r y \,.\, (y_1, \theta y_2, \dots \theta^{n-1} y_n) = (yy_1, \theta(yy_2), \dots, \theta^{n-1}(yy_n))$$

Facendo $y = \frac{1}{y_1}$ si ha:

$$F(y_1, y_2 \dots y_n) = \prod_{r=0}^{n-1} \theta^r y_1 \,.\, F\left(\Delta \frac{y_2}{y_1}, \Delta \frac{y_3}{y_1}, \dots \Delta \frac{y_n}{y_1}\right).$$

Si noti che:

$$\Delta \frac{y_r}{y_1} = \frac{1}{y_1 \,.\, \theta y_1} F\,(y_1, y_r) \text{ facendo } F(y_1, y_r) = u_r, \text{ avremo allora:}$$

$$F\left(\Delta \frac{y_2}{y_1}, \Delta \frac{y_3}{y_4}, \dots \Delta \frac{y_n}{y_1}\right) = \frac{1}{\prod_{r=0}^{n-2} \theta^r y_1 \,.\, \theta^{r+1} y_1} F(u_2, u_3, \dots u_n)$$

e sostituendo:

(4) $$F(y_1, y_2 \dots y_n) = \frac{1}{\prod_{r=1}^{n-2} \theta^r y_1} F(u_2, u_3 \dots u_n).$$

Sono casi particolari:

$$\begin{cases} F(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{\theta y_1} \cdot F(u_2, u_3) \\ \dots\dots\dots\dots \\ F(y_1, y_2, y_n) = \frac{1}{\theta y_1} \cdot F(u_2, u_n) \\ F(u_2, u_3, \dots u_n) = \frac{1}{\prod_{r=3}^{n-3}} \cdot F(F(u_2, u_3), F(u_2, u_4), \dots) \end{cases}$$

Dalla combinazione di queste colla (4) si ricava:

$$F(y_1, y_2 \dots y_n) = \frac{1}{\prod_{r=1}^{n-3} \theta^r . F(y_1, y_r)} \cdot F(F(y_1 y_2 y_3), F(y_1 y_2 y_4), \dots, F(y_1 y_2 y_n)).$$

Così continuando giungeremo in fine al teorema:

Se $u_1, u_2, \dots u_\mu, v_1, v_2, \dots v_\nu$ sono funzioni della variabile x_1 e sia:

$$\begin{cases} w_1 = F(u_1, u_2 \dots u_\mu, v_1) \\ \dots\dots\dots \\ w_\nu = F(u_1, u_2, \dots u_\mu, u_\nu) \end{cases}$$

sarà:

(5) $$F(u_1, u_2, \dots u_\mu, v_1, v_2, \dots v_\nu) = \frac{F(w_1, w_2, \dots w_\nu)}{\prod_{r=1}^{\nu-1} \theta^r F(u_1, u_2 \dots u_\mu)}$$

In particolare avremo:

$$V(y_1\,, y_2\,, \dots y_{k-1}\,, y_{k+1}\,, \dots y_n\,, y_k\,, y) = \frac{V(V(y_1\,, \dots y_{k-1}\,, y_{k+1}\,, \dots y_n\,, y_k)\,.\,V(y_1 \dots y_{k-1}\,, y_k\,, \dots y_n\,, y)}{V(y_1\,, y_2 \dots y_{k-1}\,, y_{k+1}\, y_n)}$$

Siccome poi è

$$V(u\,, v) = u\,.\,\theta u\,.\,\Delta\left(\frac{v}{u}\right),$$

così potremo scrivere:

$$\frac{V(y_1\,, \dots y_{k-1}\,, y_{k+1}\,, \dots y_n)\,.\,V(y\,, y_1\,, \dots y_n)}{V(y_1\,, y_2\,, \dots y_n)\,.\,\theta V(y_1\,, y_2\,, \dots y_n)} = -\Delta\left(\frac{V(y, y_1\,, \dots y_{k-1}, y_{k+1}, \dots y_n)}{V(y_1\,, y_2\,, \dots y_r)}\right). \tag{6}$$

