ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCIII

1896

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME V.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1896

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 26 aprile 1896.

A. Messedaglia Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla inversione degli integrali multipli.* Nota del Corrispondente Vito Volterra.

1. Il metodo da me dato [1] per risolvere i problemi di inversione degl' integrali definiti semplici è suscettibile di estendersi agli integrali multipli. Una tale generalizzazione forma il soggetto della presente Nota, nella quale il problema dell' inversione viene sciolto qualunque siano il numero delle funzioni incognite e quello delle variabili indipendenti da cui esse dipendono. La risoluzione si ottiene in virtù di un procedimento con cui partendo da una funzione qualsiasi finita e continua di più variabili e mediante operazioni di quadratura, si giunge a costruire una nuova funzione pure finita e continua; la quale alla sua volta riproduce la funzione primitiva, allorchè si ripetono su essa quelle stesse operazioni che si sono eseguite sulla prima.

Mi permetto di comunicare all' Accademia il detto procedimento ed il teorema fondamentale da cui esso discende, giacchè non è a mia cognizione che siano state risolute fin qui le questioni funzionali che in tal modo vengono trattate.

2. Sia

$$S_0 (x_1 , x_2 \dots x_n | y_1 , y_2 \dots y_n)$$

una funzione finita e continua di $2n$ variabili e si ammetta che ciascuna

[1] Seduta del 1° marzo della R. Accademia dei Lincei. — Vedi anche gli Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, sedute del 12 gennaio, 26 gennaio e 8 marzo 1896; una Nota successiva sarà presentata nella seduta del 26 aprile.

coppia di variabili x_i, y_i si mantenga compresa entro i limiti α_i, β_i, essendo $\beta_i > \alpha_i$.

Si calcolino, partendo da S_0, le funzioni

$$(1) \qquad S_i(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n) =$$

$$\int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \int_{x_2}^{y_2} d\xi_2 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n \, . \, S_{i-j}(x_1 \dots x_n | \xi_1 \dots \xi_n) \, S_{j-1}(\xi_1 \dots \xi_n | y_1 \dots y_n)$$

in cui $i \geq j \geq 1$. Cominciamo dal dimostrare che S_i è indipendente da j. A tal fine osserviamo che questa proposizione resulta ovviamente per $i = 1$. Supponiamola verificata per tutti i valori dell'indice inferiori ad i, e mostriamo che è vera per i.

Infatti avremo

$$\int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \int_{x_2}^{y_2} d\xi_2 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n \, S_{i-j}(x_1 \dots x_n | \xi_1 \dots \xi_n) \, S_{j-1}(\xi_1 \dots \xi_n | y_1 \dots y_n) =$$

$$\int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n \, S_{i-j}(x_1 \dots x_n | \xi_1 \dots \xi_n) \int_{\xi_1}^{y_1} d\eta_1 \dots \int_{\xi_n}^{y_n} d\eta_n S_{j-h-1}(\xi_1 \dots \xi_n | \eta_1 \dots \eta_n) S_{h-1}(\eta_1 \dots \eta_n | y_1 \dots y_n)$$

ed applicando il principio di Dirichlet il secondo membro diverrà

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\eta_1 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\eta_n S_{h-1}(\eta_1 \dots \eta_n | y_1 \dots y_n) \int_{x_1}^{\eta_1} d\xi_1 \dots \int_{x_n}^{\eta_n} d\xi_n S_{i-j}(x_1 \dots x_n | \xi_1 \dots \xi_n) S_{j-h-1}(\xi_1 \dots \xi_n | \eta_1 \dots \eta_n)$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\eta_1 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\eta_n \, S_{h-1}(\eta_1 \dots \eta_n | y_1 \dots y_n) \, S_{i-h}(x_1 \dots x_n | \eta_1 \dots \eta_n)$$

il che dimostra il teorema.

Denotiamo ora con M il limite superiore dei valori assoluti di S_0; ne resulta come conseguenza che

$$(2) \qquad |S_i| \leq M^{i+1} \frac{(|y_1 - x_1|)^i}{i!} \frac{(|y_2 - x_2|)^i}{i!} \dots \frac{(|y_n - x_n|)^i}{i!} .$$

Infatti se ammettiamo soddisfatta la precedente relazione per il valore i, avremo, ponendo nella (1) $i + 1$ in luogo di i, e prendendo $j = 1$,

$$|S_{i+1}| \leq M^{i+2} \left| \int_{x_1}^{y_1} \frac{(y_1 - \xi_1)^i}{i!} d\xi_1 \int_{x_2}^{y_2} \frac{(y_2 - \xi_2)^i}{i!} d\xi_2 \dots \int_{x_n}^{y_n} \frac{(y_n - \xi_n)^i}{i!} d\xi_n \right|$$

$$= M^{i+2} \frac{(|y_1 - x_1|)^{i+1}}{(i+1)!} \frac{(|y_2 - x_2|)^{i+1}}{(i+1)!} \dots \frac{(|y_n - x_n|)^{i+1}}{(i+1)!}$$

il che prova la proposizione.

