ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME V.

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 gennaio 1896.

F. Brioschi Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Della validità effettiva di alcuni sviluppi in serie di funzioni.* Nota del Corrispondente S. Pincherle.

È ben noto l'artifizio con cui il Weierstrass ed il Mittag-Leffler, nei celebri teoremi che portano i loro nomi, sono giunti ad ottenere, il primo, l'espressione di una funzione trascendente intera che si annulla nei punti $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ di una successione data, il secondo, quella di una funzione uniforme che nei punti $b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$ di una successione data diventa infinita come funzioni pure date: per esempio, che in b_n è infinita del prim'ordine col residuo r_n. Nel primo caso, la funzione richiesta sarebbe rappresentata dal prodotto infinito

$$(a) \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{a_n}\right)$$

quando esso fosse convergente assolutamente; nel secondo, la funzione domandata si avrebbe espressa dalla serie

$$(b) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_n}{x-b_n},$$

qualora tale serie fosse convergente in ugual grado in tutto il piano x, esclusi i punti b_n. Ciò non accade in generale: ordinariamente, tanto il prodotto (a) quanto la serie (b) divergono e pertanto non rappresentano effettivamente alcuna funzione. Ma se si moltiplica ogni fattore del prodotto infinito per un nuovo fattore conveniente e se si aggiunge ad ogni termine della serie (b) una espressione opportuna, come hanno fatto i nominati autori, si riesce a sostituire ad (a) e a (b) altre espressioni che (pur godendo delle stesse proprietà formali in modo da soddisfare, come quelle, alle condizioni dei rispettivi problemi) hanno incondizionata convergenza e rappresentano effettivamente le funzioni domandate.

Ora esistono, in parti assai diverse dell'analisi, certi sviluppi i quali si presentano in una forma sotto cui hanno un campo di validità assai limitato, ma ai quali è applicabile una modificazione del tutto analoga a quella ricordata e che permette di renderli effettivamente validi per quei casi in cui, nella primitiva forma, la loro esistenza è puramente virtuale. Questo fatto mi è sembrato assai degno di nota, e per porlo in evidenza nel modo più semplice possibile, mi sono limitato nella presente Nota a considerare un esempio particolare, riserbando ad altro lavoro la trattazione del metodo nella sua generalità. L'esempio sarà fornito dalla serie

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^n\varphi}{dx^n} \tag{c}$$

in cui φ è una funzione analitica della x. Formalmente, lo sviluppo (c) soddisfa all'equazione

$$f-\frac{df}{dx}=\varphi\,, \tag{d}$$

ma la serie (c) non è convergente se non eccezionalmente, cioè per funzioni φ soggette a condizioni assai restrittive, talchè alla (c), come formula per la risoluzione dell'equazione (d), non si può dare che un valore assai limitato. Però, mediante una modificazione opportuna dei termini della (c), la quale non altera la proprietà formale in forza della quale essa soddisfa all'equazione (d), si può renderla convergente per ogni funzione analitica φ regolare in un intorno (sia pure piccolo quanto si vuole) del punto $x=0$. Questo metodo, come ho accennato, è applicabile a sviluppi assai più generali di (c); ma anche limitato a questo caso, spero che non riuscirà privo d'interesse per la novità dell'argomento e per le osservazioni generali che è d'uopo premettere sulle serie ordinate secondo le derivate successive di una funzione.

---

1. Considereremo, in ciò che segue, le serie della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(x)\,\varphi^{(n)}(x)\,, \tag{1}$$

dove con $\alpha_n(x)$ ($n=0\,,1\,,2\,,\ldots$) si rappresenta una successione data di funzioni analitiche della variabile x regolari in un intorno del punto $x=0$, con

$\varphi(x)$ una funzione analitica della stessa variabile, che si può assumere arbitrariamente sotto la sola condizione di essere pure regolare nell'intorno del medesimo punto $x=0$, e con $\varphi^{(n)}(x)$ si indica la $\frac{d^n\varphi}{dx^n}$. In luogo di considerare $\varphi(x)$ ed $\alpha_n(x)$ regolari nell'intorno del punto $x=0$, si potrebbero supporre tali per l'intorno di un altro punto arbitrario x_0 del piano della variabile: noi continueremo però a fare $x_0=0$.