Si ponga:

$$\left\{\begin{aligned} z_k &= (-1)^{n+k}\,\frac{V(y_1\,, y_2\,, \dots y_{k-1}\,, y_{k+1}\,, \dots y_n)}{V(y_1\,, y_2\,, \dots y_n)} \\ \mathrm{A}(y) &= (-1)^n\,\frac{V(y, y_1\,, \dots y_n)}{\theta V(y_1\,, y_2\,, \dots y_n)} \\ \psi(y\,, z_k) &= (-1)^{k-1}\,\frac{V(y\,, y_1\,, \dots\,, y_{k-1}\,, y_{k+1}\,, \dots y_n)}{V(y_1\,, y_2\,, \dots y_n)} \end{aligned}\right. \tag{7}$$

avremo:

$$z_k\,\mathrm{A}(y) = \Delta\,.\,\psi(y\,.\,z_k)\,. \tag{8}$$

In questa formula si può notare che z_k ($k = 1\,, 2 \dots n$), sono i reciproci degli elementi dell' ultima linea nel determinante $V(y_1\,, y_2 \dots y_n)$ divisi pel determinante stesso, e che $\mathrm{A}(y)$ è proporzionale al primo membro della equazione alle differenze:

$$(y, \theta y_1\,, \theta^2 y_2\,, \dots \theta^n y_n) = 0$$

di cui $y_1\,, y_2 \dots y_n$ sono integrali formanti sistema fondamentale.

2. Dalla definizione delle z_k risultano le identità:

$$\sum_{r=1}^{n} z_r\,\theta^s y_r = \begin{cases} 0 \text{ se } s < n-1 \\ 1 \text{ se } s = n-1 \end{cases}. \tag{9}$$

Se alla seconda di queste identità si applica la operazione θ^{-1}, alla terza la operazione θ^{-2}, ... alla u^{esima} la operazione $\theta^{-(n-1)}$, si hanno le altre:

$$\sum_{r=1}^{n} y_r\,\theta^{-s} z_r = \begin{cases} 0 \text{ se } s < n-1 \\ 1 \text{ se } s = n-1 \end{cases}.$$

Da cui risulta che le funzioni $y_1\,, y_2\,, \dots y_n$ sono proporzionali ai reciproci dell' ultima linea nel determinante:

$$V_{-1}(z_1\,, z_2 \dots z_n) = \begin{vmatrix} z_1 & , z_2 & \dots\,, z_n \\ \theta^{-1} z_1 & , \theta^{-1} z_2 & \dots\,, \theta^{-1} z_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^{-(n-1)} z_1 & , \theta^{-(n-1)} z_2 & , \dots\,, \theta^{-(n-1)} z_n \end{vmatrix} \tag{10}$$

Tenuto conto che per formare il determinante $F_{-1}(z_1\, z_1 \dots z_n)$ si applica la operazione θ in senso inverso a quello che si fece per formare $F(y_1\, y_2 \dots y_n)$, si vedrà che colle stesse norme con cui le funzioni $z_1\, z_2 \dots z_n$, ed il determinante $F(z_1 \dots z_n)$ si ricavano dalle funzioni $y_1, y_2 \dots y_n$; queste funzioni ed il determinante analogo $F(y_1 \dots y_n)$ si ricavano da quelle, e si concluderà che c'è reciprocità fra quei due sistemi di funzioni che potranno chiamarsi *aggiunti* l'uno dell'altro.