Dalla (2) segue

$$|S_i| \leq M^{i+1} \frac{(\beta_1 - \alpha_1)^i}{i!} \frac{(\beta_2 - \alpha_2)^i}{i!} \cdots \frac{(\beta_n - \alpha_n)^i}{i!}$$

e perciò la serie

$$(3) \qquad F_0(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n) = -\sum_0^\infty S_i(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n)$$

sarà uniformemente convergente e rappresenterà una funzione finita e continua delle variabili $x_1, x_2 \dots x_n$; $y_1, y_2 \dots y_n$.

3. Operiamo ora sulla F_0 nello stesso modo tenuto colla S_0; costruiamo cioè le funzioni

$$F_i(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n) = \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n F_{i-j}(x_1 \dots x_n | \xi_1 \dots \xi_n) F_{j-1}(\xi_1 \dots \xi_n | y_1 \dots y_n)$$

e formiamo la serie uniformemente convergente

$$-\sum_0^\infty F_i(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n).$$

Dico che la sua somma sarà S_0.

Per provarlo si può seguire lo stesso metodo tenuto nella Nota citata [1] per dimostrare il teorema medesimo nel caso in cui S_0 è una funzione di due sole variabili; ma si può anche far uso di un altro procedimento come ora mostreremo.

Si ponga il coefficiente binomiale

$$\frac{m(m-1)\dots(m-i+1)}{i!} = m_i, \ (i > 0); \quad m_0 = 1$$

e cominciamo dal dimostrare che

$$(4) \qquad F_i = (-1)^{i+1} \sum_{i\,m}^\infty m_i S_m = (-1)^{i+1} \sum_{0\,m}^\infty m_i S_m.$$

Infatti questa formula è vera per $i = 0$.

Supponiamola verificata per valori dell'indice inferiori ad i e mostriamo che è vera per l'indice i. A tal fine poniamo un apice ad una qualsiasi funzione F o S, quando alle y_h si sostituiscono le ξ_h, e poniamo due apici

[1] *Sulla inversione degli integrali definiti.* Rendiconti R. Accad. dei Lincei, fasc. del 15 marzo 1896, § 2.

quando le ξ_h si sostituiscono invece alle x_h. Avremo allora, applicando le note regole pel prodotto delle serie,

$$F'_{i-j}\,F''_{j-1} = (-1)^{i+1} \sum_0^\infty{}_m \sum_0^m{}_h (m-h)_{i-j}\, h_{j-1}\, S'_{m-h}\, S''_h\,,$$

e per la convergenza uniforme della serie

$$F_i = \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \ldots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n F'_{i-j} F''_{j-1} = (-1)^{i+1} \sum_0^\infty{}_m \sum_0^m{}_h (m-h)_{i-j} h_{j-1} \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \ldots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n S'_{m-h} S''_h$$

$$= (-1)^{i+1} \sum_0^\infty{}_m S_{m+1} \sum_0^m{}_h (m-h)_{i-j}\, h_{j-1} = (-1)^{i+1} \sum_0^\infty{}_m (m+1)_i S_{m+1} = (-1)^{i+1} \sum_i^\infty{}_m m_i S_m$$

La (4) resta dunque provata. Ne segue

$$-\sum_0^\infty{}_i F_i = S_0 + \sum_1^\infty S_m\,(m_0 - m_1 + m_2 - \cdots \pm m_m)\,.$$

Ma per una nota proprietà dei coefficienti binomiali

$$m_0 - m_1 + m_2 - \cdots \pm m_m = 0\,,$$

onde

$$-\sum_0^\infty{}_i F_i = S_0$$

come volevasi dimostrare.

4. Riprendiamo la (3); da essa segue

$$F_0'\,S_0'' = -\sum_0^\infty{}_i S_i'\,S_0''$$

$$F_0''\,S_0' = -\sum_0^\infty{}_i S_i''\,S_0'$$

quindi per la convergenza uniforme delle serie

$$\int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \ldots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n F_0'\,S_0'' = -\sum_0^\infty \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \ldots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n S_i'\,S_0'' = -\sum_1^\infty S_i = F_0 + S_0$$

$$\int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \ldots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n F_0''\,S_0' = -\sum_0^\infty \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \ldots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n S_i''\,S_0' = -\sum_1^\infty S_i = F_0 + S_0$$

e per conseguenza

$$F_0 + S_0 = \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \ldots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n\, F_0'\,S_0'' = \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \ldots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n\, F_0''\,S_0'\,.$$