Quando una funzione $\varphi(x)$, sostituita nello sviluppo (1), rende questo sviluppo convergente in ugual grado in un intorno di $x=0$, diremo che $\varphi(x)$ *appartiene al campo funzionale di convergenza della serie* (1). Per ogni funzione $\varphi(x)$ appartenente al suo campo di convergenza, la serie (1) rappresenta una funzione analitica regolare in un intorno di $x=0$; essa serie può quindi riguardarsi come l'espressione di un'operazione funzionale eseguita su $\varphi(x)$. Di più, se $\varphi(x)$, $\psi(x)$ appartengono al campo di convergenza della (1), vi appartiene anche la $\varphi(x)+\psi(x)$, e l'operazione rappresentata dalla (1) è distributiva.

Ora dimostreremo, nei due paragrafi che seguono:

a) che una serie (1) ammette in generale un campo funzionale di convergenza;

b) che le serie della forma (2) possono essere di due nature diverse; quelle di *prima specie*, al cui campo di convergenza appartiene ogni $\varphi(x)$ regolare nell'intorno di $x=0$, quelle di *seconda specie*, al cui campo di convergenza appartengono quelle sole $\varphi(x)$ che soddisfano a determinate condizioni.

2. *Una serie* (1) *ammette sempre un campo funzionale di convergenza, purchè esista un intorno del punto* $x=0$ *in cui tutti i coefficienti della serie rimangono finiti.*

Si indichi con C quell'intorno di $x=0$ in cui tutte le $\alpha_n(x)$ rimangono finite, e sia m_n il limite superiore dei valori assoluti di $\alpha_n(x)$ in C. Si formi poi una successione di numeri positivi g_n arbitrarî purchè soggetti alle condizioni

$$g_n < g_{n-1}\,, \quad g_n < \frac{\varepsilon^n}{m_n}\,,$$

essendo ε un numero positivo minore dell'unità, infine si prenda x in C. Sotto queste condizioni dico che la funzione

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{x^n}{n\,!} \tag{2}$$

appartiene al campo di convergenza della (1): ne verrà che con essa vi appartengono tutte le serie di potenze in cui il coefficiente di x^n è minore in valore assoluto di $\frac{g_n}{n!}$.

Infatti, essendo

$$\varphi^{(n)}(x) = g_n + g_{n+1}x + \frac{g_{n+2}}{1 \cdot 2}x^2 + \cdots + \frac{g_{n+\nu}}{\nu!}x^\nu + \cdots ,$$

si avrà

$$|\varphi^{(n)}(x)| < g_n e^{|x|} ,$$

onde

$$|\sum \alpha_n(x)\,\varphi^{(n)}(x)| < e^{|x|} \sum \varepsilon^n ,$$

ed essendosi fatto $\varepsilon < 1$, risulta dimostrata la convergenza assoluta ed in ugual grado della (1) per la funzione (2) e per tutti i valori di x presi nell'intorno C.

3. Volendo ora provare l'esistenza delle due diverse specie di serie (1) indicate alla fine del § 1, basterà, all'uopo, di fornire esempî delle une e delle altre; ora un esempio semplicissimo della prima specie ci viene dato da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\varphi^{(n)}(x) ,$$

mentre esempî non meno semplici della seconda specie sono le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(x) \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(x) .$$

Considerando infatti la prima serie, si ricordi che $\varphi(x)$ è regolare nell'intorno di $x = 0$, ed ammette quindi uno sviluppo in serie di potenze di x convergente in un cerchio di centro $x = 0$ e di raggio r; ora per $|x| < \frac{1}{2}r$ la serie stessa è certamente convergente assolutamente ed in ugual grado. Il suo campo funzionale di convergenza è dunque costituito da tutte le funzioni regolari per $x = 0$. Invece la seconda serie non è convergente in ugual grado se non per le funzioni $\varphi(x)$ in cui il raggio del cerchio di convergenza relativa ad $x = 0$ è maggiore dell'unità, e la terza lo è solo per speciali funzioni trascendenti intere: esse sono quindi della seconda specie.