3. Dalle identità (9) per successiva applicazione della operazione θ e della sua inversa, usando il simbolo:

$$\sum \theta^{\alpha} y_r \,.\, \theta^{\beta} z_r = s_{\alpha,\beta}\,. \tag{11}$$

si ha:

$$\begin{cases} s_{\alpha,\beta} = 0\,, & \text{se } 0 \leqq \alpha - \beta < n-1 \\ s_{\alpha,\beta} = 1\,, & \text{se } \alpha - \beta = n-1 \end{cases} \tag{12}$$

Tenendo conto di queste relazioni e moltiplicando per linee si ha:

$$\begin{vmatrix} y_1 & ,\dots, y_k & , y_{k+1} & ,\dots, y_n \\ . & . & . & . \\ \theta^{k-1} y_1 & ,\dots, \theta^{k-1} y_k & , \theta^{k-1} y_{k+1} & ,\dots, \theta^{k-1} y_n \\ \theta^{k} y_1 & ,\dots, \theta^{k} y_k & , \theta^{k} y_{k+1} & ,\dots, \theta^{k} y_n \\ . & . & . & . \\ \theta^{n-1} y_1 & ,\dots, \theta^{n-1} y_k & , \theta^{n-1} y_{k+1} & ,\dots, \theta^{n-1} y_n \end{vmatrix} .$$

$$\begin{vmatrix} 1 & ,\dots, 0 & , 0 & ,\dots, 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & ,\dots, 1 & , 0 & ,\dots, 0 \\ z_1 & ,\dots, z_k & , z_{k+1} & ,\dots, z_n \\ . & . & . & . \\ \theta^{-(n-k-1)} z_1 & ,\dots, \theta^{-(n-k-1)} z_k & , \theta^{-(n-k-1)} z_{k+1} & ,\dots, \theta^{-(n-k-1)} z_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & ,\dots, y_k & ,0,\dots 0 \\ . & . & . \\ \theta^{k-1} y_1 & ,\dots, \theta^{k-1} y_k & ,0,\dots 0 \\ \theta^{k} y_1 & ,\dots, \theta^{k} y_k & ,0,\dots 1 \\ . & . & . \\ \theta^{n-1} y_1 & ,\dots, \theta^{n-1} y_k & ,1,\dots 0 \end{vmatrix}$$

ossia:

$$(y_1\,, \theta y_2\,, \dots\, \theta^{n-1} y_n) \,.\, (z_{k+1}\,, \theta^{-1} z_{k+2}\,, \dots\, \theta^{-(n-k-1)} z_n) = (-1)^{\frac{(n-k-1)(n-k)}{2}} (y_1\,, \theta y_2\,, \dots\, \theta^{k-1} y_k). \tag{13}$$

Cioè: *I minori formati colle k prime linee del determinante $F(y_1, y_2 \dots y_n)$ di un sistema di funzioni $y_1, y_2 \dots y_n$ sono proporzionali ai minori formati colle prime linee $n-k$ linee del determinante del sistema aggiunto.*

Simili conclusioni valgono pei minori formati colle ultime k linee.

In particolare dalla formula (13) si ha per $k = 0$:

$$(y_1 \,.\, \theta y_2 \dots \theta^{n-1} y_n) \,.\, (z_1\,, \theta^{-1} z_2\,, \dots\, \theta^{-(n-1)} z_n) = 1 \tag{14}$$

Il prodotto dei determinanti di due sistemi aggiunti è eguale all' unità.

Di quì si scorge che: *Se le funzioni $y_1, y_2 \dots y_n$ sono linearmente indipendenti lo sono anche le funzioni aggiunte, e reciprocamente.*

4. È noto che se $f(u), g(v)$ sono i primi membri di equazioni differenziali lineari aggiunte l'una dell'altra, e $\psi(u, v)$ è una funzione bilineare, omogenea delle u, v, e delle loro prime $n-1$ derivate si ha la relazione identica:

$$vf(u) - u\,g(v) = \psi'(u, v) .$$

Voglio ora cercare quale relazione sia a questa corrispondente nel calcolo alle differenze finite.