5. Riassumendo i diversi risultati ottenuti potremo enunciare il teorema seguente:

Posto

$$\text{(A)} \qquad F_0(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n) = -\sum_0^\infty S_i(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n)$$

in cui

$$S_i(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n) = \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n S_{i-j}(x_1 \dots x_n | \xi_1 \dots \xi_n) S_{j-1}(\xi_1 \dots \xi_n | y_1 \dots y_n);$$

se la funzione $S_0(x_1 \dots x_n \mid y_1 \dots y_n)$ *da cui si parte è finita e continua per valori di* x_i, y_i *compresi fra* α_i *e* β_i, *anche* $F_0(x_1 \dots x_n \mid y_1 \dots y_n)$ *sarà una funzione finita e continua per i valori delle variabili compresi entro gli stessi limiti; e avremo la formula reciproca della* (A), *cioè*

$$\text{(A')} \qquad S_0(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n) = -\sum_0^\infty F_i(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n)$$

in cui

$$F_i(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n) = \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n F_{i-j}(x_1 \dots x_n | \xi_1 \dots \xi_n) F_{j-1}(\xi_1 \dots \xi_n | y_1 \dots y_n).$$

Inoltre sussisterà la relazione

$$\text{(B)} \qquad F_0(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n) + S_0(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n) =$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n F_0(x_1 \dots x_n | \xi_1 \dots \xi_n) S_0(\xi_1 \dots \xi_n | y_1 \dots y_n) =$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n F_0(\xi_1 \dots \xi_n | y_1 \dots y_n) S_0(x_1 \dots x_n | \xi_1 \dots \xi_n).$$

6. Consideriamo una funzione finita e continua qualunque delle $2n$ variabili $x_1 \dots x_n$; $y_1 \dots y_n$ il cui simbolo sia una lettera maiuscola, per esempio H. Posto $S_0 = -H$, si calcoli la corrispondente F_0. Denoteremo nel seguito, per uniformità di notazione, la $-F_0$ colla lettera minuscola, cioè porremo

$$h = -F_0.$$

Se H oltre essere funzione delle $2n$ variabili $x_1 \dots x_n$; $y_1 \dots y_n$ è funzione continua di altri m parametri $z_1, z_2 \dots z_m$; dalla precedente costruzione resulterà che anche h sarà funzione continua degli stessi parametri. Noi scriveremo

$$H = H(x_1 \dots x_n \mid y_1 \dots y_n;\ z_1 \dots z_m),$$
$$h = h(x_1 \dots x_n \mid y_1 \dots y_n;\ z_1 \dots z_m);$$

o anche più semplicemente

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}\,(x_1 \dots x_n \mid y_1 \dots y_n)\,,$$
$$h = h\,(x_1 \dots x_n \mid y_1 \dots y_n)$$

se vorremo porre in evidenza le sole variabili di cui si tien conto nel calcolo pel passaggio dall'una all'altra funzione.

La relazione (B) mediante le H, h, si scriverà

$$(5) \qquad -\mathrm{H}\,(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n) - h\,(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n) =$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n\, \mathrm{H}\,(x_1 \dots x_n | \xi_1 \dots \xi_n)\, h\,(\xi_1 \dots \xi_n | y_1 \dots y_n)$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \dots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n\, \mathrm{H}\,(\xi_1 \dots \xi_n | y_1 \dots y_n)\, h\,(x_1 \dots x_n | \xi_1 \dots \xi_n).$$

7. Abbiasi ora la relazione funzionale

$$f(y_1 \dots y_n) = \varphi\,(y_1 \dots y_n) + \int_{\alpha_1}^{y_1} dx_1 \dots \int_{\alpha_n}^{y_n} dx_n\, \varphi\,(x_1 \dots x_n)\, \mathrm{H}\,(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n)$$

in cui φ denota una funzione finita e continua.

Moltiplicando per $h\,(y_1 \dots y_n \mid z_1 \dots z_n)\, dy_1 \dots dy_n$ e integrando rispettivamente fra i limiti $\alpha_1,\ z_1;\ \alpha_2,\ z_2;\ \dots\ \alpha_n,\ z_n$, in cui $\beta_i > z_i > \alpha_i$, si otterrà

$$\int_{\alpha_1}^{z_1} dy_1 \dots \int_{\alpha_n}^{z_n} dy_n\, f(y_1 \dots y_n)\, h\,(y_1 \dots y_n | z_1 \dots z_n) =$$

$$= \int_{\alpha_1}^{z_1} dy_1 \dots \int_{\alpha_n}^{z_n} dy_n\, \varphi\,(y_1 \dots y_n)\, h\,(y_1 \dots y_n | z_1 \dots z_n) +$$

$$+ \int_{\alpha_1}^{z_1} dx_1 \dots \int_{\alpha_n}^{z_n} dx_n \varphi(x_1 \dots x_n) \int_{x_1}^{z_1} dy_1 \dots \int_{x_n}^{z_n} dy_n\, \mathrm{H}(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n)\, h(y_1 \dots y_n | z_1 \dots z_n)$$

e a cagione della (5) il secondo membro diverrà

$$= -\int_{\alpha_1}^{z_1} dx_1 \dots \int_{\alpha_n}^{z_n} dx_n\, \varphi\,(x_1 \dots x_n)\, \mathrm{H}\,(x_1 \dots x_n | z_1 \dots z_n) = \varphi\,(z_1 \dots z_n) - f(z_1 \dots z_n).$$