4. Le funzioni razionali intere appartengono al campo funzionale di convergenza di ogni serie (1), poichè per esse lo sviluppo (1) si riduce ad un numero finito di termini. Questa osservazione permette di togliere ogni restituzione al teorema del § 2, e di dire che *una serie* (1) *ha sempre un campo di convergenza.*

Una serie (1) si dirà identicamente nulla quando sia nulla per ogni funzione del suo campo funzionale. Ora ciò non può avvenire altro che se tutti i coefficienti $\alpha_n(x)$ della serie sono identicamente nulli: basta infatti porre successivamente $\varphi = 1$, $\varphi = x, \ldots \varphi = x^n, \ldots$ e si ottiene di mano in mano $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\ldots$ $\alpha_n = 0$.

Due serie della forma (1) non possono essere identicamente uguali in tutto il loro campo comune di convergenza, senza avere uguali i rispettivi coefficienti. Ciò risulta senz'altro dall'osservazione precedente, e permette di usare, per la determinazione di un'operazione funzionale sotto forma di serie (1), del noto metodo di coefficienti indeterminati.

5. Una serie (1) a coefficienti non nulli non può quindi rappresentare lo zero: ma può essa rappresentare una costante? La risposta a tale domanda è affermativa, e nel presente § daremo la forma più generale di una serie (1) che per ogni funzione $\varphi(x)$ del suo campo funzionale rappresenta una costante, variabile però passando da una $\varphi(x)$ ad un'altra. Sia infatti

$$C(\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n(x)\,\varphi^{(n)}(x) \tag{3}$$

una tale serie: esiste per essa (§ 2) un campo funzionale di convergenza in cui può venire derivata termine a termine, ottenendosi quindi il risultato

$$0=\lambda_0'(x)\,\varphi(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\lambda_{n-1}(x)+\lambda_n'(x)\Big)\,\varphi^{(n)}(x)\ :$$

ora ciò non può essere (§ 4) altro che se sono soddisfatte le equazioni

$$\lambda_0'(x)=0\ ,\quad \lambda_n'(x)=-\lambda_{n-1}(x)\ ,$$

che danno per le λ_n le determinazioni

$$\lambda_0=a_0\,,\quad \lambda_1=a_1-a_0x\,,\quad \lambda_2=\frac{1}{1\,.\,2}(a_2-2\,a_1\,x+a_0\,x^2),\ldots$$
$$\lambda_n=\frac{1}{n\,!}\big(a_n-na_{n-1}\,x+\tbinom{n}{2}\,a_{n-2}\,x^2+\cdots+(-1)^n\,a_0x^n\big)\,.$$

In questo sistema di polinomî, formati con legge assai ovvia e ben nota, il sistema dei coefficienti è arbitrario. Si può dunque, in infiniti modi, costruire una serie della forma (1) che rappresenti una costante, ed il campo funzionale della serie dipenderà dalla scelta delle costanti a_n. Facendo in particolare $a_0=1$ e tutte le altre $a_1, a_2, \ldots$ uguali a zero, si ottiene la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n\,!}\,\varphi^{(n)}(x)$$

che dà come valore $\varphi(0)$ per ogni $\varphi(x)$ regolare nell'intorno di $x=0$ e per $|x|$ abbastanza piccolo; essa è dunque una serie di prima specie.