Si consideri perciò l'espressione:

$$(15)\quad \psi(y, z) = \sum_{k=0}^{n-1} V(y, y_1, \dots y_{k-1}, y_{k+1}, \dots y_n) \,.\, V_{-1}(z, z_1, \dots z_{k-1}, z_{k+1}, \dots z_n) ;$$

poichè

$$V_{-1}(z_1 z_2 \dots z_n) = \frac{1}{V(y_1, y_2 \dots y_n)} ,$$

il termine generale della somma indicata al secondo membro assume il valore $\psi(y, z_k)$ per $z = z_k$, ed è nullo quando z assume uno qualunque dei valori $z_1, z_2 \dots z_{k-1}, z_{k+1}, \dots z_n$, così avremo formato una funzione $\psi(yz)$ che per $z = z_k$, prende il valore $\psi(y, z_k)$ dato dalle formule (7).

Quando ivi si faccia $y = y_k$, quella funzione assume il valore:

$$(16)\qquad \psi(y_k, z) = (-1)^{k-1} \frac{V_{-1}(z, z_1, \dots z_{k-1}, z_{k+1}, \dots z_n)}{V_{-1}(z_1, z_2 \dots z_n)} ,$$

e ponendo:

$$(17)\qquad \begin{cases} y_k = (-1)^{n+k} \dfrac{V_{-1}(z_1 z_2 \dots z_{k-1}, z_{k+1}, \dots z_n)}{V_{-1}(z_1, z_2, \dots z_n)} \\[2ex] \mathrm{A}_{-1}(z) = (=1)^n \dfrac{V_{-1}(z, z_1, \dots z_n)}{\theta^{-1}. V_{-1}(z_1, \dots, z_n)} \end{cases}$$

si avrà, analogamente alla (8), la relazione:

$$(18)\qquad y_k\, \mathrm{A}_{-1}(z) = \Delta^{-1} . \psi(y_k, z) .$$

si sviluppi ora secondo gli elementi dell'ultima linea il determinante:

$$\begin{vmatrix} y_1 & , y_1 & , \dots, y_n \\ \theta y & , \theta y_1 & , \dots, \theta y_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \theta^{n-1} y & , \theta^{n-1} y_1 & , \dots, \theta^{n-1} y_n \\ \theta^k y & , \theta^k y_1 & , \dots, \theta^k y_n \end{vmatrix}$$

per tutti i valori positivi di $k < n$, sarà identicamente:

$$\theta^k y \,.\, F(y_1, \ldots y_n) - \theta^k y_1 \, F(y, y_2, \ldots y_n) + \cdots + (-1)^n \theta^k y_n \, F(y, \ldots y_{n-1}) = 0$$

o, dividendo per $F(y_1, y_2 \ldots y_n)$,

$$(19) \qquad \theta^k y = \sum_{s=1}^{n} \theta^k y_s \,.\, \psi(y z_s) \ldots (0 < k < n) .$$

Similmente si giungerebbe alle formule:

$$(20) \qquad \theta^{-k} z = \sum_{s=1}^{n} \theta^{-k} z_s \,.\, \psi(y_s, z) \quad (-n < k < 0) .$$

Se ora si pone:

$$\psi(y, z) = \sum_{r=0}^{n-1} \mathrm{Y}_s \, \theta^{-r} z$$

in conseguenza delle formole (19) e (20) si troveranno le relazioni:

$$\theta^k y = \sum_{r=0}^{n-1} \mathrm{Y}_r \, s_{k,-r}$$

eliminando le quantità $1, y_1, \ldots y_n$, si ha:

$$\begin{vmatrix} \psi(y, z), z & , \theta^{-1} z & , \ldots, \theta^{-(n-1)} z \\ y \quad , s_{0,0} & , s_{0,-1} & , \ldots, s_{0,-(n-1)} \\ \theta y \quad , s_{1,0} & , s_{1,-1} & , \ldots, s_{1,-(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta^{n-1} y, s_{n-1,0} & , s_{n-1,-1} & , \ldots, s_{n-1,-(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

da cui, ricordando le formule (12),

$$(21) \quad -\psi(y, z) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{vmatrix} 0 & , z & , \theta^{-1} z & , \ldots, \theta^{-(n-1)} z \\ y & , s_{0,0} & , s_{0,-1} & , \ldots, s_{0,-(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta^{-(n-1)} y & , s_{n-1,0} & , s_{n-1,-1} & , \ldots, s_{n-1,-(n-1)} \end{vmatrix}$$

La funzione $\psi(y, z)$ bilineare ed omogenea rispetto alle y, z, ed alle loro differenze finite fino all'ordine $n-1$, è in tutto simile a quella che, nel caso delle differenze infinitesime si trova nella relazione ricordata (¹).