Avremo quindi

$$\varphi\,(z_1 \dots z_n) = f\,(z_1 \dots z_n) + \int_{\alpha_1}^{z_1} dy_1 \dots \int_{\alpha_n}^{z_n} dy_n\, f\,(y_1 \dots y_n)\, h\,(y_1 \dots y_n | z_1 \dots z_n).$$

Potremo dunque enunciare il teorema:

La relazione funzionale

$$\text{(C)}\quad f(y_1 \dots y_n) = \varphi(y_1 \dots y_n) + \int_{\alpha_1}^{y_1} dx_1 \dots \int_{\alpha_n}^{y_n} dx_n\, \varphi(x_1 \dots x_n)\, \mathrm{H}(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n)$$

si inverte mediante la formola

$$\text{(C')}\quad \varphi(z_1 \dots z_n) = f(z_1 \dots z_n) + \int_{\alpha_1}^{z_1} dy_1 \dots \int_{\alpha_n}^{z_n} dy_n\, f(y_1 \dots y_n)\, h(y_1 \dots y_n | z_1 \dots z_n)$$

in cui h si calcola dalla H *mediante le formole precedenti.*

8. Non sempre i problemi d'inversione si riducono immediatamente alla forma precedente in modo da risolverli applicando subito il procedimento indicato. Per gl' integrali semplici [1] la detta riduzione è immediata, invece la questione si presenta in modo molto complicato nel caso di integrali multipli. Per chiarire questo fatto si consideri, per esempio, il problema di determinare $\varphi(x_1, x_2)$ dalla relazione funzionale

$$(6)\qquad \theta(y_1, y_2) = \int_{\alpha_1}^{y_1} dx_1 \int_{\alpha_2}^{y_2} dx_2\, \varphi(x_1, x_2)\, \mathrm{H}(x_1, x_2 | y_1, y_2).$$

Derivando la precedente espressione rapporto ad y_1 e ad y_2 otterremo

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y_1\, \partial y_2} = \varphi(y_1, y_2)\, \mathrm{H}(y_1, y_2 | y_1, y_2) + \int_{\alpha_1}^{y_1} \varphi(x_1, y_2) \frac{\partial \mathrm{H}(x_1, y_2 | y_1, y_2)}{\partial y_1} dx_1$$

$$+ \int_{\alpha_2}^{y_2} \varphi(y_1, x_2) \frac{\partial \mathrm{H}(y_1, x_2 | y_1, y_2)}{\partial y_2} dx_2 + \int_{\alpha_1}^{y_1} dx_1 \int_{\alpha_2}^{y_2} dx_2\, \varphi(x_1, x_2) \frac{\partial^2 \mathrm{H}(x_1, x_2 | y_1, y_2)}{\partial y_1\, \partial y_2}.$$

Supposto $\mathrm{H}(y_1, y_2 \mid y_1, y_2) \lesseqgtr 0$, dividendo per questa funzione la relazione precedente, essa potrà scriversi sotto la forma

$$(7)\qquad f(y_1, y_2) = \varphi(y_1, y_2) + \int_{\alpha_1}^{y_1} \varphi(x_1, y_2)\, \mathrm{T}(x_1 | y_1 ; y_2)\, dx_1$$

$$+ \int_{\alpha_2}^{y_2} \varphi(y_1, x_2)\, \mathrm{V}(x_2 | y_2 ; y_1)\, dx_2 + \int_{\alpha_1}^{y_1} dx_1 \int_{\alpha_2}^{y_2} dx_2\, \varphi(x_1, x_2)\, \mathrm{S}(x_1, x_2 | y_1, y_2)$$

che è evidentemente ben diversa dalla (C).

9. In generale, allorchè $\mathrm{H}(y_1 \dots y_n \mid y_1 \dots y_n) \gtreqless 0$, la equazione funzionale

$$(8)\qquad \theta(y_1 \dots y_n) = \int_{\alpha_1}^{y_1} dx_1 \dots \int_{\alpha_n}^{y_n} dx_n\, \varphi(x_1 \dots x_n)\, \mathrm{H}(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_n)$$

[1] Cfr. Nota citata § 4.

condurrà, derivandola rapporto ad $y_1, y_2 \dots y_n$, e quindi dividendo per $H(y_1 \dots y_n \mid y_1 \dots y_n)$, ad una relazione in cui il primo membro è noto ed il secondo contiene la somma della funzione incognita e di integrali i cui ordini vanno da 1 ad n e sotto ai quali comparisce la funzione incognita stessa. Essa avrà quindi la forma

$$(9) \qquad f(y_1 \dots y_n) = \varphi(y_1 \dots y_n)$$

$$+\sum_1^n{}_h \sum_{i_1 \dots i_h} \int_{\alpha_{i_1}}^{y_{i_1}} dx_{i_1} \dots \int_{\alpha_{i_h}}^{y_{i_h}} dx_{i_h} \varphi(x_{i_1} \dots x_{i_h}, y_{i_{h+1}} \dots y_{i_n}) T_{i_1 \dots i_h}(x_{i_1} \dots x_{i_h} | y_{i_1} \dots y_{i_h}; y_{i_{h+1}} y_{i_n})$$