6. Premesse queste osservazioni generali sulle serie (1), veniamo alla questione che forma l'oggetto principale della presente Nota, quale è indicato nell'Introduzione. Avendosi da risolvere l'equazione lineare di primo ordine

$$\psi-\frac{d\psi}{dx}=\varphi(x)\,, \tag{4}$$

dove φ è una funzione data. o ciò che è lo stesso, volendo determinare l'operazione

$$(1-D)^{-1},$$

dove D è il simbolo della derivazione, il calcolo simbolico ci dà

$$(1-D)^{-1} = 1 + D + D^2 + \cdots + D^n + \cdots$$

ossia, formalmente, si ottiene ψ dalla serie

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)} . \tag{5}$$

Ma la serie (4) è di quelle che abbiamo chiamate di *seconda specie*: infatti una funzione φ non può trovarsi nel suo campo di convergenza altro che quando sia soddisfatta la condizione (necessaria ma non sufficiente)

$$\lim_{n=\infty} \varphi^{(n)} = 0 ,$$

condizione che vale solo per speciali funzioni trascendenti intere. Si tratta ora di mostrare come un'opportuna modificazione dei termini della serie (5) permetta di trasformarla in una serie di prima specie, e che quindi contiene nel suo campo di convergenza ogni funzione regolare nell'intorno di $x = 0$.

7. La espressione

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)} + ce^{x} ,$$

dove c è una costante arbitraria, soddisfa formalmente all'equazione (4) al pari della serie (5). Vi soddisfarà ancora se al posto della costante c scriviamo lo sviluppo (3) che abbiamo ottenuto al § 5 e che serve a rappresentare una costante; con che abbiamo

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)} + e^{x} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \varphi^{(n)}$$

ossia

$$S = e^{x} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-x} + \lambda_n) \varphi^{(n)} . \tag{7}$$

Come si è visto al citato § 5, nel sistema dei polinomî λ_n è arbitraria la scelta dei coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots$; in particolare, possiamo porre

$$a_n = -n!$$

ed otteniamo

$$\lambda_n = -1 + x - \frac{x^2}{1.2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!},$$

talchè la (7) diviene

$$S = e^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1\,!} - \frac{x^{n+2}}{n+2\,!} + \cdots \right) \varphi^{(n)} . \tag{8}$$

Indichiamo ora con r il modulo di x, con $\overline{\varphi}$, $\overline{\varphi}'$, ... ciò che divengono le φ, φ', ... quando nelle serie di potenze che le rappresentano nell'intorno di $x=0$ sostituiamo ad ogni coefficiente il rispettivo valore assoluto: il termine generale della (8) sarà, in valore assoluto, minore di

$$\frac{r^{n+1}}{n+1\,!} \left(1 + \frac{r}{1} + \frac{r^2}{1\,.\,2} + \cdots \right) \overline{\varphi}^{(n)}(r) ,$$

da cui

$$|S| < |e^x|\, e^r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{n+1}}{n+1\,!} \overline{\varphi}^{(n)}(r) .$$

Ma la serie che qui figura nel secondo membro è convergente per ogni $\overline{\varphi}$ che sia una serie di potenze di x convergente entro un cerchio di centro 0 e di raggio qualunque a, purchè r si prenda minore della metà di a; lo stesso vale a fortiori per la (7), che è pertanto una serie di prima specie, c. d. d.

Astronomia. — *Nuovo studio sull'orbita della cometa 1890 IV.* Nota di T. Zona, presentata dal Socio Tacchini.

Nella seduta del 19 maggio presentai uno studio sull'orbita definitiva della mia cometa, in cui si usava il metodo di Schönfeld. I risultati finali ottenuti erano poco soddisfacenti, e la cosa più rimarchevole si fu il risultato negativo di $[ff5]$, quantità che teoricamente è positiva.

L'anormalità dei risultati mi persuase che il metodo usato non bene si adattasse al caso particolare della mia cometa.

Convinto di ciò (e questa mia convinzione la feci già nota all'illustre Accademia), invitai il mio assistente e già mio allievo dott. Mattina, molto abile in questi calcoli, a volere ripetere la ricerca con gli stessi elementi, ma usando il metodo che trovasi nel Watson.

Usando gli stessi dati ma col metodo del Watson, il dott. Mattina arrivò a risultati veramente ottimi, veramente definitivi, che credo utile presentare.

Luoghi normali

		α	δ
Novembre	19,5	78° 12′ 59″,2	34° 17′ 35″,0
Dicembre	3,5	57 46 1, 7	34 56 22, 2
"	12,5	46 33 59, 6	33 35 29, 4
"	31,5	31 26 41, 4	29 36 48, 3