Ricordando ora che è:

$$(-1)^n \mathrm{A}(y) =$$

$$\begin{vmatrix} y & , y_1 & , \ldots y_n \\ \theta y & , \theta y_1 & , \ldots \theta y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta^n y & , \theta^n y_1 & , \ldots \theta^n y_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1, 0 & , \ldots, 0 \\ 0, \theta z_1 & , \ldots, \theta z_n \\ \ldots & \ldots \\ 0, \theta^{-(n-2)} z_1 & , \ldots, \theta^{-(n-2)} z_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & , s_{0,1} & , \ldots, s_{0,-(n-2)} \\ \theta y & , s_{1,1} & , \ldots, s_{1,-(n-2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta^n y & , s_{n,1} & , \ldots, s_{n,-(n-1)} \end{vmatrix}$$

(¹) Cfr. p. es. Frobenius, loc. cit., pag. 254.

si sviluppi secondo la prima colonna il determinante identicamente nullo:

$$\begin{vmatrix} \theta z & , 0 & , \theta z & , z & , \dots \theta^{-(n-2)} z \\ s_{0,1} & , y & , s_{0,1} & , s_{0,0} & , \dots s_{0,-(n-2)} \\ s_{1,1} & , \theta y & , s_{1,1} & , s_{1,0} & , \dots s_{1,-(n-2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n,1} & , \theta^n y & , s_{n,1} & , s_{n,0} & , \dots s_{n,-(n-2)} \end{vmatrix}$$

sarà, per le (12) e (21):

$$(-1)^n . \theta z . \mathrm{A}(y) + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} s_{0.1} \psi(\theta y , \theta z) + (-1)^{n+\frac{n(n+1)}{2}} \psi(y , \theta z) = 0$$

ed essendo z funzione arbitraria della x:

$$-z \mathrm{A}(y) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \{ s_{0.1} \psi(\theta y , z) + (-1)^n \psi(y , z) \}.$$

Nello stesso modo si giunge alla formula:

$$-y \mathrm{A}_{-1}(z) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \{ s_{-1.0} \psi(y , \theta^{-1} z) + (-1)^n \psi(y , z) \} ,$$

e sottraendo:

$$y \mathrm{A}_{-1}(z) - z \mathrm{A}(y) = (-1)^{\frac{n(n-2)}{2}} \{ s_{0.1} \psi(\theta y , z) - s_{1.0} \psi(y , \theta^{-1} z) \} .$$

Poichè $y_1 , y_2 , \dots y_n$ è un sistema di integrali della equazione alle differenze:

$$F(y , y_1 , \dots y_n) = \sum_{r=0}^{n} a_r \theta^r y = 0 ,$$

si ha (formule (12)):

$$s_{0.1} = -\frac{a_n}{a_0} = (-1)^n \frac{F(y_1 \dots y_n)}{\theta F(y_1 \dots y_n)} \quad \text{ed} \quad s_{-1.0} = \theta^{-1} . s_{0.1} .$$

Se il determinante $F(y_1 \dots y_n)$ fosse invariante per la operazione θ, sarebbe $s_{01} = s_{-1.0} = (-1)^n$, d' onde sostituendo nella (22):

$$(23) \qquad y \mathrm{A}_{-1}(z) - z \mathrm{A}(z) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Delta . \psi(y , \theta^{-1} z) .$$

che è la formula cercata.

Matematica. — *La forma aggiunta di una data forma lineare alle differenze.* Nota del prof. ETTORE BORTOLOTTI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.