nella quale $i_1 \dots i_n$ denota una permutazione dei numeri $1, 2 \dots n$; con $\varphi(x_{i_1} \dots x_{i_h}, y_{i_{h+1}} \dots y_{i_n})$ si intende la funzione $\varphi(x_1 \dots x_n)$ in cui si sono sostituite $y_{i_{h+1}} \dots y_{i_n}$ al posto di $x_{i_{h+1}} \dots x_{i_n}$; e $\sum_{i_1 \dots i_h}$ indica una somma ottenuta facendo tutte le combinazioni h ad h degl' indici $1, 2, \dots n$. La f e le $T_{i_1 \dots i_h}$ che compariscono nella formola precedente sono funzioni note.

Per ricondurre la equazione funzionale (9) alla forma (C) bisognerà trasformarla in modo da far comparire nel secondo membro due soli termini, cioè il primo termine $\varphi(y_1 \dots y_n)$ ed un solo integrale multiplo.

Supponiamo per un momento che si sia riesciti a trasformare la relazione funzionale (9) in modo da eliminare nel secondo membro tutti gli integrali semplici, doppii ecc., fino a quelli d'ordine $r-1$, e quindi che la $\sum_h$ anzichè da 1 ad n sia estesa da r ad n. Essa allora sarà ridotta al tipo

$$(10) \qquad f(y_1 \dots y_n) - \varphi(y_1 \dots y_n) =$$

$$\sum_r^n{}_h \sum_{i_1 \dots i_h} \int_{\alpha_{i_1}}^{y_{i_1}} dx_{i_1} \dots \int_{\alpha_{i_h}}^{y_{i_h}} dx_{i_h} \varphi(x_{i_1} \dots x_{i_h}, y_{i_{h+1}} \dots y_{i_n}) T_{i_1 \dots i_h}(x_{i_1} \dots x_{i_h} | y_{i_1} \dots y_{i_h}; y_{i_{h+1}} \dots y_{i_n})$$

Mostriamo come, giunti a questo punto, sia possibile trasformare l' equazione funzionale in modo da eliminare gl'integrali d'ordine r.

Sia $s_1 \dots s_r$ una delle combinazioni d' ordine r degl' indici $1, 2 \dots n$, a cui nel secondo membro della equazione precedente corrisponda un integrale d' ordine r.

Si sostituisca in ambo i membri della equazione (10) $z_{s_{r+1}} \dots z_{s_n}$ in luogo di $y_{s_{r+1}} \dots y_{s_n}$; quindi si moltiplichino ambo i membri per

$$(11) \qquad t_{s_1 \dots s_r}(y_{s_1} \dots y_{s_r} | z_{s_1} \dots z_{s_r}; z_{s_{r+1}} \dots z_{s_n}) \, dy_{s_1} \dots dy_{s_r}$$

e si integri rispettivamente rapporto ad ogni y_{s_q} da α_{s_q} a z_{s_q}. Denotiamo con (D) la equazione che così si ottiene; il suo primo membro sarà

$$\int_{\alpha_{s_1}}^{z_{s_1}} dy_{s_1} \dots \int_{\alpha_{s_r}}^{z_{s_r}} dy_{s_r} \left[f(y_{s_1} \dots y_{s_r}, z_{s_{r+1}} \dots z_{s_n}) - \right.$$

$$\left. - \varphi(y_{s_1} \dots y_{s_r}, z_{s_{r+1}} \dots z_{s_n}) \right] t_{s_1 \dots s_r} (y_{s_1} \dots y_{s_r} | z_{s_1} \dots z_{s_r} ; z_{s_{r+1}} \dots z_{s_n}).$$

Per trovarne l'espressione del secondo membro, consideriamo il termine generico del secondo membro della (10) corrispondente alla combinazione $i_1 \dots i_h$ di indici e supponiamo che g di essi, $i_1 \dots i_g$ siano rispettivamente eguali a $s_1 \dots s_g$, mentre i rimanenti $i_{g+1} \dots i_h$ siano diversi dalle $s_{g+1} \dots s_r$. Allora, dopo la moltiplicazione pel fattore (11) e le successive integrazioni, il termine stesso assumerà la forma

$$(12) \int_{\alpha_{s_1}}^{z_{s_1}} dy_{s_1} \dots \int_{\alpha_{s_g}}^{z_{s_g}} dy_{s_g} \int_{\alpha_{s_{g+1}}}^{z_{s_{g+1}}} dy_{s_{g+1}} \dots \int_{\alpha_{s_r}}^{z_{s_r}} dy_{s_r} \int_{\alpha_{s_1}}^{y_{s_1}} dx_{s_1} \dots \int_{\alpha_{s_g}}^{y_{s_g}} dx_{s_g} \int_{\alpha_{i_{g+1}}}^{z_{i_{g+1}}} dx_{i_{g+1}} \dots$$

$$\dots \int_{\alpha_{i_h}}^{z_{i_h}} dx_{i_h} \varphi(x_{s_1} \dots x_{s_g}, x_{i_{g+1}} \dots x_{i_h}, y_{s_{g+1}} \dots y_{s_r}, z_{s_{r+u}} \dots z_{s_{r+v}}).$$

$$. \mathrm{T}_{i_1 \dots i_h}(x_{s_1} \dots x_{s_g}, x_{i_{g+1}} \dots x_{i_h} | y_{s_1} \dots y_{s_g}, z_{i_{g+1}} \dots z_{i_h} ; y_{s_{g+1}} \dots y_{s_r}, z_{s_{r+u}} \dots z_{s_{r+v}}).$$

$$. t_{s_1 \dots s_r}(y_{s_1} \dots y_{s_r} | z_{s_1} \dots z_{s_r} ; z_{s_{r+1}} \dots z_{s_n}).$$

Se noi applichiamo il principio di Dirichlet ad ogni integrale eseguito rapporto a $y_{s_1}, \dots y_{s_g}$ ed al corrispondente integrale rapporto ad $x_{s_1}, \dots x_{s_g}$, la espressione precedente potrà scriversi.

$$(12') \quad \int_{\alpha_{s_1}}^{z_{s_1}} dx_{s_1} \dots \int_{\alpha_{s_g}}^{z_{s_g}} dx_{s_g} \int_{\alpha_{s_{g+1}}}^{z_{s_{g+1}}} dy_{s_{g+1}} \dots \int_{\alpha_{s_r}}^{z_{s_r}} dy_{s_r} \int_{\alpha_{i_{g+1}}}^{z_{i_{g+1}}} dx_{i_{g+1}} \dots$$

$$\dots \int_{\alpha_{i_h}}^{z_{i_h}} dx_{i_h} \varphi(x_{s_1} \dots x_{s_g}, x_{i_{g+1}} \dots x_{i_h}, y_{s_{g+1}} \dots y_{s_r}, z_{s_{r+u}} \dots z_{s_{r+v}}) \mathrm{L}.$$

avendo posto

$$(13) \ \mathrm{L} = \int_{x_{s_1}}^{z_{s_1}} dy_{s_1} \dots \int_{x_{s_g}}^{z_{s_g}} dy_{s_g} \mathrm{T}_{i_1 \dots i_h}(x_{s_1} \dots x_{s_g}, x_{i_{g+1}} \dots x_{i_h} | y_{s_1} \dots y_{s_g}, z_{i_{g+1}} \dots z_{i_h} ; y_{s_{g+1}} \dots y_{s_r}, z_{s_{r+u}}, z_{s_{r+v}})$$

$$. t_{s_1 \dots s_r}(y_{s_1} \dots y_{s_r} | z_{s_1} \dots z_{s_r} ; z_{s_{r+1}} \dots z_{s_n})$$

Scriviamo nella (12′) $x_{s_{g+1}}, \ldots x_{s_r}$ invece di $y_{s_{g+1}} \ldots y_{s_r}$, e chiamiamo L′ il risultato di questa sostituzione eseguita su L; la (12′) acquisterà la espressione

$$\int_{\alpha_{s_1}}^{z_{s_1}} dx_{s_1} \ldots \int_{\alpha_{s_r}}^{z_{s_r}} dx_{s_r} \int_{\alpha_{i_{g+1}}}^{z_{i_{g+1}}} dx_{i_{g+1}} \ldots \int_{\alpha_{i_h}}^{z_{i_h}} dx_{i_h} \varphi(x_{s_1} \ldots x_{s_g}, x_{i_{g+1}} \ldots x_{i_h}, x_{s_{g+1}} \ldots x_{s_r}, z_{s_{r+u}} \ldots z_{s_{r+v}})\, \mathrm{L}'$$

nella quale la funzione incognita φ è moltiplicata per una funzione nota L′ e comparisce sotto ad un integrale multiplo d'ordine $r+h-g$ e quindi d'ordine inferiore o eguale ad n.

Dai precedenti resultati segue che il secondo membro dell'equazione (D) assumerà la forma

$$\int_{\alpha_{s_1}}^{z_{s_1}} dx_{s_1} \ldots \int_{\alpha_{s_r}}^{z_{s_r}} dx_{s_r} \varphi(x_{s_1} \ldots x_{s_r}, z_{s_{r+1}} \ldots z_{s_n}) \int_{x_{s_1}}^{z_{s_1}} dy_{s_1} \ldots \int_{x_{s_r}}^{z_{s_r}} dy_{s_r}\, \mathrm{T}_{s_1 \ldots s_r}(x_{s_1} \ldots x_{s_r} | y_{s_1} \ldots y_{s_r}; z_{s_{r+1}} \ldots z_{s_n}) \cdot$$
$$\cdot\, t_{s_1 \ldots s_r}(y_{s_1} \ldots y_{s_r} | z_{s_1} \ldots z_{s_r}; z_{s_{r+1}} \ldots z_{s_n}) +$$
$$+ \sum_{r+1}^{n}{}_h \sum_{i_1 \ldots i_h} \int_{\alpha_{i_1}}^{z_{i_1}} dx_{i_1} \ldots \int_{\alpha_{i_h}}^{z_{i_h}} dx_{i_h}\, \varphi(x_{i_1} \ldots x_{i_h}, z_{i_{h+1}} \ldots z_{i_n})\, \mathrm{T}^{(1)}_{i_1 \ldots i_h}(x_{i_1} \ldots x_{i_h} | z_{i_1} \ldots z_{i_h}; z_{i_{h+1}} \ldots z_{i_n})$$

in cui si è scritto separatamente dapprima il solo termine nel quale φ figura sotto ad un integrale d'ordine r, mentre gli altri che vengono successivamente contengono la funzione incognita sotto ad integrali multipli i cui ordini vanno da $r+1$ ad n. Le $\mathrm{T}^{(1)}_{i_1 \ldots i_h}$ saranno funzioni note che si dedurranno facilmente dalle precedenti L.

Tenendo ora conto della relazione (vedi form. (5))

$$\int_{x_{s_1}}^{z_{s_1}} dy_{s_1} \ldots \int_{x_{s_r}}^{z_{s_r}} dy_{s_r}\, \mathrm{T}_{s_1 \ldots s_r}(x_{s_1} \ldots x_{s_r} | y_{s_1} \ldots y_{s_r}; z_{s_{r+1}} \ldots z_{s_n})\, t_{s_1 \ldots s_r}(y_{s_1} \ldots y_{s_r} | z_{s_1} \ldots z_{s_r}; z_{s_{r+1}} \ldots z_{s_n})$$
$$= -\mathrm{T}_{s_1 \ldots s_r}(x_{s_1} \ldots x_{s_r} | z_{s_1} \ldots z_{s_r}; z_{s_{r+1}} \ldots z_{s_n}) - t_{s_1 \ldots s_r}(x_{s_1} \ldots x_{s_r} | z_{s_1} \ldots z_{s_r}; z_{s_{r+1}} \ldots z_{s_n})$$

la equazione (D) si scriverà

$$(14) \quad \int_{\alpha_{s_1}}^{z_{s_1}} dx_{i_1} \ldots \int_{\alpha_{s_r}}^{z_{s_r}} dx_{s_r} \varphi(x_{s_1}, \ldots x_{s_r}, z_{s_{r+1}} \ldots z_{s_n})\, \mathrm{T}_{s_1 \ldots s_r}(x_{s_1} \ldots x_{s_r} | z_{s_1} \ldots z_{s_r}; z_{s_{r+1}} \ldots z_{s_n})$$
$$= -\mathrm{F}_{s_1 \ldots s_r}(z_1 \ldots z_n) +$$
$$+ \sum_{r+1}^{n}{}_h \sum_{i_1 \ldots i_h} \int_{\alpha_{i_1}}^{z_{i_1}} dx_{i_1} \ldots \int_{\alpha_{i_h}}^{z_{i_h}} dx_{i_h}\, \varphi(x_{i_1} \ldots x_{i_h}, z_{i_{h+1}} \ldots z_{i_n})\, \mathrm{T}^{(1)}_{i_1 \ldots i_h}(x_{i_1} \ldots x_{i_h} | z_{i_1} \ldots z_{i_h}; z_{i_{h+1}} \ldots z_{i_n})$$

in cui $F_{s_1 \dots s_r}(z_1 \dots z_n)$ è una funzione nota e precisamente

$$F_{s_1 \dots s_r}(z_1 \dots z_n) = \int_{\alpha_{s_1}}^{z_{s_1}} dy_{s_1} \dots \int_{\alpha_{s_r}}^{z_{s_r}} dy_{s_r} f(y_{s_1} \dots y_{s_r}, z_{s_{r+1}} z_{s_n}) t_{s_1 \dots s_r}(y_{s_1} \dots y_{s_r} | z_{s_1} \dots z_{s_r}; z_{s_{r+1}} \dots z_{s_n}) .$$

Formiamo le equazioni analoghe alla (14) che si ottengono prendendo tutte le combinazioni $s_1 \dots s_r$ degli n indici r ad r. Sommandole, il primo membro resulterà tale che il suo valore ricavato dalla (10) assumerà la forma

$$f(z_1 \dots z_n) - \varphi(z_1 \dots z_n)$$

$$-\sum_{r+1}^{n}{}_h \int_{\alpha_{i_1}}^{z_{i_1}} dx_{i_1} \dots \int_{\alpha_{i_h}}^{z_{i_h}} dx_{i_h} \varphi(x_{i_1} \dots x_{i_h}, z_{i_{h+1}} \dots z_{i_n}) T_{i_1 \dots i_h}(x_{i_1} \dots x_{i_h} | z_{i_1} \dots z_{i_h}; z_{i_{h+1}} \dots z_{i_n})$$

e perciò, denotando con $\overset{(2)}{T}_{i_1 \dots i_h}$ delle quantità note, otterremo l' equazione

$$f(z_1 \dots z_n) + \sum_{i_1 \dots i_r} F_{i_1 \dots i_r}(z_1 \dots z_n) = \varphi(z_1 \dots z_n)$$

$$+\sum_{r+1}^{n}{}_h \sum_{i_1 \dots i_h} \int_{\alpha_{i_1}}^{z_{i_1}} dx_{i_1} \dots \int_{\alpha_{i_h}}^{z_{i_h}} dx_{i_h} \varphi(x_{i_1} \dots x_{i_h}, z_{i_{h+1}} \dots z_{i_n}) \overset{(2)}{T}_{i_1 \dots i_h}(x_{i_1} \dots x_{i_h} | z_{i_1} \dots z_{i_h}; z_{i_{h+1}} \dots z_{i_n}).$$

L'equazione funzionale è stata dunque trasformata in modo da eliminare gl' integrali d' ordine r. Così procedendo noi potremo perciò dalla (9) eliminare successivamente gl' integrali di 1°, 2°, 3° ... ordine finchè essa non si riduca alla forma (C).

Ogni qual volta una equazione della forma (8) sarà tale che θ e H saranno finite continue e derivabili, e $H(y_1, y_2 \dots y_n \mid y_1, y_2 \dots y_n)$ sarà diversa da zero, noi potremo, col metodo indicato, ricavare la φ; supponendo naturalmente che sia $\theta = 0$ per $y_i = \alpha_i$.

10. Come esempio consideriamo il caso della equazione (6) che abbiamo ricondotto al tipo (7).

Una prima trasformazione, ottenuta eliminando gl' integrali del primo ordine, ridurrà questa equazione alla forma

$$(15) \quad f(z_1, z_2) + \int_{\alpha_1}^{z_1} t(x_1 | z_1; z_2) f(x_1, z_2) dx_1 + \int_{\alpha_2}^{z_2} v(x_2 | z_2; z_1) f(z_1, x_2) dx_2$$

$$= \varphi(z_1, z_2) + \int_{\alpha_1}^{z_1} dx_1 \int_{\alpha_2}^{z_2} dx_2 M(x_1, x_2 | z_1, z_2) \varphi(x_1, x_2)$$

in cui

$$M(x_1, x_2|z_1, z_2) = S(x_1, x_2|z_1, z_2) + t(x_1|z_1; z_2)\, V(x_2|z_2; x_1) +$$

$$+ v(x_2|z_2; z_1)\, T(x_1|z_1; x_2) + \int_{x_1}^{z_1} t(\xi_1|z_1; z_2)\, S(x_1, x_2|\xi_1, z_2)\, d\xi_1$$

$$+ \int_{x_2}^{z_2} v(\xi_2|z_2; z_1)\, S(x_1, x_2|z_1, \xi_2)\, d\xi_2 .$$

Chiamando $g(z_1, z_2)$ il primo membro della (15), dalla (C′) si ricaverà finalmente

$$\varphi(z_1, z_2) = g(z_1, z_2) + \int_{\alpha_1}^{z_1} dx_1 \int_{\alpha_2}^{z_2} dx_2\, m(x_1, x_2|z_1, z_2)\, g(x_1, x_2) .$$

11. Accenniamo ora brevemente al caso in cui si abbiano ν equazioni del tipo

$$(16)\quad \theta_s(y_1 \ldots y_n) = \int_{\alpha_1}^{y_1} dx_1 \ldots \int_{\alpha_n}^{y_n} dx_n \sum_1^{\nu}{}_i \varphi_i(x_1 \ldots x_n) H_{is}(x_1 \ldots x_n | y_1 \ldots y_n), \quad (s = 1, 2 \ldots \nu)$$

colle ν funzioni incognite $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_\nu$. Per risolverle cominciamo dal derivarle rispetto ad $y_1, y_2 \ldots y_n$. Se il determinante

$$\begin{vmatrix} H_{11} \ldots H_{1\nu} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ H_{\nu 1} \ldots H_{\nu\nu} \end{vmatrix},$$

in cui si sono fatte le $x_i = y_i$ è diverso da zero, potremo facilmente porre [1] la (16) sotto la forma

$$(17)\qquad f_s(y_1 \ldots y_n) = \varphi_s(y_1 \ldots y_n) + K_s, \quad (s = 1, 2 \ldots \nu)$$

in cui f_s è una funzione nota e K_s è una somma d'integrali i cui ordini vanno da 1 ad n e che contengono linearmente le funzioni incognite. Supponendo note $\varphi_2 \ldots \varphi_\nu$, dalla prima delle (17) potremo ricavare φ_1 mediante il procedimento esposto superiormente. Sostituendone la espressione nelle successive $\nu - 1$ equazioni, avremo un sistema di $\nu - 1$ equazioni che conservano il tipo (17) dalle quali φ_1 è eliminata. Così procedendo per successive eliminazioni si ricondurrà la questione a risolvere una sola equazione funzionale del tipo esaminato con una sola funzione incognita.

[1] Cfr. Nota citata § 5.